This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR

QA
33
.C617b

A6

CHRISTOPHORI CLAVII BAMBERGENSIS E SOCIETATE IESV.

Clavius, Christophe, 1538-1612

GEOMETRIA PRACTICA.



Cum gratia & Priuilegio Sac. Cæſ. Maieſtat.

Superiorum Permiſſu.

MOGVNTIÆ,
Typographeo IOANNIS ALBINI.
ANNO M. DC. VI.

Ab

PERILLVSTRI AC GENEROSO D.

GEORGIO FVGGERO

SENIORI

BARONI IN KIRCHBERG,
ET VVEISSENHORN.

Chriſtophorus Clauius è Societate
IESV S. P. D.

VT VENIET IN MANVS TVAS liber hic meus, Generoſe Domine, veniet & in mentē, vt opinor, Theocriteum illud, βάρδισται μακάρων ὧραι φίλαι: cum lentiſſimo gradu, quo mira celeritate aduolare debuerat, vix aliquando enerit. Serius omnino merito tuo, & vo- partus hic noſter properat ad Patronum. erum ſi editum illum iam grauibus annis re- facile apud te conſtitues, à tarda ſene- niſi fœtum tardum expectari potuiſſe. lias tam frequentibus, moleſtiſque mor- fflictus, nunquā tanto arſi deſiderio, vt quod diu cœperam, aliquando in lucem exponere,

(a) 2 experi-

experientia, & Pindarica voce doctus, ἀπροσίκτων ἐρώτων
ὀξυτέρας εἶναι μανίας. Obuerſabaris enim noctes, dieſque
oculis meis, vir ampliſſimè: & iure tuo, vt iam affe-
cta perfecta tibi traderem, flagitare videbaris. Non
exiguam vim pecuniæ gentilitia liberalitate ad men-
ſas depoſueras, paratam in vſus, expenſaſq; cudendi li-
bri: res monebat, vt diligentia mea minus prompta
non eſſet munificentia tua. Accedebat quod onus
Ætna grauius impoſuerat obſeruantia tua ſingularis
in me: quo aliqua ex parte qua ratione leuari poſſem
alia, non videbam. Vir enim in Mathematicis non
vulgari cum laude exercitatiſſimus, tanto in honore
habuiſti ſemper labores, & libros meos, vt ijs, qui te
probe, meque norunt penè miraculo poſſis eſſe. Si e-
nim Clauij libros in manibus haberes eo conſilio: vt
amici tui ſcripta, quod potes, redderes meliora: doctri
nam tuam omnes agnoſcerent, laudarēt beneuolen-
tiā; Sed à te tanto viro in Mathematicis partus tenues,
nec operæ multæ aſſidua verſari manu, hoc illud eſt,
quod jure mirari quis poſſit: hoc non obſcurum indi-
cium, à te mea, quaſi egregium, eximiumque aliquid
ſint, exiſtimari. A qua præſtantia quantum abſim,
quia video: ideo intelligo maximum eſſe ſtudium in
me tuum: à quo ſi præter meritum honeſtor, pro ir
rito certe ita obſtringor, vt quæ maxima eſt vi
meis grati animi teſtificatio, minima ſit pro
cio tuo. Hanc tamen qualemcunque gratæ
te ſignificationē extare quam primum voleb
præſertim ad has rationes acceſſio fieret alian, quæ
apud optimum quemq; plurimum ſemper lere cō-
ſueue-

ſueuerunt. Ego enim has viuendi rationes, & inſtituta ſecutus, ad cuius alterius patrocinium meos libros adlegarem, niſi ad illum, quem vniuerſus noſtræ Societatis ordo acerrimũ ſui propugnatorem, & amantiſſimum patronum ſemper expertus eſt? Familiaris igitur tibi cum ſit tutela noſtrum, mea hæc ab inuidorum, ignarorumq; morſibus vindicabis; non auctoritate modo vrgens aduerſarios, ſed etiam doctrina. Qua cogitatione ſum permotus, vt tibi præcipuè Geometriam Practicam deſtinarem. Iis etenim, qui noſtris in ſtudiis non admodum deſudarunt, ſi quid offeras tale, magna cura explicanda prius eſt, & commendanda per epiſtolam libri doctrina, ne ſe contemptos humilitate muneris arbitrentur. Tu, vt hoc duntaxat vnum legis, Geometria Practica; quantum vtilitatis, voluptatiſque lateat in toto libro, optimè peruides. His igitur aſſiduis cogitationibus, quaſi tot facibus inflammatus, ætatem, valetudinemq; aduerſam, Deo propitio, tandem vici; & per hæc locorum interualla opus ad te tuũ venire iubeo. Tuum, inquam: & quia virtus, liberalitaſque tua illud aſſeruere tibi: & quia ab eo ſcriptum eſt, qui tuus eſt. Quod ſi gratum fuiſſe tibi intelligam, laborum meorum fructum cumulatum feram, cum amantiſſimum mei re non ingrata donauerim. Vale.

ROMÆ PRIDIE IDVS SEPTEMB. cIↄ. cI. CIIII.

CLAVDIVS AQVAVIVA SOCIETATIS IESV Præpoſitus Generalis.

CVM opus hoc Geometriæ Practicæ, à P. Chriſtophoro Clauio Societatis noſtræ Theologo compoſitum, & in octo libros diſtributum, tres eiuſdem Societatis Theologi, quibus id commiſimus, recognouerint, ac in lucem edi poſſe probauerint; facultatem concedimus, vt typis mandetur, ſi ita Reuerendiſſimo D. Viceſgerenti, ac Reuerendiſs. P. M. ſacri Palatij videbitur. In quorum fidem has litteras manu noſtra ſubſcriptas, & ſigillo noſtro munitas dedimus. Romæ 23. Maij 1604.

Claudius Aquauiua Societatis IESV Præp. Gen.

Imprimatur ſi placet R. P. M. S. Palatii.

B. Gypſius Viceſgerens.

EGO Theodoſius Rubeus Priuernas S. Theol. & I. V. D. ex commiſſione Reuerendiſs. P. M. Ioannis Mariæ Braſichellenſ. Sac. Palat. Apoſt. Mag. ſedula, qua potui diligentia, euolui Geometriæ Practicæ libros octo, grauiſſimi, & doctiſſimi viri Chriſtophori Clauii Bambergenſis Societatis IESV, in qua talis inuentionum vbertas, & ſubtiliſſima inuentorum demonſtratio elucet, vt tanto viro, tantoque ingenio digna cenſeatur. Ex quo facilè deprehendi poteſt, in ea nihil Catholicæ Religioni, bonisque moribus diſſonum inueniri, eamque in lucem non edere, eſſet patrisfamilias creditum talentum in terra defodere. Et ita ego cenſeo, ſaluo ſemper ſaniori iudicio. Dat. ex meo ſtudio hac die 1. Iulii 1604.

Ego Theodoſius Rubeus, qui ſupra, manu propria.

Imprimatur,

Fr. Paulus de Francis de Neap. ſocius Reuerendiſs. P. Magiſtri ſa. Palatii Apoſt.

INT

INDEX
CAPITVM, PROBLEMATVM, AC PROPOSITIONVM HORVM VIII. LIBRORVM.

PRIMI LIBRI CAPITA.

I. INSTRVMENTI *partium conſtructio, atque vſus multiplex.* 4. *vſq; ad* 14

II. *Conſtructio Quadrantis, in quo Minuta quoque ac Secunda deprehendantur, etiamſi gradus in ea ſecti non ſint. Et quo pacto eadem Min. & Sec. obtineri poſſint in Quadrante in 90. gradus diſtributo. Ac deniq; qua ratione ex data recta in pauciſſimas partes æquales diuiſa abſcindi poſſint partes milleſimæ, &c.* 14. *vſq; ad* 44

III. *Problemata varia triangulorum rectilineorum.* 44. *vſque ad* 50

SECVNDI LIBRI PROBLEMATA.

I. DISTANTIAM *in plano, ſiue acceſſibilis ea ſit, ſiue inacceſſibilis, per duas ſtationes in eodem plano factas, per quadrantem metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo aliqua perpendicularis, etiamſi infimum eius extremum non cernatur. Atque hinc altitudinem quoque ipſam elicere.* 51

LEMMA. Datis duabus rectis ad inuicem inclinatis, punctum, in quo conueniant, inuenire. 55

II. *Altitudinem inacceſſibilem, quando diſtantia à loco menſoris ad baſem altitudinis ignota eſt, per duas ſtationes in plano factas, per quadrantem dimetiri. Atque hinc diſtantiam quoque ipſam eruere, etiamſi extremus eius terminus non cernatur.* 57

III. *Ex vertice montis, aut turris, in cuius ſummitate duæ ſtationes fieri poſſint, è quibus ſignum aliquod in Horizonte appareat, altitudinem ipſius montis turriſue dimetiri. Atque hinc ipſam quoque diſtantiam à turris baſi, vel perpendiculo montis ad ſignum illud inueſtigare.* 59

IV. *Ex vertice montis, vel turris, per duas ſtationes in aliqua haſta erecta, vel in duabus feneſtris turris, quarum vna ſupra aliam exiſtat, factas, è quibus ſignum aliquod in Horizonte videri poſſit, altitudinem ipſius montis, aut turris per quadrantem metiri. Atq; hinc diſtantiam quoque à perpendiculo montis, vel turris, vſque ad ſignum viſum cognoſcere.* 62

V. *Ex vertice montis, aut turris, altitudinem ipſius, ſi in plano, cui inſiſtit, ſpatium aliquod è directo menſoris notum ſit, per quadrantem deprehendere.* 64

VI. *Diſtantiam ab oculo, vel pede menſoris ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum, per duas ſtationes in plano factas, per quadrantem metiri.* 65

VII. *Interuallum inter duo puncta in quolibet plano eleuato, ſiue illud ad Horizontem rectum ſit, ſiue inclinatum, per quadrantem metiri.* 67

VIII. *Longitudinem lineæ rectæ, quando menſor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota, quæ perpendicularis ſit in eo extremo ad planum in quo linea iacet, exiſtens alterum extremum videre poteſt, per Quadrantem comprehendere.* 68

IX. *Longitudinem, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipſa longitudo producta ad pedes menſoris pertingat, ex altitudine aliqua nota per quadrantem dimetiri.* 68

X. *Longitudinem tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumque extremum inſpici poteſt, notam efficere per quadrantem.* 69

XI. *Longitudinem in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas, vel in duabus feneſtris, quarum vna ſit ſub altera ad perpendiculum, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ignota ſit, per quadrantem dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere.* 70

XII. *Longitudinem rectà è directo menſoris poſita, cuius extremum vtrumq; vel alterum non appareat, niſi ad dexteram, vel ſiniſtram recedat menſor, per quadrantem comprehendere.* 71

XIII. *Diſtantiam alicuius ſigni in Horizonte poſiti à ſummitate turris, vel muri alicuius, licet ad ipſum ſignum acceſſus non pateat, per quadrantem colligere.* 72

XIIII. *Altitudinem inacceſſibilem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum lineam rectam accedere poſſimus, aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dexteram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis appareat, per quadrantem explorare.* 72

XV. *Altitudinem inacceſſibilem, quando neque diſtantia à loco menſoris ad eius baſem nota eſt, neque è directo ipſius duæ ſtationes in plano fieri poſſunt, neque denique baſis appareat, per quadrantem notam reddere. Atque hinc obiter ipſam quoque diſtantiam elicere.* 73

XVI. *Altitudinem maiorem ex minori cognita per duas ſtationes in ſummitate, vel in duabus feneſtris factas, etiamſi ſolum maioris altitudinis vertex cernatur, per quadrantem adinuenire. Atque hinc diſtantiam quoque inter altitudines colligere.* 74

XVII. *Altitudinem maiorem ex minori incognita, dummodo baſis maioris cerni poſſit, per quadrantem perſcrutari.* 75

XVIII. *Altitudinem minorem ex maiori cognita, licet baſis minoris non cerni poſſit, ope quadrantis perueſtigare. Atque hinc diſtantiam quoque inter duas altitudines eruere.* 75

XIX. *Altitudinem minorem ex maiori incognita, dummodo baſis minoris videri poſſit, per quadrantem explorare. Atque hinc diſtantiam quoque inter duas altitudines conijcere.* 76

XX. *Portionem altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadrantem cognoſcere.* 76

XXI. *Altitudinem, cuius baſis impoſita ſit alteri altitudini, & vtraque illius extremitas cerni poſſit, etiamſi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiuſdem puncti infimi diſtantia à loco menſoris cognita non ſit, per quadrantem ex valle, aut ex plano Horizontis explorare.* 77

XXII. *Diſtantiam accliuem montis à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſitæ, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum beneficio quadrantis efficere cognitam.* 79

XXIII. *Profunditatem putei, vel ædificii cuiuſcunque ad perpendiculum erecti,*

ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadrantem reperire. 80

XXIV. *Profunditatem vallis, eiuſdemque deſcenſum obliquum, ſi non ſit valdè inæqualis, eiuſque terminus, vel aliquod in ea ſignum conſpici poſſit, per quadrantem ſcrutari.* 82

TERTII LIBRI PROBLEMATA.

Quadrati Geometrici conſtructio. 84

I. *Altitudinem Solis, vel ſtellæ cuiuſuis per quadratum Geometricum obſeruare.* 87

Tabula Gnomonica. 91

II. *Diſtantiam inter te, & ſignum quodcunque in plano Horizontis poſitum, per vadratum perueſtigare.* 96

Eandem beneficio baculi, vel arundinis cognoſcere. 100

III. *Diſtantiam in plano per duas ſtationes in eodem plano factas, per quadratum tiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo aliqua perpendicularis, etiam ſi infitm eius extremum non cernatur.* 100

IIII. *Diſtantiam eandem per duas ſtationes in aliqua altitudine erecta factas, ope drati perſcrutari.* 103

V. *Altitudinem cuiuslibet rei erectæ per eius diſtantiam ab oculo menſoris, benefiuadrati coniicere.* 106

VI. *Altitudinem eandem, etiamſi eius diſtantia ab oculo menſoris neque data neque inuenta, per duas ſtationes in plano factas, auxilio quadrati patefa-* 107

II. *Altitudinem eandem, quando diſtantia ab oculo menſoris neque data eſt, inuenta, neque è directo altitudinis duæ ſtationes fieri poſſunt, per duas ſtationes in aliqua erecta factas, per quadratum indagare.* 111

CHOLIVM. Eandem altitudinem, eiuſque diſtantiam ab oculo menſo-na cum hypotenuſa ab oculo ad faſtigium altitudinis extenſa, ope qua-tabilis per vnicam ſtationem venari, etiamſi ſolum faſtigium rei erectæ tur adeò vt ſcholium hoc omnia præſtet, quæ in problem. 3.4.5.6.& 7. per ſtationes inueſtigauimus. 112

II. *Altitudinem turris, aut montis, ex eius ſummitate per quadratum dimeti-ido in plano ſummitatis Horizonti æquidiſtante duæ ſtationes fieri poſſunt, & aliquod in Horizonte cernitur.* 114

Altitudinem turris, vel montis, ex eius ſummitate per duas ſtationes in haua erecta factas per quadratum inueſtigare, quando ſignum aliquod in Horizon-videri poteſt. 116

LIVM. Eandem altitudinem ex eius vertice per vnicam ſtationem, tantia à turre vel perpendiculo montis ad ſignum in Horizonte po-adratum ſtabile metiri. 117

mitate turris, vel aliqua eius feneſtra, diſtantiam à baſe turris ad ſi-Horizonte per quadratum cognoſcere. 119

alicuius faſtigio, etiamſi altitudo ſit menſoris ſtatura, diſtan-

tiam inter duo ſigna in plano, cui altitudo inſiſtit, ſi ea diſtantia è directo menſoris iaceat, & vtrumque eius extremum cerni poſſit, per quadratum comprehendere. 121

XII. *Longitudinem in Horizonte extenſam, per quadratum metiri, quando menſor in vno eius extremo exiſtens alterum extremum videre non poteſt, propter tumorem aliquem interiectum, neque altitudo in promptu eſt, ſed ſolum ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularem recedere poteſt ad locum, è quo alterum extremum appareat.* 121

XIII. *Longitudinem in Horizonte è directo menſoris iacentem, per quadratum cognoſcere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neque è loco menſoris eam dimetiri, neque vlla adſit altitudo, dummodo ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire poſſit menſor, ex quo vtrumque extremum appareat.* 122

XIV. *Altitudinem montis, vel turris ex eius faſtigio, quando è directo menſoris interuallum aliquod inter duo ſigna, vel etiam inter ſignum quodpiam, ac turrim cognitum eſt, per quadratum coniicere.* 122

XV. *Diſtantiam ab oculo, vel pede menſoris, (vbicunque exiſtat,) ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum, per quadratum exquirere.* 123

XVI. *Interuallum inter duo ſigna, vel puncta in quolibet plano, ſiue recto ad Horizontem, ſiue inclinato, per quadratum metiri.* 126

XVII. *Interuallum tranſuerſum in Horizonte, cuius vtrumque extremum videri poteſt, per quadratum metiri.* 127

XVIII. *Diſtantiam alicuius ſigni in Horizonte poſiti à ſummitate turris, vel muri alicuius, licet ad ipſum ſignum acceſſus non pateat, per quadratum eruere, vbicunque menſor exiſtat.* 128

XIX. *Altitudinem inacceſſibilem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum rectam lineam accedere poſſit menſor aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis cernatur, per quadratum explorare.* 128

XX. *Altitudinem maiorem ex minori cognita, etiamſi ſolum maioris altitudinis vertex cernatur, per quadratum efficere notam.* 129

XXI. *Altitudinem maiorem ex minori incognita, ſi tamen baſis maioris cerni poſſit, per quadratum venari.* 130

XXII. *Altitudinem minorem ex maiori cognita, licet baſis minoris cerni non poſſit, per quadratum ſcrutari.* 130

XXIII. *Altitudinem minorem ex maiori incognita, dummodo baſis minoris appareat, per quadratum elicere.* 130

XXIV. *Portionem altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadratum percipere.*

XXV. *Altitudinem, cuius baſis impoſita ſit monti, vel alteri cuipiam altitudini vtraque illius extremitas cerni poſſit, etiamſi infimum punctum alterius, cui imp tur, lateat, & eiuſdem puncti infimi diſtantia à loco menſoris cognita non ſit, per qu tum ex valle, aut ex plano Horizontis explorare.*

XXVI. *Diſtantiam accliuem montis à loco menſoris vſque ad baſem altitudin ti impoſita, etiam non viſam, vnà cum ipſa altitudine, quando menſor in aſce ſu conſiſtit, propè verum, beneficio quadrati efficere cognitam.*

XXVII. *Profunditatem putei, vel ædificii cuiuſuis ad perpendiculum erecti, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadratum efficere notam.* 134

XXVIII. *Profunditatem vallis, eiuſdemque deſcenſum obliquum, ſi non ſit valdè inæqualis, & eius terminus, vel aliquod in ea ſignum conſpici poſſit, per quadratum cognoſcere.* 135

XXIX. *Diſtantiam inter pedes menſoris, & ſignum aliquod in plano Horizontis, beneficio baculi metiri, quando extremus terminus diſtantiæ videri poteſt,* 137

XXX. *Altitudinem turris, aut alterius rei, per baculum indagare.* 137

XXXI. *Diſtantiam in plano Horizontis inter menſorem, & ſignum quoduis, beneficio Normæ adinuenire.* 138

XXXII. *Altitudinem turris, aut alterius rei, per Normam inueſtigare.* 139

XXXIII. *Diſtantiam in plano Horizontis, quæ non ſit valdè magna, alio modo facillimo dimetiri.* 139

XXXIV. *Altitudinem cuiuſque rei erectæ ex eius vmbra, quam, Sole lucente, proiicit, ſi nota fuerit, per quadratum deprehendere.* 140

XXXV. *Longitudinem vmbræ ab altitudine, Sole lucente, proiectæ, quando altitudo eſt cognita ope quadrati apertam, & manifeſtam facere.* 141

XXXVI. *Diſtantiam in Horizonte inter menſorem, & ſignum aliquod viſum beneficio ſimpliciſſimi cuiuſdam inſtrumenti comperire.* 141

XXXVII. *Diſtantiam inter duo montium, aut turrium cacumina, ope prædicti inſtrumenti coniicere.* 142

XXXVIII. *Longitudinem aſcenſus alicuius montis, ſi eius cacumen ab oculo in radice conſtituto videatur, eiuſdem inſtrumenti beneficio cognoſcere.* 143

XXXIX. *Altitudinem, ad cuius baſem pateat acceſſus, beneficio ſpeculi plani, vna cum diſtantia ſpeculi à cacumine altitudinis deprehendere.* 144

XL. *Altitudinem inacceſſibilem beneficio ſpeculi plani, vnà cum ſpeculi diſtantia tam à baſe, etiam non viſa, quam à cacumine altitudinis, cognoſcere.* 145

XLI. *Altitudinem monti impoſitam, ſi modo altitudinis baſis poſſit conſpici; vel portionem ſuperiorem alicuius turris, beneficio ſpeculi plani efficere notam.* 147

XLII. *Situm cuiuſlibet campi, aut atrii, vel templi, vel etiam vrbis, aut regionis cuiuſuis in plano deſcribere, ſi è duobus locis intra ipſum ſitum aſſumptis baculi ex omnibus campi angulis erecti, vel certè ipſi anguli in ædificio, aut vrbe, vel loca regionis videri poſſint: ſimulque latitudines laterum campi, vel ædificii, nec non diſtantias inter angulos, & vtrumuis locorum aſſumptorum, in data menſura cognoſcere. Quod ſi talia duo loca intra ſitum eligi nequeant, idem efficere, dummodo ſitum poſſimus circumire.* 147

XLIII. *Longitudinem trabis ad Horizontem inclinatæ, cuius portio ſuperior tantum conſpiciatur, vna cum angulo inclinationis, diſtantia baſis à menſore, & altitudine faſtigii ſupra Horizontem, per quadratum metiri.* 151

XLIV. *Viſis duarum turrium ſummitatibus, etiamſi baſes propter ædificia interiecta occultentur, diſtantiam tam inter earum baſes, quam inter earundem faſtigia, vnà cum ipſarum altitudinibus, ac diſtantiis à menſore coniicere.* 151

SCHOLIVM. Vnica regula ad omnes rectas dimetiendas quando earum extrema videntur. 152

XLV. *Spatium terræ inæquale pro ducendis aquis librare: aut etiam, ſi lubet, Horizonti æquidiſtans efficere.* 155

QVARTI LIBRI CAPITA.

I. *De area Rectangulorum.* 157
II. *De area Triangulorum.* 158
III. *De area Quadrilaterorum non rectangulorum.* 169
IIII. *De area multilaterarum figurarum irregularium.* 171
V. *De area multilaterarum figurarum regularium.* 175
VI. *De dimenſione circuli ex Archimede.* 181

PROPOSITIO I. Area cuiuslibet circuli æqualis eſt triangulo, cuius vnum quidem latus circa angulum rectum ſemidiametrum circuli, alterum verò peripheriæ eiuſdem circuli æquale eſt. 182

IOSEPHI Scaligeri error hoc in loco. 184

PROPOSITIO II. Cuiuslibet circuli peripheria tripla eſt diametri, & adhuc ſuperat parte, quæ quidem minor eſt decem ſeptuageſimis, hoc eſt, ſeptima parte diametri, maior verò decem ſeptuageſimis primis. 185

COROLLARIVM. Diameter per $3\frac{1}{7}$. multiplicata gignit numerum maiorem circumferentia: multiplicata verò per $3\frac{10}{71}$. facit numerum circumferentia minorem. E contrario circumferentia diuiſa per $3\frac{1}{7}$. procreat numerum minorem diametro: diuiſa verò per $3\frac{10}{71}$. producit numerum diametro maiorem. 191

PROPOSITIO III. Circulus quilibet ad quadratum diametri proportionem habet, quam 11. ad 14. proximè. 191

VII. *De area circuli, inuentioneque circumferentiæ ex diametro & diametri ex circumferentia.* 192

PROPOSITIO I. Circulorum diametri inter ſe ſunt, vt circumferentiæ. 194

PROPOSITIO II. Proportio quadrati ex diametro cuiuslibet circuli deſcripti ad circuli aream maior eſt, quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223. 195

PROPOSITIO III. Proportio quadrati à circumferentia circuli cuiuſuis deſcripti ad circuli aream maior eſt, quam 892. ad 71. minor autem, quam 88. ad 7. 196

VIII. *De area ſegmentorum circuli.* 199

I. Data circuli area, circumferentiam, ac diametrum cognoſcere. 201

II. Dato arcu cuiuſuis circuli, diametrū circuli in numeris inueſtigare. 201

III. Datis diametris duorum circulorum, vel circumferentiis: Aut duobus lateribus homologis duarum figurarum ſimilium, ſimiliterque poſitarum; quam proportionem circuli, vel figuræ inter ſe habeant, cognoſcere. 201

IIII. Datis pluribus circulis, quorum diametri, vel circumferentiæ cognitæ ſint: Item pluribus figuris ſimilibus, ſimiliterque poſitis, quarum latera homologa ſint nota; inuenire diametrum, vel circumferentiam, cuius circulus omnibus circulis propoſitis æqualis ſit: Item latus reperire, cuius figura ſimilis, ſimiliterque poſita, æqualis ſit omnibus propoſitis figuris. 202

V. Aream

V. *Aream propoſitæ Ellipſis indagare.* 202
VI. *Aream propoſitæ Parabolæ inueſtigare.* 203

QVINTI LIBRI CAPITA.

I. *De area Parallelepipedorum, Priſmatum, & Cylindrorum.* 204
II. *De area Pyramidum, & Conorum.* 206
III. *De Area fruſti Pyramidis, & Coni.* 207
SCHOLIVM. De area variorum ſolidorum. 209
IV. *De Area quinque corporum Regularium.* 210
V. *De Area ſphæræ, inuentioneque ſuperficiei conuexæ eiuſdem ſphæræ.* 218
PROPOSITIO I. Quam proportionem habent duæ quælibet partes aliquotæ magnitudinis cuiuſcunque, eandem habent duæ ſimiles partes alterius cuiuſuis magnitudinis. 218
PROPOSITIO II. Rectangulum ſub diametro, & circumferentia maximi circuli in ſphæra comprehenſum, quadruplum eſt circuli maximi, & ſuperficiei conuexæ eiuſdem ſphæræ æquale. 219
PROPOSITIO III. Eadem eſt proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi in ſphæra ad ſuperficiem ſphæræ, quæ circumferentiæ maximi circuli ad diametrum. Item eadem eſt proportio quadrati diametri maximi circuli in ſphæra ad ſuperficiem ſphæræ, quæ diametri ad circumferentiam eiuſdem circuli maximi. 220
PROPOSITIO IV. Quadratum circumferentiæ circuli maximi in ſphæra ad ſuperficiem ſphæræ conuexam, maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem vero, quam 22. ad 7. 221
PROPOSITIO V. Quadratum diametri circuli in ſphæra maximi ad ſuperficiem ſphæræ conuexam, maiorem proportionem habet, quam 7. ad 22. minorem vero, quam 71. ad 223. 221
PROPOSITIO VI. Proportio cubi ex circumferentia maximi in ſphæra circuli deſcripti ad ſphæram, maior eſt, quam 2 9 8 3 7 4. ad 5041. minor autem, quam 2904. ad 49. 221
PROPOSITIO VII. Cubus diametri ſphæræ ad ſphæram, maiorem proportionem habet, quam 21. ad 11. minorem verò, quam 426. ad 223. 222
VI. *De Area ſegmentorum ſphæræ.* 229
VII. *De Area ſphæroidis, eiuſdemque portionum.* 232
VIII. *De Area Conoidis Parabolici.* 232
IX. *De Area Conoidis Hyperbolici.* 233
X. *De Area Doliorum.* 233
XI. *De Area corporum omnino regularium.* 234
XII. *De ſuperficie conuexa coni, & cylindri recti.* 235

SEXTI LIBRI PROPOSITIONES.

I. *Si magnitudo in quotuis partes ſecetur vtcunque, & alia quæpiam magnitudo in totidem partes ordine illis proportionales; habebunt quotlibet partes prioris magnitudinis ſimul ad reliquas omnes partes ſimul, eandem proportionem, quam totidem partes poſterioris magnitudinis ſimul, ad reliquas omnes partes ſimul. Et ſi qualibet pars prioris magnitudinis ſecetur in duas partes vtcunque, ſecetur autem & pars poſterioris magnitudinis illi parti reſpondens in alias duas partes duabus illis proportionales; erunt quoque ibidem tota magnitudines ſecta proportionaliter.* 237

II. *Dato rectilineo, ſuper datam rectam inter alias duas interceptam, conſtituere quadrilaterum æquale, cuius latus oppoſitum inter duas eaſdem rectas interceptum, data recta ſit parallelum. Et datis duobus rectilineis inæqualibus quibuſcunque, ex maiore per lineam vni lateri parallelam detrahere rectilineum minori æquale, quando id fieri poteſt. quod ex ipſa problematis ſolutione cognoſcetur.* 239

III. *Diuiſo rectilineo quolibet in triangula ex vno aliquo puncto; rectas lineas ipſis triangulis ordine proportionales inuenire.* 246

IV. *Datum rectilineum per rectam à quouis angulo, vel puncto in aliquo latere ductam in proportionem datam diuidere: ita vt antecedens proportionis in quam malueris partem vergat.* 248

SCHOLIVM. Datum rectilineum ex dato angulo, vel puncto in latere, in quotuis partes æquales ſecare. 252

V. *Datum rectilineum per rectam lineam datæ rectæ parallelam, in datam proportionem diuidere: ita vt antecedens proportionis in quam elegeris partem vergat.* 253

SCHOLIVM. Datum rectilineum in quotuis partes æquales per lineas cuilibet rectæ parallelas diſtribuere. 2(0

VI. *Si duo triangula æqualia habeant vnum latus commune, & in diuerſas partes vergant: Recta oppoſitos angulos connectens à latere illo communi bifariam ſecatur.* 260

VII. *Si in triangulo baſi parallela ducatur, & extrema parallelarum rectis iungantur ſeſe interſecantibus: Habebit vtriuſuis harum rectarum ſegmentum ab angulo incipiens ad reliquum in latere terminatum, eandem proportionem, quam latus ab illa recta diuiſum ad partem eius ſuperiorem. Recta autem ex tertio angulo per interſectionem dictarum rectarum extenſa ſecabit vtramque parallelam bifariam.* 261

VIII. *Si in triangulo à duobus angulis duæ rectæ ducantur ad media puncta oppoſitorum laterum: Recta ex angulo reliquo per interſectionem earum deducta ſecat quoque reliquum latus bifariam. Cuiuslibet autem illarum trium linearum ſegmentum prope angulum ad reliquum ſegmentum duplam habet proportionem. Triangulum denique per rectas ab interſectione ad angulos ductas in tria triangula æqualia diuiditur.* 261

IX. *Si in triangulo ducatur recta vtcunque duo latera ſecans: Erit totum triangulum ad abſciſſum triangulum, vt rectangulum ſub duobus lateribus ſectis totius trianguli comprehenſum, ad rectangulum ſub duobus lateribus trianguli abſciſſi, quæ priorum ſegmenta ſunt, comprehenſum.* 262

X. Da-

X. *Datum triangulum ex dato puncto in eius latere in quotlibet partes æquales diuidere.* 262

XI. *Datum triangulum per lineas vni lateri parallelas in quotlibet æquales partes diuidere.* 263

XII. *Datum triangulum per rectam ex puncto extra triangulum dato ductam in duas partes æquales diuidere.* 264

XIII. *Datum parallelogrammum in quotcunque partes æquales per lineas duobus lateribus oppoſitis æquidiſtantes diuidere.* 265

XIV. *Datum parallelogrammum per rectam ex puncto ſiue extra, ſiue intra ipſum, ſiue in aliquo latere dato ductam bifariam diuidere.* 265

XV. *Inter duas rectas, duas medias proportionales, prope verum, inuenire: ex Herone & Apollonio Pergæo: ex Philone Byſantio, ac Philopono: ex Diocle: ac poſtremo ex Nicomede per lineam conchoideos.* 266. vſque ad 272.

XVI. *Datam figuram planam, vel circulum augere, vel minuere in data proportione.* 272

XVII. *Datam figuram ſolidam qualemcunque ex ijs, de quibus Eucl. in libris Stereometriæ agit, augere, vel minuere in proportione data.* 273

XVIII. *Inter duos numeros datos tum vnum, tum duos medios proportionales reperire.* 274

LEMMA. Si ſint quatuor lineæ continuè proportionales: parallelepipedum ſub quadrato alterutrius extremarum, & altera extrema comprehenſum, æquale eſt cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremæ propinquior eſt. 275

XIX. *Radicem cuiuslibet generis extrahere.* 276

EXTRACTIO radicis quadratæ. 279

EXTRACTIO radicis cubicæ. 280

EXTRACTIO radicis ſurdeſolidæ. 281

REGVLA propria extractionis radicis cubicæ. 283

XX. *In numeris non quadratis, non cubis, non zenſizenſis, non ſurdeſolidis, &c. radicem veræ propinquam inuenire.* 284

XXI. *Radicem cuiuſque generis ex data minutia extrahere.* 286

XXII. *Radicem quadratam, & cubicam in numeris non quadratis, & non cubicis per lineas Geometricè inuenire.* 289

SEPTIMI LIBRI Propoſitiones.

I. *Area cuiuslibet trianguli æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub perpendiculari à vertice ad baſem protracta, & dimidia parte baſis. Item rectangulo comprehenſo ſub ſemiſſe perpendicularis, & tota baſe. Vel denique ſemiſſi rectanguli ſub tota perpendiculari, & tota baſe comprehenſi.* 292

II. *Area cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt rectangulo contento ſub perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ducta, & ſub dimidiato ambitu eiuſdem figuræ.* 293

III. *Area cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum æquale eſt perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ducta, alterum verò æquale ambitui eiuſdem figuræ.* 294

IV. *Area cuiuslibet circuli æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & dimidiata circumferentia circuli.* 294

V. *In omni triangulo rectangulo, ſi ab vno acutorum angulorum vtcumque ad latus oppoſitum linea recta ducatur, erit maior proportio huius lateris ad eius ſegmentum, quod prope angulum rectum exiſtit, quam anguli acuti prædicti ad eius partem dicto ſegmento lateris oppoſitam.* 295

VI. *Iſoperimetrarum figurarum regularium maior eſt illa, quæ plures continet angulos, plurave latera.* 296

VII. *Propoſito triangulo, cuius duo latera ſint inæqualia, ſupra reliquum latus triangulum priori Iſoperimetrum, ac duo habens latera æqualia, deſcribere.* 297

VIII. *Duorum triangulorum Iſoperimetrorum eandem habentium baſem, quorum vnius duo latera ſint æqualia, alterius verò inæqualia; maius erit illud, cuius duo latera æqualia ſunt.* 297

IX. *In ſimilibus triangulis rectangulis quadratum à lateribus, quæ angulis rectis ſubtenduntur, tanquam ab vna linea, deſcriptum, æquale eſt quadratis duobus ſimul, quæ à reliquis homologis lateribus, tanquam ex duabus lineis, ita vt qualibet duo latera homologa conficiant vnam lineam rectam, deſcribuntur.* 298

X. *Datis duobus triangulis Iſoſcelibus, quorum baſes inæquales exiſtant, duoque latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius; ſuper eiſdem baſibus duo alia triangula Iſoſcelia inter ſe quidem ſimilia, prioribus verò ſimul ſumptis Iſoperimetra ſimul ſumpta, conſtituere.* 299

XI. *Duo triangula Iſoſcelia ſimilia ſuper inæqualibus baſibus conſtituta, vtraque ſimul maiora ſunt duobus triangulis Iſoſcelibus, vtriſque ſimul, quæ habeant eaſdem baſes cum prioribus, ſintque diſſimilia quidem inter ſe, at Iſoperimetra prioribus duobus, necnon quatuor latera inter ſe habeant æqualia.* 300

XII. *Iſoperimetrarum figurarum latera numero æqualia habentium maxima & æquilatera eſt, & æquiangula.* 303

XIII. *Circulus omnibus figuris rectilineis regularibus ſibi Iſoperimetris maior eſt.* 306

COROLLARIVM. Circulus abſolute omnium figurarum rectilinearum ſibi Iſoperimetrarum maximus eſt. 306

XIV. *Area cuiuslibet pyramidis æqualis eſt ſolido rectangulo contento ſub perpendiculari à vertice ad baſem protracta, & tertia parte baſis.* 307

XV. *Area cuiuslibet corporis planis ſuperficiebus contenti, & circa ſphæram aliquã circumſcriptibilis, hoc eſt, à cuius puncto aliquo medio omnes perpendiculares ad eius baſes productæ ſunt æquales, æqualis eſt ſolido rectangulo contento ſub vna perpendicularium, & tertia parte ambitus corporis.* 307

XVI. *Area cuiuslibet ſphæræ æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro ſphæræ, & tertia parte ambitus ſphæræ.* 308

XVII. *Sphæra omnibus corporibus ſibi Iſoperimetris, quæ planis ſuperficiebus contineantur, circaque alias ſphæras circumſcriptibilia ſint, hoc eſt, quorum omnes perpendiculares*

culares ad baſes productæ ab aliquo puncto medio ſint æquales, maior eſt. 310

XVIII. *Sphæra omnibus corporibus ſibi Iſoperimetris, & circa alias ſphæras circumſcriptibilibus, quæ ſuperficiebus conicis continentur, ita vt latera omnia conica ſint æqualia, maior eſt.* 311

XIX. *Sphæra quolibet cono, & cylindro ſibi Iſoperimetro maior eſt.* 313

XX. *Dato ſemicirculo, vel quadranti, vel octauæ parti circuli, aut decimæ ſextæ, &c. rectangulum conſtituere Iſoperimetrum, & æquale, ſi linea recta peripheriæ detur æqualis.* 313

XXI. *Dato triangulo cuicunque parallelogrammum æquale, atque Iſoperimetrum conſtituere.* 314

XXII. *Dato rectilineo parallelogrammum rectangulum æquale, & Iſoperimetrum conſtituere. Oportet autem latus quadrati rectilineo æqualis maius non eſſe ſemiſſe dimidiati ambitus dati rectilinei.* 316

Appendix De circulo per lineas quadrando. 317

Quadratura Arabum, quam Ioſephus Scaliger in ſuis cyclometricis approbat, Alberti Dureri, & quæ Campano perperam aſcribitur, falſa eſt. 318

Quadratura Hipocratis Chij per lunulas, acuta quidē, ſed falſa quoque eſt. 318

I. QVADRATRICEM lineam deſcribere. 320

COROLLARIVM. Si ex centro Quadratricis recta ducatur ſecans quadrantem, & quadratricem: ita ſe habebit arcus quadrantis ad eius arcum abſciſſum, vt ſemidiameter ad perpendicularem ex puncto quadratricis demiſſam. 323

II. Si quadrantis, & quadratricis idem centrum ſit: erunt arcus quadrantis, ſemidiameter, & baſis quadratricis continuè proportionales. 324

COROLLARIVM I. Rectam reperire arcui quadrātis, ac proinde & ſemicircumferentiæ, immo & toti circumferentiæ æqualem. 325

COROLLARIVM II. Si baſis Quadratricis ſtatuatur ſemidiameter alicuius circuli: erit eius latus quartæ parti circumferentiæ illius circuli æquale, &c. 326

COROLLARIVM III. Si duæ lineæ eandem proportionem habeant, quam latus Quadratricis, eiuſque baſis, minor autem fiat ſemidiameter alicuius circuli: erit maior quartæ parti circumferentiæ illius circuli æqualis, &c. 326

III. Dato circulo quadratum æquale conſtituere. 327

FACILIS inuentio rectæ lineæ, quæ quartæ parti circumferentiæ dati circuli ſit æqualis. 327

FACILIS inuentio quadrati dato circulo æqualis. 328

IV. Dato quadrato circulum æqualem deſcribere. 329

COROLLARIVM. Circulum cuicunque figuræ rectilineæ æqualem: Et contra, cuicunque circulo figuram rectilineam qualemcunq; æqualem conſtituere. 329

V. Datæ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem. 329

OCTAVI LIBRI Propoſitiones.

I. *Figura regularis circulo circumſcripta maiorem ambitum habet, quam circulus.* 330

LEMMA I. Si fuerint quatuor quantitates, & minor ſit exceſſus inter primam & ſecundam, quam inter tertiam & quartam, ſitque prima non minor, quam tertia, maior verò, quam ſecunda, itē tertia maior, quam quarta: Erit minor proportio primæ quantitatis ad ſecundam, quam tertiæ ad quartam. 331

LEMMA II. Si circuli arcum duæ rectæ tangant, in vno puncto coeuntes, & in eodem arcu aptentur quotlibet rectæ æquales diuidentes ipſum in partes totidem æquales: Erunt duæ illæ tangentes omnibus hiſce chordis ſimul maiores. 332

LEMMA III. Si circuli arcum tres rectæ tangant, in duobus punctis coeuntes, ita vt contactus punctum medium diuidat arcum bifariam, in eodem autem arcu accommodentur quotlibet rectæ numero pares, & inter ſe æquales; Erunt tres illæ tangentes omnibus his ſimul ſumptis maiores. 332

CARDANI demonſtratio figuræ regularis circulo circumſcriptæ ambitum maiorem eſſe, quam circuli ambitum. 333

II. *Circulorum diametri inter ſe ſunt, vt circumferentiæ Ex Pappo.* 334

III. *Arcus cuiuſuis circuli ad arcum ſimilem alterius circuli eandem habet proportionem, quam chorda ad chordam. Et contra, arcus eandem habentes proportionem, quam chordæ, ſimiles ſunt.* 335

IV. *Dato quadrilatero æquale parallelogrammum in dato angulo, facilius, quam per propoſ. 45. lib. 1. Eucl. conſtituere.* 336

V. *Dato Rectangulo ſupra datam rectam æquale rectangulum, facilius, quam per propoſ. 45. lib. 1. Euclid. conſtituere.* 339

VI. *Dato rectilineo æquale rectangulum, facilius, quam per propoſ. 45. lib. 1. Euclid. conſtituere.* 339

VII. *Si ex duobus punctis ad vnum punctum cuiuſuis lineæ rectæ, quæ communis ſectio ſit plani per duo illa puncta ducti cum alio quopiam plano, duæ rectæ ducantur facientes cum illa duos angulos æquales: Erunt duæ hæ rectæ breuiores quibuſcunque alijs duabus rectis, quæ ex ijſdem duobus punctis ad aliud punctum eiuſdem lineæ rectæ ducuntur.* 340

SCHO-

SCHOLIVM. Angulus incidentię apud Perſpectiuos angulo reflexionis æqualis eſt. 340

VIII. *Si quis numerum mente conceperit, quot ei vnitates poſt tres operationes imperatas reliqua ſint, coniȷcere.* 341

IX. *Datum numerum quadratum in quotuis quadratos numeros partiri.* 342

X. *Propoſitis duabus minutijs inæqualibus: minutia cuius numerator ex illorum numeratoribus, denominator autem ex denominatoribus conflatur, maior quidem eſt minore, minor vero maiore.* 343

XI. *Si duo numeri inter ſe primi non ſint ambo quadrati, aut cubi: Neque eorum æquè multiplices vlli, quadrati erunt, aut cubi. Et ſi eorum æque multiplices aliqui ſint ambo quadrati, aut cubi: etiam ipſi erunt quadrati, aut cubi.* 343

XII. *In omni quadrilatera figura rectilinea, tria latera, vt libet, aſſumpta, maiora ſunt reliquo latere.* 344

XIII. *Datis tribus punctis, per quæ circulus deſcribendus ſit; inuenire alia puncta, per quæ idem circulus tranſire debeat.* 344

XIV. *Dato exceſſu diametri Quadrati ſupra latus: Item dato exceſſu diametri Rhombi ſupra latus, vel lateris ſupra diametrum, vnà cum vno Rhombi angulo: Dato præterea exceſſu diametri Rectanguli ſupra vtrumlibet laterum inæqualium, vnà cum angulo, quem diameter cum eo latere facit, vel vnà cum proportione eorundem inæqualium laterum: Dato denique exceſſu diametri Rhomboidis ſupra vtrumuis laterum inæqualium, vel vtriuſuis inæqualium laterum ſupra diametrum, vnà cum angulo Rhomboidis, & inſuper cum angulo, quem diameter cum eo latere facit, vel inſuper cum proportione duorum laterum inæqualium: Quadratum ipſum, Rhombum, Rectangulum, & Rhomboides conſtituere.* 345

XV. *In rectangulo parallelogrammo ſumptis exceſſibus, quibus diameter duo latera ſuperat: Rectangulum ſub differentia exceſſuum, & minore exceſſu bis ſumptum, vnà cum quadrato minoris exceſſus bis ſumpto, æquale eſt quadrato rectæ, qua minus latus minorem exceſſum ſuperat.* 348. & 349

XVI. *Datis exceſſibus, quibus diameter Rectanguli vtrumque latus ſuperat: vtrumque latus, & diametrum inuenire.* 349

XVII. *Dato exceſſu diametri Rectanguli ſupra maius latus, & exceſſu maioris lateris ſupra minus: vtrumque latus, ac diametrum inuenire.* 351

XVIII. *Secta linea recta vtcunque, adiungere ei verſus vtramuis partem lineam rectam, ita vt quadratum totius rectæ compoſitæ æquale ſit quadrato rectæ adiunctæ, vnà cum quadrato rectæ, quæ ex adiuncta, & proximo ſegmento prioris lineæ conflatur.* 351

XIX. *Datis duabus rectis inæqualibus, quarum maior diametrum quadrati ex minore deſcripti non ſuperat: Maiorem ita ſecare in duas partes inæquales, vt earum quadrata ſimul ſumpta quadrato minoris lineæ ſint æqualia.* 352

XX. *Data chorda alicuius arcus, vnà cum perpendiculari, quæ ex medio puncto chordæ ad arcum vſque educitur: Quot gradus, vel palmos tam arcus, quam ſemidiameter circuli complectitur, inuenire.* 353

XXI. *In omni triangulo quadratum maximi lateris minus eſt, quam duplum ſummæ quadratorum ex reliquis duobus lateribus deſcriptorum.* 353

XXII. *Datis tribus rectis vtcunque in plano non parallelis, niſi quando extremæ à media æqualiter diſtant, rectam lineam ducere, & quidem per datum punctum in media, ſi omnes tres in vno puncto conueniant, ita vt eius ſegmenta inter mediam, & extremas ſint inter ſe æqualia, vel datam habeant proportionem.* 354

XXIII. *Cuiuslibet lineæ, quamuis minimæ, exhibere multiplicem quamcunque, etiamſi circino non accipiatur.* 355

XXIV. *Ex qualibet lineola quamuis minima, auferre partem, vel partes imperatas.* 355

XXV. *Angulum datum rectilineum in tres æquales partes partiri.* 356

XXVI. *Si per idem punctum diametri in rectangulo duæ lineæ ducantur lateribus parallelæ: Erit rectangulum ſub ſegmentis diametri comprehenſum æquale duobus rectangulis ſub ſegmentis duorum laterum comprehenſis.* 357

COROLLARIVM. In quadrato rectangulum ſub ſegmentis diametri comprehenſum, æquale eſt duobus complementis. 357

XXVII. *Dato centro Ellipſis in linea axis in infinitum producta vnà cum duobus punctis ad eaſdem partes axis, vel centri, per quæ tranſire dicatur Ellipſis: Vtrumque axis vtriuſque extremum inuenire.* 359

XXVIII. *Si in circuli diametro producta punctum ſumatur, ab eoque recta circulum tangens ducatur, à puncto autem contactus chorda ducatur ad diametrum perpendicularis: Recta ex eodem contactus puncto ad vtrumlibet extremum diametri ducta diuidet angulum à tangente, & prædicta perpendiculari comprehenſum bifariam. Item ſi ab eodem puncto in diametro producta aſſumpto recta ducatur circulum ſecans, & ab alterutro ſectionis puncto ad interſectionem diametri cum prædicta chorda perpendiculari recta iungatur: Recta ex eodem ſectionis puncto ad vtrumlibet diametri extremum ducta ſecabit

quoque

quoque angulum à linea ſecante, & illa alia, quæ per interſectionem diametri cum prædicta chorda perpendiculari ducitur, biſariam. 258

XXIX. *Deſcriptionem pentagoni æquilateri, & æquianguli ſupra datam rectam ab Alberto Durero traditam, & quam omnes ferè architecti, atque artifices approbant, falſam eſſe, demonſtrare.* 360

SCHOLIVM. Deſcriptionem eiuſdem pentagoni ab aliis nonnullis traditam, falſam quoque eſſe, demonſtrare. 362

XXX. *Inuentionem lateris heptagoni in dato circulo non rectè à quibuſdam tradi, demonſtrare.* 362

XXXI. *Octogonum æquilaterum, & æquiangulum circulo inſcriptum, medio loco proportionale eſt inter quadratum eidem circulo circumſcriptum, & quadratum inſcriptum.* 364

XXXII. *Si ex diametro quadrati detrahatur ipſius latus: Reliqua linea erit latus alterius quadrati, cuius diameter eſt linea, quæ relinquitur ſi latus inuentum bis ex diametro prioris quadrati auferatur: vel ſi idem latus inuentum ex prioris quadrati latere tollatur.* 365

XXXIII. *Octogonum æquilaterum, & æquiangulum ad datam altitudinem, latitudinemue conſtituere.* 365

XXXIV. *Ambitum terræ ex edito aliquo monte metiri.* 366

XXXV. *Priſmati cuicunque cylindrum æqualem, & Pyramidi conum æqualem: Ac viciſſim cylindro Priſma æquale, & cono æqualem Pyramidem conſtituere.* 367

XXXVI. *Dato cylindro, aut Priſmati æqualem conum, vel Pyramidem ſub eadem altitudine: Et viciſſim dato cono, vel pyramidi æqualem cylindrum, aut Priſma eiuſdem altitudinis conſtituere.* 368

COROLLARIVM I. Tam Cylindrum, quam Priſma, mutare in Pyramidem, aut conum: Et Pyramidem tam in cylindrum, quam in priſma æquale conuertere. 368

COROLLARIVM II. Cylindrum, Priſma, Conum, ac Pyramidem commutare in parallelepipedum rectangulum æquale, cuius baſis ſit quadrata. 369

XXXVII. *Datum cylindrum, vel Priſma: Similiter datum conum, vel pyramidem cuiuſcunque altitudinis, in æqualem ſub data qualibet alia altitudine, & ſupra baſem quotcunque angulorum reuocare.* 369

XXXVIII. *Dato parallelepipedo rectangulo cubum æqualem deſcribere.* 369

COROLLARIVM. Cylindro, priſmati, cono, ac pyramidi cubum æqualem exhibere. 369

XXXIX. *Dato cubo æquale parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel ſupra datam baſem conſtruere.* 370

COROLLARIVM. Cylindrum, priſma, conum, ac pyramidem in parallelepipedum rectangulum æquale datæ altitudinis, vel baſis commutare. 370

XL. *Sphæra data cubum æqualem; Et dato cubo æqualem ſphæram conſtituere.* 370

COROLLARIVM I. Sphæræ datæ ſolidum rectangulum ſupra baſem quotlibet angulorum æquale, & pyramidem cuiuſcunque baſis æqualem, vel etiam conum æqualem conſtruere. Et viciſsim cuilibet priſmati ſphæram æqualem exhibere. 371

COROLLARIVM II. Sphæram cuilibet corpori regulari conſtituere æqualem. 371

XLI. *Duobus, aut pluribus cubis vnum cubum æqualem efficere.* 372

SCHOLIVM. Quotlibet figuris ſolidis non cubis cubum æqualem conſtruere. 372

XLII. *Dato cubo corpus regulare, quod ex quinque elegeris, æqualem conſtruere.* 372

XLIII. *Ex maiori cubo detrahere minorem, reſiduoque cubum æquale exhibere.* 373

SCHOLIVM. Ex quauis figura ſolida maiori minorem quamcunque auferre, reſiduoque cubum æqualem conſtituere. 373

XLIV. *Datis duabus, aut pluribus ſphæris ſphæram vnam æqualem conſtituere.* 373

XLV. *Ex maiori ſphæra minorem ſphæram detrahere, reſiduoque ſphæram æqualem exhibere.* 373

XLVI. *Datum cubum, aut parallelepipedum, ſecundum datam proportionem ſecare.* 373

SCHOLIVM. Priſma, vel cylindrum, ſecundùm datam proportionem diuidere. 373

XLVI. *Figuram Ellipſi ſimilem, quam ouatam dicunt, circino deſcribere: Eiuſque aream, ſi beneficio trianguli æquilateri deſcripta eſt, explorare.* 374

SCHO-

SCHOLIVM. Tabula quadratorum, & cuborum vſque ad radicem 1000. 378

Differentiæ quadratorum, & cuborum. 387

Dato cubo, eiuſque radice, qui numeri impares illum componant, inquirere. 390

Vſus tabulæ quadratorum, & cuborum in extrahendis radicibus quadratis, atque cubis. 391

FINIS.

PRÆFATIO.

QVANDOQVIDEM Mathematicarum diſciplinarum ſtadium ſcribendo ingreſſi, nonnullam eius partem, fauente Deo, percurrimus: Geometriæ practicæ tractatio omittenda non fuit, vt niſi metam tangere licuerit, ab illa certè quam minimè diſtemus. Ætatem ſenectute grauem allicit operis iucunditas, laborem leuat varietas, amicorum preces tantum non cogunt, quò mea ferebar ſponte, ſumma cum feſtinatione properare. Et verò, cum perpetua multorum annorum experientia compererim, admodum paucos eſſe, qui non in Mathematicis exerceantur eo conſilio, vt quæ didicerint, ad aliquem vſum trahant: in hoc quicquid eſt laboris veniebam alacer, vt qui fructus è Mathematicis percipi poſſint ad humanæ vitæ commoda, non inani venditatione, ſed re ipſa conſtaret. Etenim dum certa ratio traditur, qua camporum longitudines, altitudines montium, vallium depreſſiones, locorum omnium inæqualitates inter ſe, & interualla deprehendere metiendo debeamus: cuilibet liquet, vt arbitror, quantum commodi, vtilitatiſque ſubſtructioni ædificiorum, cultui agrorum, armorum tractationi, contemplationi ſiderum, aliiſque artibus, & diſciplinis ex horum cognitione manare poſſit. Hæc enim vna Mathematicarum rerum ſcientiæ pars, ſicut ab artificibus ob ſui neceſſitatem auidè ſemper eſt arrepta: ita ob inſignes vtilitates, quas in re tota militari ſuppeditat, in maximorum Principum, Regumque aulis omni tempeſtate verſata eſt. Quamobrem & multos, & eruditos viros habuit, qui partes illius omnes accurata, & diligenti ſcriptione perſecuti ſunt: Inter quos, vt Leonhardus Piſanus, Frater Lucas Pacciolus, Nicolaus Tartalea, Orontius, Cardanus, aliique præcipuas obtinuerunt: ita eximia in cæteris laude floruerunt. Primas tamē adiudicarim Io. Antonio Magino præſtanti Mathematico; qui tametſi tantū linearum dimenſiones docuit, ea tamen copia, doctrina, perſpicacitate cuncta tradidit, vt locum non modo iis, qui ante ſcripſerunt, ſed ſpem poſteris æqualis gloriæ, ne dum maioris, ademiſſe videatur. Verum

rum quoniam & hic de vnica tantum parte fuit ſollicitus: & alii, quamuis aggreſſi omnia, multa tamen inter ſcribendum prætericrunt; decreui, ſi qua poſſem, perficere: vt, quicquid vtiliter in Geometria practica ab aliis traditum, à me etiam inuentum eſt, vnius operis gyro clauderetur. Quod opus, cum ſpecies tres quantitatis continuæ ſint, in tria membra, parteſq; præcipuas ſecuimus: In prima rectas lineas, in altera ſuperficies, corpora metientes in poſtrema: cui annectuntur alia, quæ non tam ad quantitatis dimenſionem, quam ad alias Geometriæ praxes, ac demonſtrationes pertinent, à noſtro inſtituto non aliena.

VNIVERSAM autem tractationem in octo libros partiti ſumus.

PRIMVS propoſitiones tres omnino neceſſarias, & perquam vtiles ad omnium magnitudinum dimenſionem accuratè perficiendam continet.

IN Secundo dimenſio linearum rectárum per Quadrantem Aſtronomicum tam pendulum, quàm ſtabilem abſoluitur.

TERTIVS de earundem rectarum linearum dimenſione per Quadratum Geometricum tum pendulum, tum ſtabile, etiam per vnicam ſtationem, agit. Vbi etiam, qua ratione ſine huiuſmodi inſtrumento earundem rectarum linearum Dimenſiones nonnulla fieri poſſint, traditur.

QVARTVS ſuperficierum areas inquirit:

QVINTVS ſolidas magnitudines metitur.

ATQVE hiſce quinque libris omnes tres partes Geometriæ practicæ à nobis propoſitæ explicantur.

IN Sexto deinde libro de Geodæſia, ideſt, de ſuperficierum rectilinearum cuiuſque generis Diuiſione tam per rectas ex certo aliquo puncto ductas, quam per lineas parallelas, diſſeritur. Vbi nonnulla etiam alia problemata ad idem argumentum ſpectantia ſoluuntur. Item qua ratione figuræ tam planæ, quam ſolidæ, vnà cum circulo ac ſphæra in data proportione augendæ ſint, minuendæúe. In cuius rei gratiam mòdi aliquot proponuntur inueniendarum duarum mediarum proportionalium inter duas rectas datas. Denique ars facilis, & expedita pro extrahendis radicibus cuiuſque generis præſcribitur.

SEPTIMVS de figuris Iſopemetris diſputat.

IN Octauo denique varia problemata, ac theoremata Geometrica pertractantur.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ:

LIBER PRIMVS.

Tria capita ad dimenſionem linearum ſumme neceſſaria complectens.

VT magnitudinum dimenſio omnibus ſuis numeris abſoluta, perfectaque reddatur, tria primo hoc libro diligenter explicanda prius erunt. Primum conſtruenda eſt norma quædam variarum partium, quam non incongruè Inſtrumentum partium vocare poſſumus; quòd in eo variæ partes & ad lineas rectas, & ad circulos diuidendos, tum etiam ad alias operationes ſiue Geometricas, ſiue Aſtronomicas ritè perficiendas contineantur. Huius enim vſus credi vix poteſt, quàm latè pateat tum in dimetiendis magnitudinibus ſine numerorum multiplicatione, tum verò maximè in horologiis Solaribus ea ratione, quam per lineas Tangentes in noua horologiorum deſcriptione tradidimus, deſcribendis, & in aliis rebus tam Geometricis, quam Aſtronomicis, vt ex iis, quæ capite primo huius libri, & alibi tradituri ſumus, perſpicuum fiet. Secundo loco conficiendus eſt quadrans, in quo præter gradus, Minuta quoque ac Secunda (quamuis in eo deſignata non ſint) cognoſci, ac diſcerni queant; docendumque, qua ratione idem præſtari poſſit in quolibet quadrante in 90. gradus exquiſitè diſtributo: partesque centeſimæ, atque milleſimæ in recta quauis linea in pauciſſimas partes æquales diuiſa dignoſcendæ ſint. Tertio atque poſtremo loco proponenda erunt, ac ſoluenda varia problemata triangulorum rectilineorum, vt & latera eorum, atque anguli ex quibuſdam datis, & cognitis facilè poſſunt cognoſci. Quamuis enim eadem hæc problemata ad finem Lemmatis 53. lib. 1. noſtri Aſtrolabii expoſita ſint, tamen ne ſtudioſus Lector ad illud Lemma ſæpius, & non ſine moleſtia recurrere cogatur, libet ea hic repetere totidem penè verbis, quot in prædicto Lemmate præſcripta ſunt. Sed ecce tria hæc, quæ præmittenda eſſe diximus, tribus capitibus explicata ſequuntur.

INSTRVMENTI PARTIVM Conſtructio, atque vſus.

CAPVT I.

Inſtrumentũ partium quo pacto cõſtruatur.

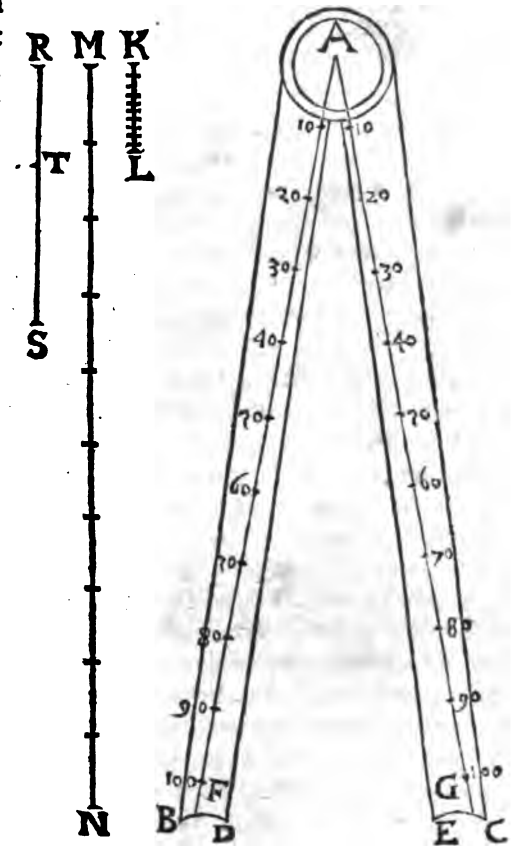
FIANT ex orichalco, vel alia materia ſolida duæ regulæ ABD, AEC, æquales omnino, quæ in A, ita coniungantur clauo aliquo tereti, vt circa A, vniformiter poſsint moueri, quemadmodum in Norma vulgari, quæ, prout opus eſt, conſtringi poteſt, & dilatari, fieri ſolet. Deinde ex A, in planis dictarum regularum duæ rectæ ducantur AF, AG, eæque in 100. particulas æquales diſtribuantur, vel in 1000. ſi longiores ſint. Ita enim ex qualibet recta quotuis partes centeſimæ, aut milleſimæ abſcindi poterunt. Immo ſi ſumatur linea KL, continens 11. particulas ex illis 100. vel 1000. diuidaturq; in 10. partes æquales, ſi quidem ſecta ſit vtraque regula in 100. partes æquales, poterunt beneficio rectæ KL, continentis 11. particulas eiuſmodi, & in 10. partes æquales diuiſæ, ex data recta qualibet accipi quotuis milleſimæ partes, perinde ac ſi partes ſingulæ centeſimæ in vtraque regula ſectæ eſſent in denas particulas æquales: ſi vero vtraque regula in 1000. particulas diſtributa ſit, & linea KL, talium 11. partium in 10. particulas diſſecta, poterunt ex quauis linea recta propoſita partes, quot quis voluerit, milleſimarum decimæ auferri, non ſecus ac ſi ſingulæ partes milleſimæ in regula diſtributæ eſſent in 10. particulas æquales, vt in vſu inſtrumenti dicemus.

RVRSVS ſi regula contineat 100. partes, & recta quæpiam MN, conſtans ex 101. eiuſmodi particulis diſtribuatur in 100. partes, poterimus ex quauis data recta accipere partes decimas milleſimarum. At ſi in regula notatæ ſint 1000. partes, & linea quæpiam continens eiuſmodi partes 101. ſecetur in 100. partes, deprehendi poterunt in qualibet recta quotcunque partes centeſimæ milleſimarum, ac ſi partes ſingulæ milleſimæ in regula complecterentur partes 100. Si denique linea earum partium 1001. diuidatur in 1000. partes, capiemus in quauis recta partes milleſimas milleſimarum, perinde ac ſi partes milleſimę ſingulæ in regula partes 1000. comprehenderent, vt ex vſu inſtrumenti conſtabit. Atque hæc eſt conſtructio inſtrumenti in vna facie pro partibus linearum rectarum inquirendis.

IN altera vero inſtrumenti facie deſignantur chordæ omnium arcuum quadrantis hoc modo. Ductis ex centro A, rectis AF, AG, vt in priori facie, ſumendus eſt quadrans circuli chordam habens æqualem rectæ, AF, & in rectas AF, AG, transferenda chorda gradus 1. illius quadrantis, deinde chorda grad. 2. 3. 4. 5. & ſic deinceps vſque ad chordam 89. graduum: ita enim ex quolibet quadrante abſcindere licebit arcum quotcunque graduum, vt Num. 16. dicetur: quamuis nos beneficio particularum æqualium in priori facie poſitarũ capiemus ex quadrante propoſito non ſolum gradus integros, ſed etiam minuta, quod Num. 14. docebimus. Atq; ita abſoluta eſt conſtructio inſtrumenti in altera facie. Huius inſtrumenti vſus ampliſsimus eſt, vt diximus, & non obſcurè ex iis, quæ ſequuntur, intelligi poteſt.

1. QVAN-

1. QVANDO enim linea recta propoſita rectæ A F, vel A G, in priori facie inſtrumenti æqualis eſt, nullo negotio ex ea abſcindetur quotcunq; partes centeſimæ, aut milleſimæ, prout inſtrumentum in 100. aut 1000. partes fuerit diuiſum; ſi nimirum partes, quæ deſiderantur, ex inſtrumento in datam rectam transferantur. *Centeſimæ, vel milleſimæ partes in recta linea quo modo accipiantur.*



2. QVANDO vero propoſita linea non eſt æqualis rectæ A F, vel A G, in inſtrumento, dilatandum inſtrumentum eſt, vel conſtringendum, donec interuallum inter F, G, datę lineę ſit æquale. Nam circinus inter partes rectarum A F, A G, quę deſiderantur, extenſus dabit in recta propoſita partes quęſitas. Vt ſi data recta æqualis ſit ipſi F G, & deſideretur 50. partes centeſimæ, continebit interuallum inter partes 50. & 50. in lineis AF, AG, partes 50. ex 100. in quas recta F G, cogitatur eſſe diuiſa. quod ſic demonſtratur. [a] Rectæ FG, & 50. 50. (ſi concipiatur ducta recta à parte 50. ad partem 50.) parallelæ ſunt; propterea quod latera A F, A G, proportionaliter ſecta ſunt in 50. & 50. Sunt enim tam AF, AG, quam A 50, A 50, æquales. [b] Igitur erit vt A 50. ad rectam 50. 50. ita A F, ad FG. Et permutando vt A 50. ad AF, ita recta 50. 50. ad FG. Cum ergo A 50. contineat partes 50. ex 100. totius A F, continebit quoque recta 50. 50. partes 50. ex 100. in quas diuiſa eſſe concipitur F G. Eademque ratio eſt de cæteris. Nam verbi gratia interuallum quoque inter puncta 80. & 80. partes 80. complectetur ex 100. totius FG; &c. quæ demonſtratio locum etiam habet, ſi in AF, contineantur 1000. partes, vt conſtat.

[a] 2. ſexti.

[b] 4. ſexti.

NON aliter, propoſitis duabus rectis, quarum altera in quotlibet partes æquales cogitetur eſſe diuiſa, cognoſcemus, quotnam ex illis partibus altera recta contineat; hac ſcilicet ratione. Aperto inſtrumento, ſtatuatur interuallum rectæ diuiſæ inter partes, in quas diuiſa intelligitur. Nam ſi altera per circinum transferatur inter duas alias partes eaſdem, vel inter duo puncta ab eiſdem duabus partibus æqualiter diſtantia, continebit illa recta tot partes, *Diuiſa recta in quotuis partes æquales, quot eiuſmodi partes in quauis alia contineantur.*

c 4. ſexti.

quot in regula A F, includuntur inter centrum A, & circini pedem: c propterea quod eandem proportionem habet ſegmentum regulæ A F, vſque ad interuallum rectæ diuiſæ, ad ſegmentum ejuſdem regulæ vſque ad interuallum alterius lineę, quam interuallum rectę diuiſæ ad interuallum alterius lineę habet, &c. Quod ſi linea hæc altera eſſet nimis longa, auferendũ ex ea primum eſſet interuallum inter 100. & 100. quoties fieri poteſt. Deinde reliquum ſegmentum transferendum in inſtrumentum, vt dictum eſt. Verbi gratia ſi altera rectarum diuiſa ſit in 50. partes æquales; ſumemus ei æquale interuallum inter 50. & 50. Si ergo altera habuerit interuallum æquale rectę F G, inter 100. & 100. continebit ea 100. partes ęquales. Et ſi in ea ſupereſſet ſegmentum ęquale interuallo 30. 30. contineret eadem recta partes 130. Quod ſi interuallum inter 100. & 100. ter in data recta contineretur. & inſuper ſegmẽtum ęquale interuallo 40. 40. complecteretur ea recta particulas 340. &c.

Tangentes quo modo accipiantur reſpectu ſinus totius 100.

3. ITAQVE ſi in Tangentibus nouę deſcriptionis horologiorum (vt huius inſtrumenti vtilitatem quoque in deſcribendis horologijs aperiamus) ſinus totus ſtatuatur 100. quantuſcunque ille ſit, eique interuallum F G, ponatur ęquale, capiemus commodiſsime quamcumque Tangentem tabulę in noua deſcriptione poſitę, ſi ea, abiecta prima tantum figura ad dexteram, minor fuerit quam 100. Vt ſi quęratur Tangens Grad. 39. min. 57. quoniam ea in tabula eſt 838. ſi abijciatur prima figura 8. ad dexteram, erit Tangens 83. reſpectu ſinus totius 100. vel potius 84. propterea quod figura 8. abiecta maior eſt, quam 5. ac proinde pro ea vnitas adijcienda eſt, cum conſtituat $\frac{8}{10}$ hoc eſt, pluſquam $\frac{1}{2}$. Itaque ſi accipiantur in inſtrumento partes 84. paulo minus, vt dictum eſt, habebitur Tangens quęſita: ſi vero Tangens in tabula, abjecta prima figura ad dexteram, maior fuerit quam 100. accipienda eſt Tangens per denas, atque vnitates expreſſa, relictis centenis, & illi Tangenti poſtea ſinus totus adijciendus eſt toties, quoties vnitas in centenis reperitur. Vt ſi quis velit Tangentem Grad. 68. min. 50. quoniam ea in tabula eſt 2563. & abiecta prima figura, 258. ſumenda eſt Tangens 58. eiq; ſinus totus F G, bis adijciendus, & ſic de reliquis.

Milleſima partes quo modo capiantur, etiamſi in inſtrumento cõtineantur tãtum partes 100.

4. QVOD ſi rectam K L, partium 11. in 10. ęquales partes diuiſam adhibere velimus accipere poterimus ex data recta partes milleſimas. Quoniam enim ita ſe habet linea K L, ad vnam eius partem, vt portio A 10. rectę A F, decem partium ad vnam, cum vtrobique proportio ſit decupla; erit permutando quoque K L, ad A 10. vt vna particula ipſius K L, ad vnam particulam ipſius A 10. Cum ergo K L, contineat ipſam A 10. ſemel, & inſuper partem ipſius decimam, (ſumpta eſt enim K L, partiũ 11. qualium 10. eſt A 10.) continebit quoque vna particula ipſius K L, vnam particulam ipſius A 10. ſemel, & decimam inſuper eius partem: Atque adeo duę illius includent duas huius cum $\frac{2}{10}$. & tres continebunt tres cum $\frac{3}{10}$. & ſic deinceps. Quare ſi verbi gratia deſiderentur $\frac{87}{1000}$. accipiendę erunt octo partes ex 100. totius A F, & inſuper $\frac{7}{10}$. ſequentis partis nonę, cum decima pars vnius centeſimę ſit $\frac{1}{1000}$. quod ita fiet. Circino aliquo ſumantur 7. partes ex K L, eęque in A F, transferantur ex qualibet parte. Nam pes circini mobilis auferet $\frac{7}{10}$. ex octaua parte poſt pedem circini immobilem, quę particula in nonam partem eſt transferenda. Ita enim, cum octo partes complectantur $\frac{80}{10}$. vnius centeſimę, (quod

quęlibet

quælibet pars contineat $\frac{10}{10}$. vnius centeſimæ.) hoc eſt, $\frac{80}{1000}$ & $\frac{7}{10}$. vnius centeſimæ contineant $\frac{7}{1000}$. comprehendet tota linea abſciſſa $\frac{87}{1000}$. Item ſi quis cupiat $\frac{17}{1000}$. accipienda erit vna pars ipſius A F, & $\frac{7}{10}$. ſequentis partis ſecundæ, vt paulo ante dictum eſt. Vel ſic agemus. Sumptis 7. partibus ex K L, transferemus eas in A F. vbicunque libuerit. Nam abſciſſæ partes erunt $7\frac{7}{17}$. Vna ergo pars cum $\frac{7}{10}$. continebit $\frac{17}{1000}$. Denique ſi optentur $\frac{157}{1000}$. ſumendæ erunt ex recta A F, partes 45. cum hæ æquiualeant $\frac{450}{1000}$. Deinde $\frac{7}{10}$. ex ſequenti parte quadrageſima ſexta, beneficio ſeptem particularum rectæ K L, &c.

5. SI ergo ſinus totus ponatur 1000. habebuntur Tangentes, vt in tabula nouæ deſcriptionis horologiorum poſitæ ſunt, nulla figura abiecta. Sed quando Tangens maior eſt quam 1000. relictis millenis, accipendæ ſunt reliquæ partes milleſimæ pro Tangente, eiq; toties ſinus totus addendus, quoties vnitas in millenis relictis reperitur. Vt ſi quis velit Tangentem Grad. 40. min. 30. quæ in tabula eſt 854. accipiendæ ſunt in regula A F, partes 85. & $\frac{4}{10}$. vnius. Ita enim Tangens continebit partes 854. ex 1000. At ſi quæratur Tangens Grad. 80. min. 0. quæ in tabula eſt 5671. relictis millenis accipiendæ ſunt partes 67. & $\frac{1}{10}$. vnius partis, & Tangenti 671. addendus ſinus totus quinquies.

Tangentes quo modo inueniantur, poſito ſinu toto 100.

6. PARI ratione ſi adhibeatur recta M N, partium 101. diuiſa in 100. depromemus ex recta A F, partes decimas milleſimarum; cum quælibet particula rectæ M N, contineat vnam particulam ipſius A F, ſemel, & inſuper $\frac{1}{100}$. Ita vt quælibet particula rectæ A F, diuiſa eſſe cogitetur in 100. particulas; ac proinde tota A F, ſit 10000. particularum, quod eodẽ modo demonſtrabitur. Eſt enim eadem proportio M N, ad vnam particulam ſuam centeſimam, quæ rectæ A F, ad vnam ſuam centeſimam, &c.

Decima partes milleſimarum quo modo ſumantur, etiamſi inſtrumentum diuiſum ſit in 100. partes duntaxat.

7. ATQVE hac ratione haberi poterunt Tangentes, poſito ſinu toto 10000. abiectis nimirum tribus figuris primis ex Tangentibus tabulæ in noſtro Theodoſio deſcriptæ. Vt ſi velimus Tangentem Grad. 78. Min. 30. quæ in tabula (abiectis tribus figuris) eſt 4 9 1 5 1. relictis denis millenarum, accipiemus partes 9 1 5 1. nimirum partes 91. ex 100. regulæ A F, & $\frac{51}{100}$. vnius. quod fiet, ſi partes 51. rectæ M N, transferantur in A F. Circinus enim vltra partes 51. abſcindet $\frac{51}{100}$. Nam quia ſingulæ particulæ rectæ A F, concipiuntur ſectæ in 100. particulas, continebuntur in 91. partibus particulæ 9100. quibus ſi addantur 51. habebitur Tangens 9151. Huic tandem apponendus eſt ſinus totus quater, propter quatuor denas millenarum relictas, Facile autem ad 91. partes adijcies particulam continentem $\frac{51}{100}$. vnius centeſimæ, ſi eam, (quæ nimirum vltra partes 51. regulæ A F, exiſtit) cum vna parte regulæ A F, transferas, vt pes circini inter partes 91. & 92. cadat, hoc eſt, ſi eam cum vna parte transferas ex parte 90. vel cum duabus partibus, ex parte 89. &c.

Tangentes poſito ſinu toto 10000. quo pacto ſumãtur.

8. INVENTA porro Tangente in vtraque regula A F, A G, dabit interuallum inter Tangentem regulæ A F, & Tangentem regulæ A G, eandem Tangentem reſpectu ſinus totius F G.

Qua ratione ex inuenta parte milleſima, vel decima milleſima

9. QVANDO autem Tangens tam exigua eſt, vt eius interuallum prope punctum A, accipi nequeat, vtemur hoc artificio. Sit verbi gratia ſumenda

Tangens

ſima in AF, eadem reperiatur reſpectu dati ſinus totius.

Tangens 7. partium reſpectu ſinus totius FG. Sumptis duabus Tangentibus majoribus, quarum maior minorem ſeptem vnitatibus ſuperet, nimirum 30. & 37. vel 80. & 87. &c. dabit earum differentia (ſi nimirũ vtraque in aliquam rectam lineam transferatur) Tangentem 7. quæ quæritur: Atque ita ſemper ſumendæ erunt duæ Tangẽtes maiores prope medium inſtrumentis quarum differentia æqualis ſit Tangenti exiguæ propoſitæ.

10. SI vtraque regula AF, AG, contineat 1000. particulas, & ſinus totus propoſitus conſtituatur 1000. eique interuallũ FG, æquale ſumatur, commodiſsime accipientur omnes Tangentes, vt in Tabula nouæ deſcriptionis horologiorum poſitæ ſunt. Nam verbi gratia Tangens 2430. Grad. 67. min. 38. habebitur, ſi relictis millenis, ſumatur interuallũ inter partes 430. vtriuſq; regulæ AF, AG, eique ſinus totus FG, bis adijciatur.

11. ET ſi adhibeas lineam KL, partium 11. diuiſam in 10. accipere poteris Tangentes reſpectu ſinus totius 10000. Item ſi rectam partium 101. in 100. particulas diſtributam adhibeas, habebis Tangentes reſpectu ſinus totius 100000. Si denique rectam partium 1001. partiaris in 1000. particulas, obtinebis Tangentes, poſito ſinu toto 1000000. vt ex dictis patet.

12. QVOD dictum eſt de Tangentibus, intelligendum eſt etiam de ſinubus, & ſecantibus. Nam ſi interuallum FG, æquale ſit ſinui alicui toti, ſiue is partium ſit 100. ſiue 1000. ſiue plurium, dabunt interualla inter ſinus, vel ſecantes in vtraque regula AF, AG, acceptas, per ea, quæ Num. 4. docuimus, ſinus & ſecantes reſpectu ſinus totius FG, accepti; propterea quod per Lemma 5. lib. 1. noſtri Aſtrolabij, eandem proportionem habet ſinus totus AF, ad ſinum totum FG, quam ſinus verbi gratia A 50. ad ſinum arcus circuli, cuius ſemidiameter FG, qui arcus arcui ſinus A 50. ſimilis eſt. [a] Cum ergo ſit, vt AF, ad FG, ita A 50. ad rectam 50. 50. erit recta 50. 50. ſinus arcus, qui arcui ſinus A 50. ſimilis eſt. Eademque ratio eſt de ſecantibus.

[a] *4. ſexti.*

Quo pacto cognoſcatur, quot decimæ in particula cuiuſuis centeſimæ partis contineantur.

13. VICISSIM cognoſcemus, quot particulas ex 1000. quælibet particula vnius partis rectæ AF, complectatur: hoc ſcilicet modo. Circino ſumatur data particula, vna cum vna parte centeſima, vel duabus, vel tribus, quatuorue; circinuſque decies repetatur in recta AF, diligenterque notetur ſegmentum rectæ AF, quod circinus percucurrit. Nam ſi ex partibus centeſimis in eo ſegmento contentis abijciantur toties 10. quot partes vna cum particula data ſumptæ fuerũt, reliquus numerus indicabit partes decimas vnius centeſimæ, hoc eſt, milleſimas in data particula comprehenſas. Et ſi cum reliqua particula eius ſegmenti (ſi qua forte ſuperſit) ſimiliter agemus, reperiemus partes decimas vnius milleſimæ, hoc eſt, partes $\frac{1}{10000}$. Et ſi iterum operationem repetemus, inueniemus partes $\frac{1}{100000}$. quod quidem ad finem libelli de fabrica, & vſu inſtrumenti horologiorum demoſtrauimus, eademq; demonſtrationem breuiter capite in ſequenti Num. 14. repetemus. Exempli cauſa. Si particula data cum tribus centeſimis decies repetita percurrat partes 37. abiectis 30. continebuntur in data particula $\frac{7}{10}$. vnius centeſimæ. Quare ſi ea particula data fuerit V. g. poſt vigeſimam partem centeſimam, continebit illud ſegmentum rectæ AF, $\frac{207}{1000}$. Nam $\frac{7}{10}$ vnius centeſimæ faciunt $\frac{7}{1000}$. & 20. centeſimæ, ſi ſingulæ in decem particulas congitentur eſſe ſectæ, efficiunt $\frac{200}{1000}$. quippe cum omnes centum partes æqui valeant 1000. particulis. Quod ſi

idem

idem fiat cum reliqua particula (ſi qua forte ſuperfuerit poſt 37. partès percurſas) vna cum tribus centeſimis, & inciderimus verbi gratia in particulam 34. abiectis 30. continebit ea particula $\frac{4}{10}$. vnius milleſimæ, hoc eſt, $\frac{4}{10000}$. Et quia $\frac{207}{1000}$ æquiualent $\frac{2070}{10000}$. ſi addantur $\frac{4}{10000}$. vltimo loco deprehenſæ, habebimus $\frac{2074}{10000}$. Si denique cum reliqua particula (ſi quà forte remanſerit) vna cum tribus centeſimis idem fiat, percurſæque verbi gratia ſint 39. partes, abiectis 30. ſupererunt $\frac{9}{10}$. vnius partis $\frac{1}{10000}$. hoc eſt $\frac{9}{100000}$. Cum ergo $\frac{2074}{10000}$ efficiant $\frac{20740}{100000}$. ſi addantur $\frac{9}{100000}$. habebimus $\frac{20749}{100000}$. Atque adeo ſi recta A F, ſtatuatur ſinus totus partium 100000. erit ſegmentum 20. partium cum particula data, ſinus partium 20749. Si particula data commode per circinum poſsit comprehendi, & decies repetatur, dabunt centeſimæ partes percurſæ partes decimas vnius centeſimæ. &c. Si quoque nonnunquam nulla ſuperſit particula, ita vt verbi gratia inuentæ ſint præcisè $\frac{207}{1000}$ multiplicandus erit tam numerator, quam denominator per 100. vt habeatur ſinus 20700. reſpectu ſinus totius 100000. quemadmodũ & 40. centeſimæ conſtituunt ſinum 40000. reſpectu ſinus totius 100000. Si namque vterque numerus minutiæ $\frac{40}{100}$ ducatur in 1000. fiet minutia $\frac{40000}{100000}$.

Ex circulo qua ratione abſcindatur arcus datorũ grad. ac min.

14. Hoc eodem inſtrumento, & in eadem facie partium æqualium, ex data qualibet circumferentia auferemus arcum quotuis graduum & minutorum, hac arte. Sit ex quadrante, cuius ſemidiameter interuallo F G, æqualis ſit, abſcindẽdus verbi gratia arcus grad. 53. hoc eſt, chorda huius arcus inuenienda. Sumatur ex tabula ſinuum ſinus ſemiſsis propoſiti arcus, graduum videlicet 16. min. 45. qui ſinus, abiectis quatuor figuris ad dexteram, eſt 450. reſpectu ſinus totius 1000. Si ergo ſinus hic reſpectu ſinus totius AF, accipiatur in recta AF, vſque ad 45. per ea, quæ ſupra Num. 4. & 12. tradita ſunt, dabit interuallum inter 45. & 45. ſinum quoque eundem reſpectu ſinus totius FG, quod interuallum duplicatum dabit chordam dupli arcus grad. 26. min. 45. id eſt, chordam arcus grad. 53. min. 30. qui quæritur. Si ſinus totus ſtatuatur 10000. erit ſinus grad. 26. min. 45. in tabula ſinuũ 4501. abiectis nimirum tribus figuris ad dexteram: qui in AF, capietur, vt Num. 6. & 12. dictum eſt.

Qvod ſi vtraque regula AF, AG, contineat 1000. partes, ſtatui poterit ſinus totus 100000. & etiam plurium partium, ſi nimirum adhibeatur recta MN, partium 101. diuiſa in 100. particulas, vel alia recta partium 1001. in 1000. particulas ſecta.

Quot gradus, ac minuta in dato arcu cõtineãtur, quo pacto cognoſcatur.

15. E contrario facile etiam cognoſcemus, quot gradus, & minuta in propoſito arcu cuiuſuis quadrantis contineantur. Sit enim in quadrante, cuius ſemidiameter FG, cui æqualis ſit recta R S, datus aliquis arcus, cuius chordæ ſemiſsis ſit RT. Huic RT, æqualis inueniatur recta 40. 40. inter rectas AF, AG, ita vt puncta 40. 40. vel abſcindant æquales partes, vt in dato exemplo, vel æqualiter diſtent à duabus partibus æqualibus. Deinde per ea, quæ Num. 13. ſcripſimus, inquiratur, quot partes ex 1000, vel 10000. vel 100000. in ſegmento ab A, vſque ad punctum inuẽtum 40. comprehendantur. In dato exemplo reperiuntur partes 400. vel 4000. vel 40000. prout ſinus totus conſtituitur 1000. vel 10000. vel 100000. atque tantus eſt ſinus 40. 40. reſpectu ſinus totius F G, cui reſpondent Grad. 23. min. 35. Duplus ergo arcus gr. 47. min. 10. qui chordæ ipſius R T, duplæ debetur, erit is, qui quæritur.

Quo pacto aliter ex circulo abſcindantur arcus datorum gr. & min.

16. IN altera facie inſtrumenti, in quam chordę arcuum quadrantis ſunt translatę, facilius arcum quotcunque graduum accipiemus, hoc modo. Chordæ quadrantis propoſiti ſumatur ęquale interuallum F G: Vel etiam ſemidiametro Quadrantis, chordę nimirum grad. 60. capiatur interuallum 60. 60. ęquale. Si igitur verbi gratia deſideret quis arcum Grad. 56. ſumendum erit per circinum interuallum inter puncta 56. & 56. Huic enim ęqualis eſt chorda grad. 56, Si præter gradus accipienda ſint etiam minuta, oportebit per ęſtimationem in ſequenti particula accipere talem partem ipſius, qualem minuta propoſita partem vnius gradus conſtituunt, Vt ſi cupiat quis min. 30. ſumenda eſt ſemiſsis, ſi 20. tertia pars, &c. Interuallum enim inter partem regulę A F, & partem regulę A G, acceptum dabit chordam quęſiti arcus.

Quo pacto aliter cognoſcatur, quot grad. & min. in dato arcu comprehendantur.

VICISSIM ſi cognoſcere velimus, quot gradus, ac minuta in dato arcu exiſtant, inueſtiganda erit eius chorda inter rectas AF, AG, ita vt puncta eius cadant vel in duas partes eaſdem, vel ęqualiter à duabus eiſdẽ diſtent. Nam tot gradus continebuntur in dato arcu, quot gradus cõtinentur in recta AF, à centro A, vſque ad punctum, è quo chorda dati arcus in rectam A G, tráslata eſt: ita vt ſi dati arcus chorda extiterit inter grad. 70. & 70. propoſitus arcus complectatur gr. 70. &c.

Qua ratione ex data recta pars imperata abſcindatur.

17. IAM vero nemo neſcit, ſi ex linea aliqua abſcindenda ſit $\frac{1}{2}$. vel $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{17}$. vel denique quęcunq; pars, cuius denominator maior non ſit quam 100. quo pacto id fieri debeat. Si namque interuallum F G, in priori facie inſtrumenti ęquale fuerit datę rectę, dabit interuallum inter 50. & 50. partem $\frac{1}{2}$. Interuallum autem inter 25. & 25. partem $\frac{1}{4}$. Interuallum vero inter 20. & 20. partem $\frac{1}{5}$. Item ſi interuallum inter 90. & 90. vel inter 60. & 60. vel inter 30. & 30. fiat datę rectę ęquale, dabit interuallum inter 30. & 30. vel inter 20. & 20. vel inter 10. & o. partem $\frac{1}{3}$. Rurſus ſi interuallum inter 17. & 17. vel inter 34. & 34. datæ rectę ſumatur ęquale, dabit interuallum inter 1. & 1. vel inter 2. & 2. partem $\frac{1}{17}$. At interuallum inter 5. & 5. vel inter 10. & 10. dabit $\frac{5}{17}$. &c. Ex hiſce porro exemplis adductis facile intelliges, quo modo te in aliis partibus imperatis gerere debeas.

Qua ratione ex dato circulo latus polygoni propoſiti inueniatur.

18. NON aliter in poſteriori facie inſtrumenti latera polygonorũ in quouis circulo reperiemus. Nam gradus 120. (qui facile accipientur, ſi quadranti graduum 90. adijciantur gradus 30.) dabunt latus trianguli ęquilateri. Gradus 90. latus quadrati. Gradus 72. latus pentagoni. Gradus 51 $\frac{3}{7}$. hoc eſt, gradus 51. min. 26. paulo minus, latus heptagoni. &c. qui quidem gradus habebuntur, ſi gradus 360. totius circuli per numerum laterum polygoni propoſiti diuidantur.

Quo pacto cognoſcatur, in quod punctũ ſemidiametri cadat perpendicularis ex quolibet gradu quadrantis demiſſa.

19. QVANDO in dato quadrante cognoſcere lubet, (quod non raro vſu venit) in quodnam punctum ſemidiametri perpendicularis ex quouis gradu ab altera ſemidiametro numerato demiſſa cadat, ita agendum erit. Sit verbi gratia ſemidiameter alicuius quadrantis F G, quærendumq; ſit punctũ, in quod cadat perpendicularis ex grad. 26. min. 45. demiſſa. Sinus grad. 26. min. 45. eſt 45. poſito ſinu toto 100. Ergo & recta inter partes 45. & 45. erit ſinus grad. 26. min. 45. reſpectu ſinus totius F G, vt Num. 12. oſtenſum eſt. Quocirca recta 45. 45. in ſemidiametrum dati quadrantis ex centro translata indicabit punctum quæſitum.

20. Non

20. Non aliter reperiemus in diametro Aſtrolabij (quod notatu dignum eſt) punctum cuiuſcunque declinationis. Poſito enim ſinu toto ſemidiametro Aequatoris, ſi declinatio eſt Borealis, transferenda eſt in diametrum ex centro Tangens ſemiſsis complementi declinationis: ſi vero auſtralis eſt, Tangens ſemiſsis arcus ex quadrante, & declinatione compoſiti. Vt Tangens grad. 33. min. 15. qui ſemiſſem complementi declinationis ♋. conſtituunt, dabit punctum extremum ſemidiametri paralleli ♋, quod videlicet ab Aequatore in Boream grad. 23. min. 30. declinat. Tangens vero grad. 56. min. 45. qui ſemiſſem conſtituunt arcus ex quadrante, & declinatione ♑, cõflati, dabit extremum punctum ſemidiametri paralleli ♑, quod ab Aequatore in Auſtrum grad. 23. min. 30. recedit. Ratio huiuſce rei eſt, quod recta in Aſtrolabio ab extremitate diametri rectum Horizontem referẽtis vſque ad interſectionem paralleli borealis cum altera diametro Meridianum repræſentãte ducta conſtituit cũ altera diametro angulũ ſemiſsis complementi declinationis borealis; ad interſectionem vero paralleli auſtralis cum eadem poſteriore diametro educta efficit angulum ſemiſsis arcus ex quadrante, & declinatione auſtrali conflati: atque vtriuslibet anguli Tangens ſemidiameter eſt paralleli, vt ex Aſtrolabio liquet.

Quo pacto in diametro Aſtrolabij punctum cuiuſuis declinationis reperiatur.

Eodemque modo, ſi conſtiterit, quem angulum in extremitate ſemidiametri Aequatoris in Aſtrolabio recta ad quodcunque punctum diametri, quæ ad illam ſemidiametrum perpendicularis eſt, ducta conſtituat, reperiemus punctum illud per Tangentem illius anguli, ſicut in parallelis ♋, & ♑. factum eſt.

21. Si etiam quæcunque linea ex centro inſtrumenti huius egrediens ſecetur quomodocunque, vt verbi gratia extrema, & media ratione, vel (quod operæ pretium eſſet, vt expeditius horologia deſcribantur) ſicut æquinoctialis linea in horologio horizontali diuiſa eſt: ſecabitur quæuis alia ſimiliter, ſi nimirum ei æquale interuallum F G, ſumatur, vt ex dictis liquido conſtat. Satis tamen eſt, ſi horæ ex vna parte lineę meridianæ, nimirum vel horæ antemeridianæ, vel pomeridianæ duntaxat in inſtrumentum transferantur.

Præceptum generale ad diuidendam lineam datã, vt alia quæcunque diuiſa eſt.

22. Præterea aperto inſtrumento quomodocunque, cognoſcemus quantitatem anguli F A G, in centro A, conſtituti, hoc modo. Circino ſumatur interuallum inter gradus 60. & 60. in poſteriore inſtrumenti facie, transferaturque ex centro in alterutram lineam chordarum. Nam quot gradus in eo interuallo includuntur, tot gradus continebit angulus F A G. Ratio eſt, quòd arcus ex centro A, per gradus 60. & 60. deſcriptus portio eſt quadrantis, cuius chorda eſt tota linea A F: propterea quod corda 60. graduum ſemidiameter eſt quadrantis dicti, cuius chorda eſt A F, vt ex inſtrumenti conſtructione manifeſtum eſt. Igitur interuallum inter gr. 60. & 60. eſt chorda anguli F A G, propoſiti, &c.

Qua ratione quantitas anguli quem latera inſtrumenti continent cognoſcatur.

23. Sed neque hoc omittendum eſt, (quandoquidem de Tangentibus, ſinubus, & ſecantibus in hoc inſtrumento reſpectu dati ſinus totius accipiendis verba fecimus) ſinum totum interdum eſſe tam exiguum, vt ex F, in G, transferri nequeat, etiamſi inſtrumẽtum prorſus claudatur. Vt ergo reſpectu illius ſinus totius Tangens, ſinus, ac ſecantes accipere poſsimus ex inſtrumẽto, ſu-

Quando ſinus totus tam paruus eſt, vt in inſtrumentum transf-

ferri nequeat, quid agendum.

to, ſumendus eſt ille ſinus totus in aliqua recta bis, ter, aut quater, &c. atque ita ex F, in G, transferendus. Nam ſi Tangentium quæſitarum, vel ſinuũ, aut ſecantium reſpectu ſinus totius 100. capiantur ſemiſſes, vel tertiæ partes, aut quartæ, &c. prout videlicet ſinus totus bis, ter, quateruè, &c. acceptus fuit, habebũtur Tangẽtes quæſitæ, vel ſinus, aut ſecãtes. Vt ſi ſinus totus duplicetur, & poſito ſinu toto 100. Tangens verbi gratia ſit 378. ſumenda eſt Tangẽs 189. &c. Sed commodiſsime res hæc peragetur, ſi ſinus totus, qui perpuſillus eſt, decupletur. Ita enim poſito ſinu toto 100. ſi ex Tangente verbi gratia propoſita (relicta prima figura ad dexteram) abijciatur vna figura ad dexteram, quæ eſt ſecunda in tota Tangente, habebitur decima eius pars. Habenda tamen ſemper eſt ratio figuræ abiectæ, vt ſcilicet pro ea ſumatur 1. ſi maior eſt quam 5. &c. Hac ratione Tangente 2414. grad. 67. min. 30. propoſita (relictis $\frac{4}{1000}$.) transferenda erit Tangens 24. paulo amplius, nimirum pars decima Tangentis 241. reſpectu ſinus totius 100.

Quando Tangens ſuperat ſinum totum, quid agendũ, vt per vnicã tranſlationem punctũ quæſitum inueniatur.

24. Sic etiam, quando Tangens aliqua ſinum totum ſuperat, ne cogamur primum ſinum totum aliquoties transferre, deinde vero reliquas partes, vel contra; ſed vt ſtatim punctum, quod quæritur, per vnam tranſlationem poſsimus inuenire, diuidenda eſt tota Tangens tab[illegible]d finem nouæ deſcriptionis Horologiorum poſitæ per 2. vel 3. vel per talem denique numerum, vt producatur in Quotiente Tangens trium figurarum. Tunc enim abiecta prima figura ad dexteram, reliqua Tangens transferenda eſt reſpectu ſinus totius 100. multiplicati per eundem numerum, per quem Tangẽs diuiſa fuit. Vt Tangens hor. 4. & 8. reſpectu ſinus totius 1000. eſt 1732. quæ diuiſa per 2. facit 866. Ergo transferenda eſt Tangens 86. $\frac{1}{2}$. paulo amplius reſpectu ſinus totius 100. duplicati. Item Tangens hor. 5. & 7. eſt 3732. quæ diuiſa per quatuor facit 933. Ergo Tangens 93 $\frac{3}{10}$. transferenda eſt reſpectu ſinus totius 100. quadruplicati. Atque ita de cæteris.

Quo pacto tertia, & quarta proportionalis reperiatur.

25. In hoc eodem denique inſtrumento facile duabus rectis tertiam proportionalem, & tribus quartam adiungemus. Nam ſi, duabus propoſitis, primæ in recta AF, regulæ AB, æqualis capiatur: & ſecunda à fine huius, aperto inſtrumento, per circinum transferatur in regulam AC, ad numerum ſimilem illi, qui in extremo primæ in regula AB, appoſitus eſt (ita vt pedes circini ſtatuantur vel in ſimilibus partibus vtriuſque regulæ, vel in duobus punctis æqualiter diſtantibus à ſimilibus partibus) eidemque ſecundæ in regula AB, æqualis ſumatur, dabit interuallum inter finem huius ſecundæ, & numerum in regula AC, ſimilem illi, qui prope finem ſecundæ ſcriptus eſt, tertiam proportionalem; vt ex demonſtratis Num. 2. conſtare poteſt.

Eadem ratione, ſi, tribus rectis propoſitis, prima & ſecunda in inſtrumentum transferantur, vt dictum eſt, tertiæ autem in regula AB, æqualis quoque capiatur, dabit interuallum inter finem tertiæ, & numerum regulæ AC, ſimilem illi, qui ad extremum tertiæ in regula AB, notatus eſt, quartam proportionalem.

Qvod ſi lineæ propoſitæ tam magnæ ſint, vel aliqua illarum, vt in inſtrumentum tranſportari nequeant, ſumendæ erunt omnium ſemiſſes, vel tertiæ partes, vel quartæ &c. atque cum illis procedendum, vt dictum eſt. Inuenta enim duplicata, vel triplicata, vel quadruplicata, &c. offeret tertiã aut quartam proportionalem quæſitam.

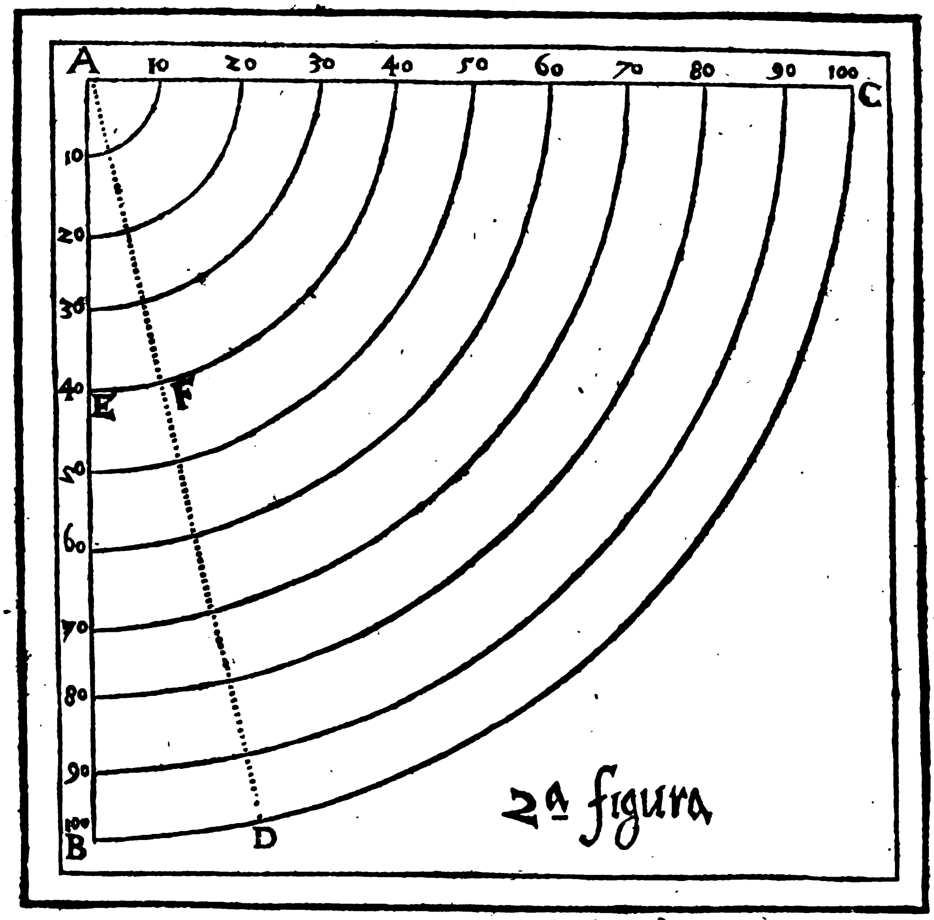
26. Loco

26. Loco prędicti inſtrumenti conſtrui poteſt in lamina aliqua, vel plano quolibet, figura eundem vſum habens, facillima hac ratione. Fiat angulus B A C, cuiuſcunque magnitudinis; quo autem maior fuerit, eo maiores ſinus toti in figura aſſumi poterunt: ita vt non malè feceris ſi rectum conſtituas. Ita namque quadrantem quoque recto angulo oppoſitum obtinebis: Recta autem A B, in 100. particulas æquales ſecta, (poſſet etiam ſecari in 1000. ſi commodè fieri poſſet, vt de ſuperiore inſtrumento diximus) deſcribantur ex centro A, per ſingulas partes 100. arcus circulorum, qui rectam quoque A C, in 100. particulas ęquales diſtinguent; parataque erit figura. *Conſtructio alterius inſtrumenti pro eodem vſu.*

Nam ſi in infimo arcu B C, ſumatur interuallũ B D, dato ſinui toti æquale ducaturque recta occulta AD, (hæc in ęnea tabella ducenda erit atramento non admodum nigro, vel alio colore, vt poſtea deleri poſſit) fungentur rectę A B, AD, officio regularum A F. A G, ſuperioris inſtrumenti ad propoſitam magnitudinem BD, aperti, & dilatati. Quamobrem inuenientur in hac figura omnes Tangentes reſpectu ſinus totius B D, vt ſupra. Vt Tangens verbi gratia partium 40. erit interuallum E F, [a] cum ducta recta E F, parallela ſit rectę ductę B D, propterea quod latera A B, A D, ſecta ſunt in E, F, proportionaliter. Alij vſus ſupra explicati facile quoque ad hanc figuram aptabuntur: prę ſertim ſi in alteram faciem laminæ transferantur chordæ omnium arcuum quadrantis alicuius, vt ex dato circulo quotcunque gradus poſsint abſcindi, &c. Habet figura hæc id commodi, quod periculum non eſt, ne clauus in centro atteratur, ſicut in ſuperiore inſtrumento. Deinde in eadem hac figura poſſunt accipi particulę etiam minimę, prope centrum, & in extremo quadrante ſinus totus quamuis perpuſillus, quod in ſuperiore inſtrumento non licebat.

[a] *2. ſexti.*

Qvamvis autem ad magnitudinum dimenſiones non omnes huius inſtrumenti partium vſus neceſſarij ſint, ſed ſolum ille, quem Num. 1. & 2. explicauimus, potiſsimum requiratur; placuit tamen tam varios eius vſus in vnum hunc locum congerere, tum vt inſtrumenti prę ſtantia magis eluceat, tum vt ſtudioſus lector habeat, vbi alios vſus, quos deſiderat, inquirere debeat. Non ſum etiam neſcius, quam plurimos alios pręclari huius inſtrumenti vſus poſſe excogitari, quos proprio Marte, atque induſtria quiuis facile, quando id res poſtulauerit, cogitando inueniet: nos præcipuos ſolum indicare voluimus hoc loco.



Conſtructio Quadrantis, in quo minuta quoque, ac ſecunda deprehendantur, etiamſi gradus in ea ſecti non ſint. Et quo pacto eadem minuta, & ſec. obtineri poſſint in quadrante in 90. gradus diſtributo. Ac denique qua ratione ex data recta in pauciſſimas partes æquales diuiſa abſcindi poſſint partes milleſimæ, &c.

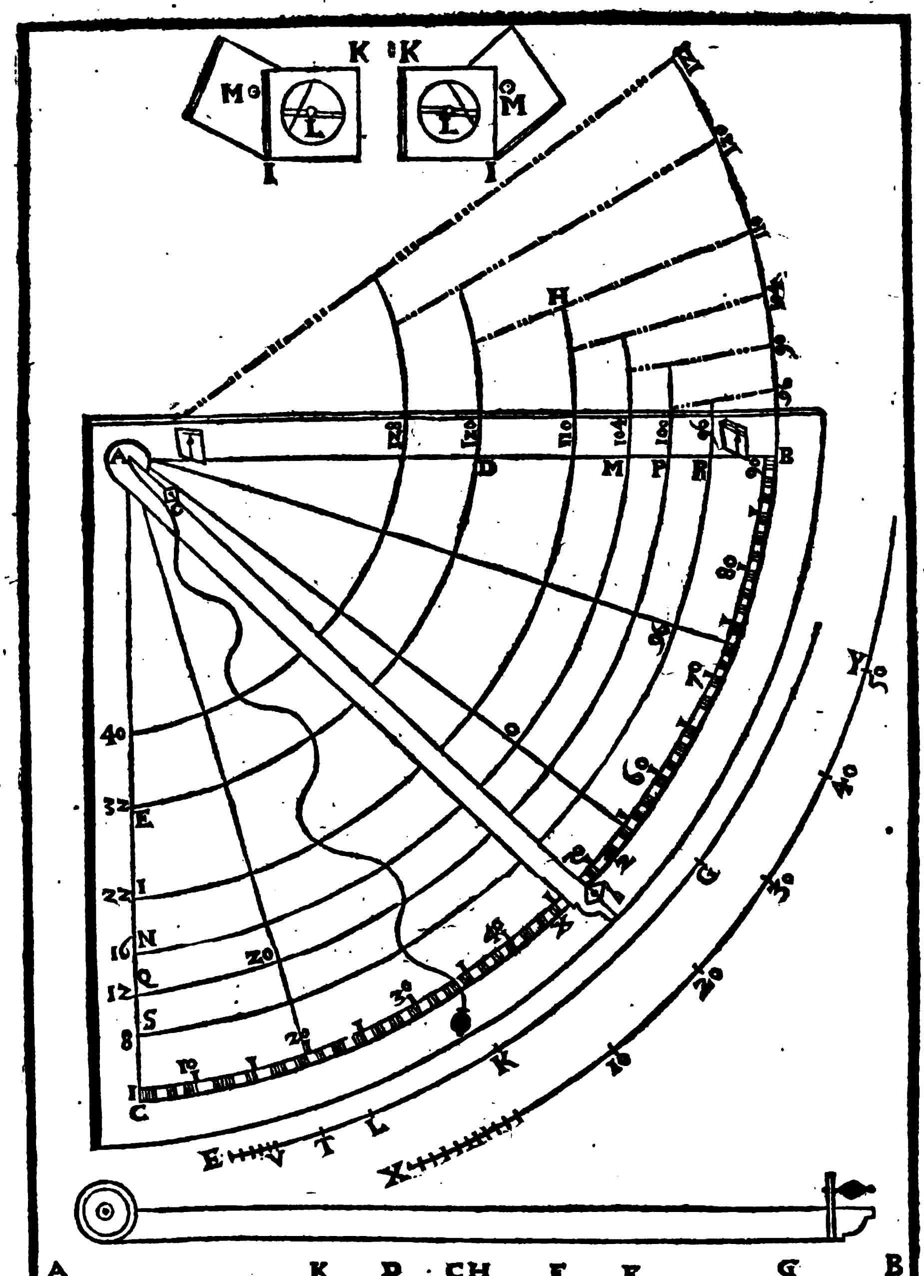
CAPVT II.

HOc eſt ſecundum, quod præmittendum eſſe diximus, qua videlicet via cognoſcere poſsimus, quot minuta, & ſecunda in propoſita particula cuiuſuis gradus contineantur: Et quot partes milleſimas quęlibet particula datę rectę comprehendat, licet in pauciſsimas ea partes ſit diſtributa. Quod vt aſſequamur, conſtruendus eſt quadrans, quem anno 1586. in Fabrica, & vſu inſtrumenti

menti Horologiorũ confecimus, hoc modo. Deſcriptis ex A, centro quadrantis BC, intra eundem quadrantem aliis 36. quadrantibus æqualiter, ſi placet, inter ſe diſtantibus, vt venuſtior appareat figura: ita vt in vniuerſum ſint 40. quadrantes, quorum extimus in 90. gradus more ſolito ſecetur: proximus deinde in 128. partes æquales, primum videlicet in duas, & vtraque pars rurſus in duas, & quęlibet harum quatuor partium iterum in duas, & ita deinceps, donec 7. diuiſiones abſolutæ ſint, atque adeò totus quadrans in 128. partes ęquales diſtributus. Poſt hæc producantur alij quadrantes vltra ſemidiametrum AB: ille quidem, qui tertius eſt ab extremo BC, vſque ad gradum 91. extremi quadrantis CB, producti, hoc eſt, vſque ad lineam ex A, ad gradum 91. ductam: ſequens deinde vſque ad gradum 92. & inſequens ad gradum 93. atque ita deinceps vſque ad alios gradus, ita vt quadrageſimus quadrans vſque ad gradum 128. producatur. Hi arcus ita producti diuidantur ſinguli in 128. partes ęquales, ſicuti quadrans extimo quadranti proximus: qua diuiſione peracta, partes ſupra ſemidiametrum AB, reſecentur, tanquam ſuperuacaneæ. *Quadrantis conſtructio ad m. & ſec. cognoſcenda.*

2. QVOD ſi quadrantes vltra ſemidiametrum AB, produci commodè non poſsint, ob ſpacij anguſtias, inſtituenda erit diuiſio hoc modo. In quadrante extremo BC, ſumatur ſemiſſis numeri graduum, quem quilibet arcus productus continere deberet, & ex A, ad illam ſemiſſem linea occulta ducatur. Hęc enim ſecabit quadrantem propoſitum in puncto, vbi arcus productus prima diuiſione bifariam ſecaretur. Quare ſi arcus inter hoc punctum & ſemidiametrum AC, comprehendens 64. partes ex illis 128. totius arcus producendi, ſecetur bifariam continuè ſex diuiſionibus, parteſque illius in arcum inter idem punctum, & ſemidiametrum AB, transferantur, quę transferri poſſunt, habebuntur in dato quadrante omnes partes, quæ ex illis 128, in quas totus arcus productus diuideretur, in quadrantem cadunt. Vt ſi diuidendus ſit quadrans MN, vſque ad grad. 104. producendus, ducemus ad grad. 52. nimirum ad ſemiſſem grad. 104. rectam, quę ſecet Quadrantem MN, in O. Nam ſi arcus ON, continens partes 64. ex illis 128. totius arcus producti, ſecetur continuè bifariam ſex diuiſionibus, parteſque eius in arcum OM, transferantur, habebuntur omnes partes in quadrantem MN, cadentes, non ſecus, ac ſi totus arcus productus in 128. partes diſtributus eſſet. Sic etiam, ſi quadrans ad gradum 125. producendus, diuidendus ſit, ducenda erit linea occulta ad gradum 62½ nimirum ad ſemiſſem graduum 125. Item ſi quadrans DE, 120. producendus, diuidendus ſit, ducenda erit linea occulta ad gradum 60. &c.

3. Hiſce quadrantibus ita diuiſis duplices numeri aſſcribendi ſunt, prope ſemidiametrum quidem AC, numeri quadrantum, vt 1. prope extremum; 2. iuxta ſequentem; & 3. iuxta tertium, &c. Ita vides quadranti, qui vſque ad gradum 96. productus eſt, appoſitum eſſe numerum 8. cum is octauus ſit. Primus enim eſt quadrans BC; ſecundus, qui ſequitur, 90. graduũ; Tertius graduum 91. quartus graduum 92. quintus graduum 93. Sextus graduum 94. Septimus graduum 95. & Octauus graduum 96. Sic etiam quadranti vſque ad grad. 100. producto cernis aſſcriptum eſſe numerum 12. &c. At verò iuxta ſemidiametrum AB, numeri illorum graduum ſcribendi ſunt, ad quos vſque quilibet quadrans extenditur, vt in figura vides. Ita enim cadente ſi- *Qui numeri quadrantibus aſſcribendi ſint.*



K K
M M
L L
I I
H
A B
D M P R
E
C
40
32
22
16
12
8
Y
G
K
E V T L
X
A K D CH F E G B
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

filo perpendiculi in partem aliquam integram alicuius quadrantis, illico iuxta ſemidiametrum A B, apparebit, ad quem gradum vſq; quadrans ille productus fuit. Qui quidem graduum numerus in regula trium tertium occupat locum, vt minuta, atque ſecunda inquirantur, vt paulo poſt Num. 7. dicemus.

Pinnacidia quo pacto affigenda.

4. IVXTA ſemidiametrum A B, affigenda ſunt duo pinnacidia ad angulos rectos, ita vt foramina, per quę radius ſolis, vel viſualis tranſire debet, ad perpendiculum rectę AB, exiſtant; alioquin non paruus error in dimenſione linearum committeretur.

Pinnacidia pro radio viſuali quo pacto conſtruẽda.

5. QVANDO porro per radium viſualem altitudo ſtellę inueſtiganda eſt, vel punctum aliquod lineæ dimetiendæ inſpiciendum, conſtrui debent duo pinnacidia hoc modo. In tabella ænea quadrata IK, fiat foramen rotundum mediocris magnitudinis, in cuius medio relinquatur foramen L, quod ſuſtineatur à diametro quadam tenui; Et circa I, circumuertatur alia tabella ænea quadrata ſubtilis, priori ęqualis, in cuius medió ſit etiam perexiguum foramen M, reſpondens foramini L, quando hęc tabella priori ſuperimponitur. Huiuſmodi duo pinnacidia ſi fiant, dici vix poteſt, quàm expeditè quamcunque ſtellam, aut aliam quamlibet rem contueri liceat. Nam pinnacidium, quod ab oculo propius abeſt, claudendum eſt tabella illa quadrata circumducta circa punctum I, aliud autem aperiendum. Sic enim fiet, vt radius viſualis per foramen M, prope oculum immiſſus, illico conſpiciat per maius foramen L, in pinnacidio remotiore ſtellam, vel aliam rem propoſitam: quia foramen illud maius apertum facilè rem ipſam intueri, & ſine vllo negotio foramen exiguum L, in eodem pinnacidio remotiore in ipſam rem viſum dirigere nos ſinit.

Conſtructio regulæ, loco fili.

6. POSTREMO ex centro A, egrediatur filum ſubtiliſsimum cum appenſo perpendiculo. Aut certè loco fili conſtruatur regula ænea admodum tenuis cum linea fiducię, in cuius extremitate promineat laminula, ex qua ſuſpendatur perpendiculum hac conditione, vt regula liberè pendente, filum aliquod cum perpendiculo demiſſum, ad vnguem lineę fiducię reſpondeat. Atq; in hoc ſumã diligentia adhibenda eſt, alioquin gradus non rectè à linea fiducię indicarentur.

Quadrans pendulus.

ATQVE hoc modo Quadrans in ſuo vſu erit pendulus, ſiue res in ſublimi exiſtẽns ex B, per A, ſiue res in plano poſita ex A, per B, inſpiciatur.

Quadrans ſtabilis.

QVOD ſi circa centrum A, regula affigatur cum linea fiducię AB, & duobus pinnacidijs c, b, quorum foramina lineę fiducię reſpondeant, ipſaque regula ita firmetur, vt circa centrum circumducta ad quemcunque gradum immota permaneat, erit Quadrans in ſuo vſu ſtabilis eundem ſemper ſitum habens, ſiue res in ſublimi exiſtẽns inſpiciatur ex A, per b, poſito nimirum latere AC, Horizonti parallelo, in plano Horizontali, ſiue rem in plano poſitam quis intueatur ex A, per b, latere AC, ad Horizontem exiſtente perpendiculari, & latere A B, eidem Horizonti parallelo, ſuperioremq; locũ occupante. Verum hęc planius intelligentur, cum de vtroque vſu lib. 2. agemus.

Vſus quadrãtis proximè conſtructi in minutis exquirendis.

7. VSVS quadrantis hoc modo conſtructi in minutis, ac ſecundis exquirendis, pręclarus eſt. Nam cadente filo perpendiculi, aut linea fiducię AB, in partem aliquam integram alicuius Quadrantis (quod ferè ſemper accidet propter diuerſitatem partium in tanta quadrantum multitudine) ſi fiat vt 128. nimirum vt numerus partium, in quas quilibet arcus productus diuiditur, ad partes à filo abſciſſas, ita numerus graduum in toto arcu producto comprehenſorum, in cuius partem aliquam integram filum incidit, ad aliud, reperietur numerus gra-

duum in arcu abſciſſo contentorum. Et ſi quid in diuiſione fuerit reſidui, illud per 60. multiplicatum, atq; in eundem diuiſorem, hoc eſt, in 128. diuiſum, dabit minuta graduum. Et ſi adhuc quippiam remanſerit in hac diuiſione, illud eodem modo per 60. multiplicatum, & in eundem diuiſorem 128, diuiſum, exhibebit ſecunda. Atq; hoc modo progrediendo, reperientur Tertia, Quarta, &c. donec nihil in diuiſione ſuperſit. Tunc enim vlterius progrediendum non eſt; Sed ſatis eſt, ad ſecunda vſq; progredi. Exempli gratia. Ponatur ex Quadrante PQ, vſq; ad gradum 100. producto, qualis eſt duodecimus, filum perpendiculi abſcidiſſe partes 20. ex illis 128. in quas totus arcus productus diſtributus eſt. Fiat ergo, vt 128. ad 20. ita 100. ad aliud, inuenienturq; gradus 15. ſupereruntq; in diuiſione 80. quę ducta in 60. faciunt 4800. quę diuiſa per 128. dant minuta 37, & ſuperſunt adhuc 64. quæ ſi ducātur in 60. & productus numerus 3840. diuidatur per 128. prodibunt Sec. 30. nihilq; in diuiſione ſupereſt. Arcus ergo Q 20, vel arcus Quadrantis BC, inter C, & filum perpendiculi includit gr. 15. Min. 37. Sec. 30. Rurſus ponamus ex octauo quadrante RS, vſq; ad gradum 96. producto filum perpēdiculi abſcidiſſe partes 96. ex illis 128. quæ in toto arcu producto continentur. Fiat ergo, vt 128. ad 96. ita 96. ad aliud: reperienturque gradus 72. pręcisè arcui abſciſſo conuenire. Item ceciderit filum in partem 64. Quadrantis ſextidecimi MN, vſque ad gradum 104. producti. Si ergo fiat, vt 128. ad 64. ita 104. ad aliud, producentur quoque grad. 52. præcisè. atque ita de cæteris; dummodo ſis memor, vt ſi quid in diuiſionibus ſuperfuerit, reſidua diuiſionum multiplicentur per 60. & producti numeri per 128. diuidantur, vt dictum eſt.

Demonstratio huius operationis perſpicua eſt. Quoniam enim eſt, (in vltimo exemplo) vt arcus NM, vſque ad grad. 104. productus, quatenus in 128. partes ſectus eſt, ad arcum NO, earundem partium 64. vt idem arcus NM, totus productus, quatenus grad. 104. complectitur, ad eundem arcum NO, reſpectu eorundem graduum; efficitur, vt ſi fiat quemadmodum partes 128, totius arcus NM, vſque ad grad. 104. producti ad partes 64. in arcu NO, contentas, ita idem arcus NM, productus graduum 104. ad aliud, reperiantur gradus in eodem arcu NO, contenti, &c.

Conſtructio & vſus tabellæ pro minutis & ſecundis.

8. In gratiam autem ſtudioſorum placet hic tabellam inſerere, in qua ex reſiduo primæ operationis regulæ aureæ, qua gradus eliciuntur, mox apparet, quot minuta, & ſecunda illi reſiduo reſpondeant: Ita vt opus ſit ſemel tantum regulam auream adhibere. Conſtruitur autem tabella, ſi ſingula reſidua, quæ plura, quam 127, eſſe nequeunt, per 60. multiplicentur, productique numeri per 128. diuidantur. Atque vt ſtructura, & vſus huiuſce tabellæ facilius intelligatur, apponemus vnum exemplum. Cadat verbi gratia filum perpendiculi in partem 29. Quadrantis 32. ad gradum vſque 120. producti. Fiat igitur vt 128. ad 29. ita 120. ad aliud; producenturque grad. 27. Quia verò in diuiſione ſuperſunt 24. ſub quo numero in tabella ponuntur duo hi numeri 11. 15. Prior ergo dat minuta, & poſterior ſecunda; Ita vt arcus à filo abſciſſus complectatur grad. 27: Min. 11. ſec. 15. Atque hæc minuta, & Secunda producuntur, ſi reſiduum diuiſionis, nimirum 24. ducatur in 60. & productus numerus per 128. diuidatur, &c. Eadem ratio eſt de reliquis tabellę numeris. Nam ſemper ſuperior numerus eſt ille, qui in diuiſione remanſit: Inferiorum autem numerorum prior ad minuta, & poſterior ad ſecunda ſpectat.

SEQVITVR TABELLA.

TABEL-

TABELLA INDICANS, QVOT MInuta, ac Secunda reſiduo primæ operationis regulæ aureæ, qua gradus in ſupra nominatæ tabulæ conſtructione eruuntur, reſpondeant.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
0. 28	0.56	1. 24	1. 52	2. 21	2.49	3. 17	3. 45	4.13	4. 41	5.9	5.37
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
6. 6	6. 34	7. 2	7.30	7.58	8.26	8.54	9.22	9.51	10.19	10.47	11.15
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
11. 43	12. 11	12. 39	13.7	13.36	14. 4	14.32	15. 0	15. 28	15. 56	16.24	16.52
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
17. 21	17.49	18.17	18.45	19. 13	19.41	20. 9	20.37	21. 6	21. 34	22. 2	22.30
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
22. 58	23.26	23.54	24 22	24.51	25.19	25.47	26.15	26.43	27. 11	27.39	28. 7
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
28.36	29. 4	29.32	30. 0	30.28	30.56	31. 24	31 52	32. 21	32.49	33. 17	33. 45
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
34. 13	34.41	35 9	35.37	36. 6	36.34	37. 2	37.30	37.58	38.26	38.54	39.22
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
39. 51	40.19	40.47	41. 15	41.43	42. 11	42.39	43. 7	43.36	44. 4	44.32	45. 0
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
45. 28	45 56	46.24	46.52	47.21	47.49	48.17	48.45	49. 13	49 41	50 9	50.37
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
51. 6	51. 34	52. 2	52.30	52.58	53.26	53.54	54.22	54 5	55. 19	55.47	56. 15
121	122	123	124	125	126	127	128				
M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.				
56.43	57 11	57.39	58. 7	8. 36	59. 4	59.32	60. 0				

Conſtructio & vſus tabulæ ſequentis.

9. PORRO vt ſtudioſos omni labore ſupputandi leuaremus, compoſita à nobis eſt ſequens tabula, in qua confeſtim apparet, quot gradus, minuta, ac ſecunda cuilibet parti cuiuſuis Quadrantis reſpondeant. Nam ſi in latere tabulæ ſiniſtro ſumatur numerus illius quadrantis, in cuius partem aliquam integram filum perpendiculi cecidit, numerus, inquam, iuxta ſemidiametrum A C, illi quadranti appoſitus, in vertice verò eiuſdem tabulæ accipiatur numerus partium à filo abſciſſarum, reperientur in angulo communi grad. Min. & Sec. arcus abſciſsi. Exemplum. Ceciderit filum in partem 30. Quadrantis 16. qui vſque ad grad. 104. productus fuit. Si ergo in vertice tabulæ ſumatur numerus 30. partium, & in ſiniſtro latere numerus quadrantis 16. deprehendentur in communi angulo grad. 24. Min. 22. Sec. 30. Item cadente filo in partem 111. Quadrantis 15. qui vſque ad grad. 103. fuit productus; ſi in vertice tabulę accipiatur numerus 111. partium, & in latere ſiniſtro numerus Quadrantis 15. reperientur in angulo communi gradus 89. min. 19. ſec. 13. Atq; ita de cæteris. Conſtructio tabulę ex dictis obſcura non eſt. Nam ſi fiat, vt 128, ad 1. ad 2. ad 3. ad 4. & ita deinceps, vſque ad 128. ita numerus graduum cuiuslibet arcus totius producti ad aliud, reperientur gradus. Minuta & Sec. pro partibus cuiuſque Quadrantis. Continentur autem in tabula tantummodo 40. Quadrantes, quod hi ſatis eſſe videantur: Si quis tamen plures deſcribere velit, facilè tabulam extendere poterit ſecundum doctrinam traditam hoc loco ad quotuis Quadrantes. In eadem tabula quando in tertia operatione regulæ aureæ, qua ſecunda inquiruntur, numerus reliquus fuit maior quam 64. maior nimirum dimidio Diuiſoris 128. aſſumpſimus vnum ſecundum integrum.

Quo pacto tabula 40. Quadrantum extendatur ad plures Quadrantes ſine ope aureæ regulæ.

IAM verò ſi quis tabulam extendere velit ad plures Quadrantes, facere id poterit ſine vlla operatione regulæ aureæ, hoc modo. Gradibus, Minutis ac ſecundis quadrageſimi Quadrantis, qui vſque ad grad. 128. productus fuit, adiiciantur differentiæ inter gradus, minuta, ac ſecunda quadrageſimi Quadrantis, & gradus, Minuta, ac ſecunda aliorum quadrantum infra Quadrageſimum. Ita namque conficientur gradus, minuta, ac ſecunda quadrantum ſupra quadrageſimum. Nam gradus, minuta, ac ſecunda trium quorumlibet quadrantum, quorum vnus ſit quadrageſimus, alij verò duo æqualiter ab eo diſtent, obſeruant proportionem Arithmeticam continuam, vt hic apparet,

Partes	1			2			3			4			5			6		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
38	0	59	4	1	58	7	2	57	11	3	56	15	4	55	19	5	54	22
39	0	59	32	1	59	4	2	58	36	3	58	7	4	57	39	5	57	11
40	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0
41	1	0	28	2	0	56	3	1	24	4	1	53	5	2	21	6	2	49
42	1	0	56	2	1	53	3	2	49	4	3	45	5	4	41	6	5	38

Numeri enim Quadrantum 39. 40. 41. in prima columna ſuperant ſe continuè ſecundis 28. In ſecunda verò columna ſecundis 56. & in tertia Minuto 1. Secundis 24. &c. Ita quoq; Numeri Quadrantum 38. 40. 42. in prima columna

ſuperant

ſuperant,ſe continue ſecundis 56. In ſecunda vero Minuto 1. ſecundis 53. & in tertia Minutis 2. ſecundis 49. &c. Quare ſi differentiæ inter gradus,minuta, ac ſecunda Quadrantis 39. & Quadrantis 40. adijciantur ordine ad gradus,minuta,ac ſecunda Quandrantis 40 .componentur gradus,Minuta ac ſecunda Quadrantis 41. Differentiæ autem inter gradus, Minuta ac Secun. Quadrantis 38. & Quadrantis 40. additæ ordinatim gradibus,Minutis,ac ſecundis Quadrãtis 40. conficient gradus minuta,ac Secunda Quadrantis 42. Sic quoque differentiæ inter gradus,Minuta, ac Secunda Quadrantis 30. & Quadrantis 40. appoſitæ gradibus, Minutis,& ſecundis Quadrantis 40. component gradus, minuta, & ſecunda Quadrantis 50.&c.

SEQVITVR TABVLA QVADRANTIS PAVLO ANte conſtructi, vbi ſinguli arcus producti diſtribuuntur in 128. partes æquales: in qua ſtatim apparet, quot Gradus, Minuta, ac Secunda ſingulis particulis cuiuſuis quadrantis reſpondeant: cuius quidem vſum ſupra expoſuimus.

Partes	1			2			3			4			5			6			7		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0	7	0	0
2	0	42	11	1	24	22	2	6	34	2	48	45	3	30	56	4	13	7	4	55	19
3	0	42	39	1	25	19	2	7	58	2	50	37	3	33	17	4	15	56	4	58	36
4	0	43	7	1	26	15	2	9	22	2	52	30	3	35	37	4	18	45	5	1	52
5	0	43	36	1	27	11	2	10	47	2	54	22	3	37	58	4	21	34	5	5	9
6	0	44	4	1	28	7	2	12	11	2	56	15	3	40	19	4	24	22	5	8	26
7	0	44	32	1	29	4	2	13	36	2	58	7	3	42	39	4	27	11	5	11	43
8	0	45	0	1	30	0	2	15	0	3	0	0	3	45	0	4	30	0	5	15	0
9	0	45	28	1	30	56	2	16	24	3	1	53	3	47	21	4	32	49	5	18	17
10	0	45	56	1	31	52	2	17	49	3	3	45	3	49	41	4	35	37	5	21	34
11	0	46	24	1	32	49	2	19	13	3	5	37	3	52	2	4	38	26	5	24	51
12	0	46	52	1	33	45	2	20	37	3	7	30	3	54	22	4	41	15	5	28	7
13	0	47	21	1	34	41	2	22	2	3	9	22	3	56	43	4	44	4	5	31	24
14	0	47	49	1	35	37	2	23	26	3	11	15	3	59	4	4	46	52	5	34	41
15	0	48	17	1	36	34	2	24	51	3	13	7	4	1	24	4	49	41	5	37	58
16	0	48	45	1	37	30	2	26	15	3	15	0	4	3	45	4	52	30	5	41	15
17	0	49	13	1	38	26	2	27	39	3	16	52	4	6	6	4	55	19	5	44	32
18	0	49	41	1	39	22	2	29	4	3	18	45	4	8	26	4	58	7	5	47	49
19	0	50	9	1	40	19	2	30	28	3	20	37	4	10	47	5	0	56	5	51	6
20	0	50	37	1	41	15	2	31	52	3	22	30	4	13	7	5	3	45	5	54	22
21	0	51	6	1	42	11	2	33	17	3	24	22	4	15	28	5	6	34	5	7	39
22	0	51	34	1	43	7	2	34	41	3	26	15	4	17	49	5	9	22	6	0	56
23	0	52	2	1	44	4	2	36	6	3	28	7	4	20	9	5	11	11	6	4	13
24	0	52	30	1	45	0	2	37	30	3	30	0	4	22	30	5	15	0	6	7	30
25	0	52	58	1	45	56	2	38	54	3	31	52	4	24	51	5	17	49	6	10	47
26	0	53	26	1	46	52	2	40	19	3	33	45	4	27	11	5	20	37	6	14	4
27	0	53	54	1	47	49	2	41	43	3	35	37	4	29	32	5	23	26	6	17	21
28	0	54	22	1	48	45	2	43	7	3	37	30	4	31	52	5	26	15	6	20	37
29	0	54	51	1	49	41	2	44	32	3	39	22	4	34	13	5	29	4	6	23	54
30	0	55	19	1	50	37	2	45	56	3	41	15	4	36	34	5	31	52	6	27	11
31	0	55	47	1	51	34	2	47	21	3	43	7	4	38	54	5	34	41	6	30	28
32	0	56	15	1	52	30	2	48	45	3	45	0	4	41	15	5	37	30	6	33	45
33	0	56	43	1	53	26	2	50	9	3	46	52	4	43	36	5	40	19	6	37	2
34	0	57	11	1	54	22	2	51	34	3	48	45	4	45	56	5	43	7	6	40	19
35	0	57	39	1	55	19	2	52	58	3	50	37	4	48	17	5	45	56	6	43	36
36	0	58	7	1	56	15	2	54	22	3	52	30	4	50	37	5	48	45	6	46	52
37	0	58	36	1	57	11	2	55	47	3	54	22	4	52	58	5	51	34	6	50	9
38	0	59	4	1	58	7	2	57	11	3	56	15	4	55	19	5	54	22	6	53	26
39	0	59	32	1	59	4	2	58	36	3	58	7	4	57	39	5	57	11	6	56	43
40	1	0	0	2	0	0	3	0	0	4	0	0	5	0	0	6	0	0	7	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes	8			9			10			11			12			13			14		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	8	0	0	9	0	0	10	0	0	11	0	0	12	0	0	13	0	0	14	0	0
2	5	37	30	6	19	41	7	1	52	7	44	4	8	26	15	9	8	26	9	50	37
3	5	41	15	6	23	54	7	6	34	7	49	13	8	31	52	9	14	32	9	57	11
4	5	45	0	6	28	7	7	11	15	7	54	22	8	37	30	9	20	37	10	3	45
5	5	48	45	6	32	21	7	15	56	7	59	32	8	43	7	9	26	43	10	10	19
6	5	52	30	6	36	34	7	20	37	8	4	41	8	48	45	9	32	49	10	16	52
7	5	56	15	6	40	47	7	25	19	8	9	51	8	54	22	9	38	54	10	23	26
8	6	0	0	6	45	0	7	30	0	8	15	0	9	0	0	9	45	0	10	30	0
9	6	3	45	6	49	13	7	34	41	8	20	9	9	5	37	9	51	6	10	36	34
10	6	7	30	6	53	26	7	39	22	8	25	19	9	11	15	9	57	11	10	43	7
11	6	11	15	6	57	39	7	44	4	8	30	28	9	16	52	10	3	17	10	49	41
12	6	15	0	7	1	52	7	48	45	8	35	37	9	22	30	10	9	22	10	56	15
13	6	18	45	7	6	6	7	53	26	8	40	47	9	28	7	10	15	28	11	2	49
14	6	22	30	7	10	19	7	58	7	8	45	57	9	33	45	10	21	34	11	9	22
15	6	26	15	7	14	32	8	2	49	8	51	6	9	39	22	10	27	39	11	15	56
16	6	30	0	7	18	45	8	7	30	8	56	15	9	45	0	10	33	45	11	22	30
17	6	33	45	7	22	58	8	12	11	9	1	24	9	50	37	10	39	51	11	29	4
18	6	37	30	7	27	11	8	16	52	9	6	34	9	56	15	10	45	56	11	35	37
19	6	41	15	7	31	24	8	21	34	9	11	43	10	1	52	10	52	2	11	42	11
20	6	45	0	7	35	37	8	26	15	9	16	52	10	7	30	10	58	7	11	48	45
21	6	48	45	7	39	51	8	30	56	9	22	2	10	13	7	11	4	13	11	55	19
22	6	52	30	7	44	4	8	35	37	9	27	11	10	18	45	11	10	19	12	1	52
23	6	56	15	7	48	17	8	40	19	9	32	21	10	24	22	11	16	24	12	8	26
24	7	0	0	7	52	30	8	45	0	9	37	30	10	30	0	11	22	30	12	15	0
25	7	3	45	7	56	43	8	49	41	9	42	39	10	35	37	11	28	36	12	21	34
26	7	7	30	8	0	56	8	54	22	9	47	49	10	41	15	11	34	41	12	28	7
27	7	11	15	8	5	9	8	59	4	9	52	58	10	46	52	11	40	47	12	34	41
28	7	15	0	8	9	22	9	3	45	9	58	7	10	52	30	11	46	52	12	41	15
29	7	18	45	8	13	36	9	8	26	10	3	17	10	58	7	11	52	58	12	47	49
30	7	22	30	8	17	49	9	13	7	10	8	26	11	3	45	11	59	4	12	54	22
31	7	26	15	8	22	2	9	17	49	10	13	36	11	9	22	12	5	9	13	0	56
32	7	30	0	8	26	15	9	22	30	10	18	45	11	15	0	12	11	15	13	7	30
33	7	33	45	8	30	28	9	27	11	10	23	54	11	20	37	12	17	21	13	14	4
34	7	37	30	8	34	41	9	31	52	10	29	4	11	26	15	12	23	26	13	20	37
35	7	41	15	8	38	54	9	36	34	10	34	13	11	31	52	12	29	32	13	27	11
36	7	45	0	8	43	7	9	41	15	10	39	22	11	37	30	12	35	37	13	33	45
37	7	48	45	8	47	21	9	45	56	10	44	32	11	43	7	12	41	43	13	40	19
38	7	52	30	8	51	34	9	50	37	10	49	41	11	48	45	12	47	49	13	46	52
39	7	56	15	8	55	47	9	55	19	10	54	51	11	54	22	12	53	59	13	53	26
40	8	0	0	9	0	0	10	0	0	11	0	0	12	0	0	13	0	0	14	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes	15			16			17			18			19			20			21		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	15	0	0	16	0	0	17	0	0	18	0	0	19	0	0	20	0	0	21	0	0
2	10	32	49	11	15	0	11	57	11	12	39	22	13	21	34	14	3	45	14	45	56
3	10	39	51	11	22	30	12	5	9	12	47	49	13	30	28	14	13	7	14	55	47
4	10	46	52	11	30	0	12	13	7	12	56	15	13	39	22	14	22	30	15	5	37
5	10	53	54	11	37	30	12	21	6	13	4	41	13	48	17	14	31	52	15	15	28
6	11	0	56	11	45	0	12	29	4	13	13	7	13	57	11	14	41	15	15	25	19
7	11	7	58	11	52	30	12	37	2	13	21	34	14	6	6	14	50	37	15	35	9
8	11	15	0	12	0	0	12	45	0	13	30	0	14	15	0	15	0	0	15	45	0
9	11	22	2	12	7	30	12	52	58	13	38	26	14	23	54	15	9	22	15	54	51
10	11	29	4	12	15	0	13	0	56	13	46	52	14	32	49	15	18	45	16	4	41
11	11	36	6	12	22	30	13	8	54	13	55	19	14	41	43	15	28	7	16	14	32
12	11	43	7	12	30	0	13	16	52	14	3	45	14	50	37	15	37	30	16	24	22
13	11	50	9	12	37	30	13	24	51	14	12	11	14	59	32	15	46	52	16	34	13
14	11	57	11	12	45	0	13	32	49	14	20	37	15	8	27	15	56	15	16	44	4
15	12	4	13	12	52	30	13	40	47	14	29	4	15	17	21	16	5	37	16	53	54
16	12	11	15	13	0	0	13	48	45	14	37	30	15	26	15	16	15	0	17	3	45
17	12	18	17	13	7	30	13	56	43	14	45	56	15	35	9	16	24	22	17	13	36
18	12	25	19	13	15	0	14	4	41	14	54	22	15	44	4	16	33	45	17	23	26
19	12	32	21	13	22	30	14	12	39	15	2	49	15	52	58	16	43	7	17	33	17
20	12	39	22	13	30	0	14	20	37	15	11	15	16	1	52	16	52	30	17	43	7
21	12	46	24	13	37	30	14	28	36	15	19	41	16	10	47	17	1	52	17	52	58
22	12	53	26	13	45	0	14	36	34	15	28	7	16	19	41	17	11	15	18	2	49
23	13	0	28	13	52	30	14	44	33	15	36	34	16	28	36	17	20	37	18	12	39
24	13	7	30	14	0	0	14	52	30	15	45	0	16	37	30	17	30	0	18	22	30
25	13	14	32	14	7	30	15	0	28	15	53	26	16	46	24	17	39	22	18	32	21
26	13	21	34	14	15	0	15	8	26	16	1	52	16	55	19	17	48	45	18	42	11
27	13	28	36	14	22	30	15	16	24	16	10	19	17	4	13	17	58	7	18	52	2
28	13	35	37	14	30	0	15	24	22	16	18	45	17	13	7	18	7	30	19	1	52
29	13	42	39	14	37	30	15	32	21	16	27	11	17	22	2	18	16	52	19	11	43
30	13	49	41	14	45	0	15	40	19	16	35	37	17	30	56	18	26	15	19	21	34
31	13	56	43	14	52	30	15	48	17	16	44	4	17	39	51	18	35	37	19	31	24
32	14	3	45	15	0	0	15	56	15	16	52	30	17	48	45	18	45	0	19	41	15
33	14	10	47	15	7	30	16	4	13	17	0	56	17	57	39	18	54	22	19	51	6
34	14	17	49	15	15	0	16	12	11	17	9	22	18	6	34	19	3	45	20	0	56
35	14	24	51	15	22	30	19	20	9	17	17	49	18	15	28	19	13	7	20	10	47
36	14	31	52	15	30	0	16	28	7	17	26	15	18	24	22	19	22	30	20	20	37
37	14	38	54	15	37	30	16	36	6	17	34	41	18	33	17	19	31	52	20	30	28
38	14	45	56	15	45	0	16	44	0	17	43	7	18	42	11	19	41	15	20	40	19
39	14	52	58	15	52	32	16	52	2	17	51	34	18	51	6	19	50	37	20	50	9
40	15	0	0	16	0	0	17	0	0	18	0	0	19	0	0	20	0	0	21	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes	22			23			24			25			26			27			28		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	22	0	0	23	0	0	24	0	0	25	0	0	26	0	0	27	0	0	28	0	0
2	15	28	7	16	10	19	16	52	30	17	34	41	18	16	52	18	59	4	19	41	15
3	15	38	26	16	21	6	17	3	45	17	46	24	18	29	4	19	11	43	19	54	22
4	15	48	45	16	31	52	17	15	0	17	58	7	18	41	15	19	24	22	20	7	30
5	15	59	4	16	42	39	17	26	15	18	9	51	18	53	26	19	37	2	20	20	37
6	16	9	22	16	53	26	17	37	30	18	21	34	19	5	37	19	49	41	20	33	45
7	16	19	41	17	4	13	17	48	45	18	33	17	19	17	49	20	2	21	20	46	52
8	16	30	0	17	15	0	18	0	0	18	45	0	19	30	0	20	15	0	21	0	0
9	16	40	19	17	25	47	18	11	15	18	56	43	19	42	11	20	27	39	21	13	7
10	16	50	37	17	36	34	18	22	30	19	8	26	19	54	22	20	40	19	21	26	15
11	17	0	56	17	47	21	18	33	45	19	20	9	20	6	34	20	52	58	21	39	22
12	17	11	15	17	58	7	18	45	0	19	31	52	20	18	45	21	5	37	21	52	30
13	17	21	34	18	8	54	18	56	15	19	43	36	20	30	56	21	18	17	22	5	37
14	17	31	52	18	19	41	19	7	30	19	55	19	20	43	7	21	30	56	22	18	45
15	17	42	11	18	30	28	19	18	45	20	7	2	20	55	19	21	43	36	22	31	52
16	17	52	30	18	41	15	19	30	0	20	18	45	21	7	30	21	56	15	22	45	0
17	18	2	49	18	52	2	19	41	15	20	30	28	21	19	41	22	8	54	22	58	7
18	18	13	7	19	2	49	19	52	30	20	42	11	21	31	52	22	21	34	23	11	15
19	18	23	26	19	13	36	20	3	45	20	53	54	21	44	4	22	34	13	23	24	22
20	18	33	45	19	24	22	20	15	0	21	5	37	21	56	15	22	46	52	23	37	30
21	18	44	4	19	35	9	20	26	15	21	17	21	22	8	26	22	59	32	23	50	37
22	18	54	22	19	45	56	20	37	30	21	29	4	22	20	37	23	12	11	24	3	45
23	19	4	41	19	56	43	20	48	45	21	40	47	22	32	49	23	24	51	24	16	52
24	19	15	0	20	7	30	21	0	0	21	52	30	22	45	0	23	37	30	24	30	0
25	19	25	19	20	18	17	21	11	15	22	4	13	22	57	11	23	50	9	24	43	7
26	19	35	37	20	29	4	21	22	30	22	15	56	23	9	22	24	2	49	24	56	15
27	19	45	56	20	39	51	21	33	45	22	27	39	23	21	34	24	15	28	25	9	22
28	19	56	15	20	50	37	21	45	0	22	39	22	23	33	45	24	28	7	25	22	30
29	20	6	34	21	1	24	21	56	15	22	51	6	23	45	56	24	40	47	25	35	37
30	20	16	52	21	12	11	22	7	30	23	2	49	23	58	7	24	53	26	25	48	45
31	20	27	11	21	22	58	22	18	45	23	14	32	24	10	19	25	6	6	26	1	52
32	20	37	30	21	33	45	22	30	0	23	26	15	24	22	30	25	18	45	26	15	0
33	20	47	49	21	44	32	22	41	15	23	37	58	24	34	41	25	31	24	26	28	7
34	20	58	7	21	55	19	22	52	30	23	49	41	24	46	52	25	44	4	26	41	15
35	21	8	26	22	6	6	23	3	45	24	1	24	24	59	4	25	56	43	26	54	22
36	21	18	45	22	16	52	23	15	0	24	13	7	25	11	15	26	9	22	27	7	30
37	21	29	4	22	27	39	23	26	15	24	24	51	25	23	26	26	22	2	27	20	37
38	21	39	22	22	38	26	23	37	30	24	36	34	25	35	37	26	34	41	27	33	45
39	21	49	41	22	49	13	23	48	45	24	48	17	25	47	49	26	47	21	27	46	52
40	22	0	0	23	0	0	24	0	0	25	0	0	26	0	0	27	0	0	28	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes.	29			30			31			32			33			34			35		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	29	0	0	30	0	0	31	0	0	32	0	0	33	0	0	34	0	0	35	0	0
2	20	23	26	21	5	37	21	47	49	22	30	0	23	12	11	23	54	22	24	36	34
3	20	37	2	21	19	41	22	2	21	22	45	0	23	27	39	24	10	19	24	52	58
4	20	50	37	21	33	45	22	16	52	23	0	0	23	43	7	24	26	15	25	9	22
5	21	4	13	21	47	49	22	31	24	23	15	0	23	58	36	24	42	11	25	25	47
6	21	17	49	22	1	52	22	45	56	23	30	0	24	14	4	24	58	7	25	42	11
7	21	31	24	22	15	56	23	0	28	23	45	0	24	29	32	25	14	4	25	58	36
8	21	45	0	22	30	0	23	15	0	24	0	0	24	45	0	25	30	0	26	15	0
9	21	58	36	22	44	4	23	29	32	24	15	0	25	0	28	25	45	56	26	31	24
10	22	12	11	22	58	7	23	44	4	24	30	0	25	15	56	26	1	52	26	47	49
11	22	25	47	23	12	11	23	58	36	24	45	0	25	31	24	26	17	49	27	4	13
12	22	33	22	23	26	15	24	13	7	25	0	0	25	46	52	26	33	45	27	20	37
13	22	52	58	23	40	19	24	27	39	25	15	0	26	2	21	26	49	41	27	37	2
14	23	6	34	23	54	22	24	42	11	25	30	0	26	17	49	27	5	37	27	53	26
15	23	20	9	24	8	26	24	56	43	25	45	0	26	33	17	27	21	34	28	9	51
16	23	33	45	24	32	30	25	11	50	26	0	0	26	48	45	37	37	30	28	26	15
17	23	47	21	24	36	34	25	25	47	26	15	0	27	4	13	27	53	26	28	42	39
18	24	0	56	24	50	37	25	40	19	26	30	0	27	19	41	28	9	22	28	59	4
19	24	14	32	25	4	41	25	54	51	26	45	0	27	35	9	28	25	19	29	16	24
20	24	28	7	25	18	45	26	9	22	27	0	0	27	50	37	28	41	15	29	31	52
21	24	41	43	25	32	49	26	23	54	27	15	0	28	6	6	28	57	11	29	48	17
22	24	55	19	25	46	52	26	38	26	27	30	0	28	21	34	29	13	7	29	4	41
23	25	8	54	26	0	50	26	52	58	27	45	0	28	37	2	29	29	4	30	21	6
24	25	22	30	26	15	0	27	7	30	28	0	0	28	52	30	29	45	0	30	37	30
25	25	36	6	26	29	4	27	22	2	28	15	0	29	7	58	30	0	56	30	53	54
26	25	49	41	26	43	7	27	36	34	28	30	0	29	23	26	30	16	52	30	10	19
27	26	3	17	26	57	21	27	51	6	28	45	0	29	38	54	30	32	49	31	26	43
28	26	16	52	27	11	15	28	5	37	29	0	0	29	54	22	30	48	45	31	43	7
29	26	30	28	27	25	19	28	20	9	29	15	0	30	9	51	31	4	41	31	59	32
30	26	44	4	27	39	22	28	34	41	29	30	0	30	25	19	31	20	37	32	15	56
31	26	57	39	27	53	26	28	49	13	29	45	0	30	40	47	31	36	34	32	32	21
32	27	11	15	28	7	30	29	3	45	30	0	0	30	56	15	31	52	30	32	48	45
33	27	24	51	28	21	34	29	18	17	30	15	0	31	11	43	32	8	26	32	5	9
34	27	38	26	28	35	37	29	32	49	30	30	0	31	27	11	32	24	22	33	21	34
35	27	52	2	28	49	41	29	47	21	30	45	6	31	42	39	32	40	16	33	37	58
36	28	5	37	29	3	45	30	1	52	31	0	0	31	58	7	32	56	15	33	54	22
37	28	19	13	29	17	49	30	16	24	31	15	0	32	13	36	33	12	11	34	10	47
38	28	32	49	29	31	5[illegible]	30	30	56	31	30	0	32	29	4	33	28	7	34	27	11
39	28	46	24	29	45	56	30	45	28	31	45	0	32	44	32	33	44	4	34	43	36
40	29	0	0	30	0	0	31	0	0	32	0	0	33	0	0	34	0	0	35	0	0

Partes	36			37			38			39			40			41			42		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	36	0	0	37	0	0	38	0	0	39	0	0	40	0	0	41	0	0	42	0	0
2	25	18	45	26	0	56	26	43	7	27	25	19	28	7	30	28	49	41	29	31	52
3	25	35	37	26	18	17	27	0	56	27	43	36	28	26	15	29	8	54	29	51	34
4	25	52	30	26	35	37	27	18	45	28	1	52	28	45	0	29	28	7	30	11	15
5	26	9	22	26	52	58	27	36	34	28	20	9	29	3	45	29	47	21	30	30	56
6	26	26	15	27	10	19	27	54	22	28	38	26	29	22	30	30	6	34	30	50	37
7	26	43	7	27	27	39	28	12	11	28	56	43	29	41	15	30	25	47	31	10	19
8	27	0	0	27	45	0	28	30	0	29	15	0	30	0	0	30	45	0	31	30	0
9	27	16	52	28	2	21	28	47	49	29	33	17	30	18	45	31	4	13	31	49	41
10	27	33	45	28	19	41	29	5	37	29	51	34	30	37	30	31	23	26	32	9	22
11	27	50	37	28	37	2	29	23	26	30	9	51	30	56	15	31	42	39	32	29	4
12	28	7	30	28	54	22	29	41	15	30	28	7	31	15	0	32	1	52	32	48	45
13	28	24	22	29	11	43	29	54	4	30	46	24	31	33	45	32	21	6	33	8	26
14	28	41	15	29	29	4	30	16	52	31	4	41	31	52	30	32	40	19	33	28	7
15	28	58	7	29	46	24	30	34	41	31	22	58	32	11	15	32	59	32	33	47	49
16	29	15	0	30	3	45	30	32	30	31	41	15	32	30	0	33	18	45	34	7	30
17	29	31	52	30	21	9	31	10	19	31	59	32	32	48	45	33	37	58	34	27	11
18	29	48	45	30	38	26	31	28	7	32	17	49	33	7	30	33	57	11	34	46	52
19	30	5	37	30	55	47	31	45	56	32	36	6	33	26	15	34	16	24	35	6	34
20	30	22	30	31	13	7	32	3	45	32	54	22	33	45	0	34	35	37	35	26	15
21	30	39	22	31	30	28	32	21	34	33	12	39	34	3	45	34	54	51	35	45	56
22	30	56	15	31	47	49	32	39	22	33	30	56	34	22	30	35	14	4	36	5	37
23	31	13	7	32	5	9	32	57	11	33	49	13	34	41	15	35	33	17	36	25	19
24	31	30	0	32	22	30	33	15	0	34	7	30	35	0	0	35	52	30	36	45	0
25	31	46	52	32	39	51	33	32	49	34	25	47	35	18	45	36	11	43	37	4	41
26	32	3	45	32	57	11	33	50	37	34	44	4	35	37	30	36	30	56	37	24	22
27	32	20	37	33	14	32	34	8	26	35	2	21	35	56	15	36	50	9	37	44	4
28	32	37	30	33	31	52	34	26	15	35	20	37	36	15	0	37	9	22	38	3	45
29	32	54	22	33	49	13	34	44	4	35	38	54	36	33	45	37	28	36	38	23	26
30	33	11	15	34	6	34	35	1	52	35	57	11	36	52	30	37	47	49	38	43	7
31	33	28	7	34	23	54	35	19	41	36	15	28	37	11	15	38	7	2	39	2	49
32	33	45	0	34	41	15	35	37	30	36	33	45	37	30	0	38	26	15	39	22	30
33	34	1	52	34	58	36	35	55	19	36	52	2	37	48	45	38	45	28	39	42	11
34	34	18	45	35	15	56	36	13	7	37	10	19	38	7	30	39	4	41	40	1	52
35	34	35	37	35	33	17	36	30	56	37	28	36	38	26	15	39	23	54	40	21	34
36	34	52	30	35	50	37	36	48	45	37	46	52	38	45	0	39	43	7	40	41	15
37	35	9	22	35	7	38	37	6	34	38	5	9	39	3	45	40	2	21	41	0	56
38	35	26	15	36	25	19	37	24	22	38	23	26	39	22	30	40	21	34	41	20	37
39	35	43	7	36	42	39	37	32	11	38	41	43	39	41	15	40	40	47	41	40	19
40	36	0	0	37	0	0	38	0	0	39	0	0	40	0	0	41	0	0	42	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes	43			44			45			46			47			48			49		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	43	0	0	44	0	0	45	0	0	46	0	0	47	0	0	48	0	0	49	0	0
2	30	14	4	30	56	15	31	38	26	33	20	37	33	2	49	33	45	0	34	27	11
3	30	34	13	31	16	52	31	59	32	32	42	11	33	24	51	34	7	30	34	50	9
4	30	54	22	31	37	30	32	20	37	33	3	45	33	46	52	34	30	0	35	13	7
5	31	14	32	31	58	7	32	41	43	33	25	19	34	8	54	34	52	30	35	36	6
6	31	34	41	32	18	45	33	2	49	33	46	52	54	30	56	35	15	0	35	59	4
7	31	54	51	32	39	22	33	23	54	34	8	26	34	52	58	33	37	30	36	22	2
8	32	15	0	33	0	0	33	45	0	34	30	0	35	15	0	36	0	0	36	45	0
9	32	35	9	33	20	37	34	6	6	34	51	34	35	37	2	36	22	30	37	7	58
10	32	55	19	33	41	15	34	27	11	35	13	7	35	59	4	36	45	0	37	30	56
11	33	15	28	34	1	52	34	48	17	35	34	41	36	21	6	37	7	30	37	53	54
12	33	35	37	34	22	30	35	9	22	35	56	15	36	43	7	37	30	0	38	16	52
13	33	55	57	34	43	7	35	30	28	36	17	49	37	5	9	37	52	30	38	39	51
14	34	15	56	35	3	45	35	51	34	36	39	22	37	27	11	38	15	0	39	2	49
15	34	36	6	35	24	22	36	12	39	37	0	56	37	49	13	38	37	30	39	25	47
16	34	56	15	35	45	0	36	33	45	37	22	30	38	11	15	39	0	0	39	48	45
17	35	16	24	36	5	37	36	54	51	37	44	4	38	33	17	39	22	30	40	11	43
18	35	36	34	36	26	15	37	15	56	38	5	37	38	55	19	39	45	0	40	34	41
19	35	56	43	36	46	52	37	37	2	38	27	11	39	17	21	40	7	30	40	57	39
20	36	16	52	37	7	30	37	58	7	38	48	45	39	39	22	40	30	0	41	20	37
21	36	37	2	37	28	7	38	19	13	39	10	19	40	1	24	40	52	30	41	43	36
22	36	57	11	37	48	45	38	40	19	39	31	52	40	23	26	41	15	0	42	6	34
23	37	17	21	38	9	22	39	1	24	39	53	26	40	45	28	41	37	30	42	29	32
24	37	37	30	38	30	0	39	22	30	40	15	0	41	7	30	42	0	0	42	52	30
25	37	57	39	38	50	37	39	43	36	40	36	34	41	29	32	42	22	30	43	15	28
26	38	17	49	39	11	15	40	4	41	40	58	7	41	51	34	42	45	0	43	38	26
27	38	37	58	39	31	52	40	25	47	41	19	41	42	13	36	43	7	30	44	1	24
28	38	58	7	39	52	30	40	46	52	41	41	15	42	35	37	43	30	0	44	24	22
29	39	18	17	40	13	7	41	7	58	42	2	49	42	57	39	43	52	30	44	47	21
30	39	38	26	40	33	45	41	29	4	42	24	22	43	19	41	44	15	0	45	10	19
31	39	58	36	40	54	22	41	50	9	42	45	56	43	41	43	44	37	30	45	33	17
32	40	18	45	41	15	0	42	11	15	43	7	30	44	3	45	45	0	0	45	56	15
33	40	38	5	41	35	37	42	32	21	43	29	4	44	25	47	45	22	30	46	19	13
34	40	59	4	41	56	15	42	53	26	43	50	37	44	47	49	45	45	0	46	42	11
35	41	19	13	42	16	52	43	14	32	44	12	11	45	9	51	46	7	30	47	5	9
36	41	39	22	42	37	30	43	35	37	44	33	45	45	31	52	46	30	0	47	28	7
37	41	59	32	42	58	7	43	56	43	44	55	19	45	53	54	46	52	30	47	51	6
38	42	19	41	43	18	45	44	17	49	45	16	52	46	15	56	47	15	0	48	14	4
39	42	39	51	43	39	22	44	38	54	45	38	26	46	37	58	47	37	30	48	37	2
40	43	0	0	44	0	0	45	0	0	46	0	0	47	0	0	48	0	0	49	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes	50			51			52			53			54			55			56		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	50	0	0	51	0	0	52	0	0	53	0	0	54	0	0	55	0	0	56	0	0
2	35	9	22	35	51	34	36	33	45	37	15	56	37	58	7	38	40	19	39	22	30
3	35	32	49	36	15	28	36	58	7	37	40	47	38	23	26	39	6	6	39	48	45
4	35	56	15	36	39	22	37	22	30	38	5	37	38	48	45	39	31	52	40	15	0
5	36	19	41	37	3	17	37	46	52	38	30	28	39	14	4	39	57	39	40	41	15
6	36	43	7	37	27	11	38	11	15	38	55	19	39	39	22	40	23	26	41	7	30
7	37	6	34	37	51	6	38	35	37	39	20	9	40	14	41	40	49	13	41	33	45
8	37	30	0	38	15	0	39	0	0	39	45	0	40	30	0	41	15	0	42	0	0
9	37	53	26	38	38	54	39	24	22	40	9	51	40	55	19	41	40	47	42	26	15
10	38	16	52	39	2	49	39	48	45	40	34	41	41	20	37	42	6	34	42	52	30
11	38	40	19	39	26	43	40	13	7	40	59	32	41	45	56	42	32	21	43	18	45
12	39	3	45	39	50	37	40	37	30	41	42	22	42	11	15	42	58	7	43	45	0
13	39	27	11	40	14	32	41	1	52	41	49	13	42	36	34	43	23	54	44	11	15
14	39	50	37	40	38	26	41	26	15	42	14	4	43	1	52	43	49	41	44	37	30
15	40	14	4	41	2	21	41	50	37	42	38	54	43	27	11	44	15	28	45	3	45
16	40	37	30	41	26	15	42	15	0	43	3	45	43	52	30	44	41	15	45	30	0
17	41	0	56	41	50	9	42	39	22	43	28	36	44	17	49	45	7	2	45	56	15
18	41	24	22	42	14	4	43	3	45	43	53	26	44	43	7	45	32	49	46	22	30
19	41	47	49	42	37	58	43	28	7	44	18	17	45	8	26	45	58	36	46	48	45
20	42	11	15	43	1	52	43	52	30	44	43	7	45	33	45	46	24	22	47	15	0
21	42	34	41	43	25	47	44	16	52	45	7	58	45	59	4	46	50	9	47	41	15
22	42	58	7	43	49	41	44	41	15	45	32	49	46	24	22	47	15	56	48	7	30
23	43	21	34	44	13	36	45	5	37	45	57	39	46	49	41	47	41	43	48	33	45
24	43	45	0	44	37	30	45	30	0	46	22	30	47	15	0	48	7	30	49	0	0
25	44	8	26	45	1	24	45	54	22	46	47	21	47	40	19	48	33	17	49	26	15
26	44	31	52	45	25	19	46	18	45	47	12	11	48	5	37	48	59	4	49	52	30
27	44	55	19	45	49	13	46	43	7	47	37	2	48	30	56	49	24	51	50	18	45
28	45	18	45	46	13	7	47	7	30	48	1	52	48	56	15	49	50	37	50	45	0
29	45	42	11	46	37	2	47	31	52	48	26	43	49	21	34	50	16	24	51	11	15
30	46	5	37	47	0	56	47	56	15	48	51	34	49	46	52	50	42	11	51	37	30
31	46	29	4	47	24	51	48	20	37	49	16	24	50	12	11	51	7	58	52	3	45
32	46	52	30	47	48	45	48	45	0	49	41	15	50	37	30	51	33	45	52	30	0
33	47	15	56	48	12	39	49	9	22	50	6	6	51	2	49	51	59	32	52	56	15
34	47	39	22	48	36	34	49	33	45	50	30	56	51	28	7	52	25	19	53	22	30
35	48	2	49	49	0	28	49	58	7	50	55	47	51	53	26	52	51	6	53	48	45
36	48	26	15	49	24	22	50	22	30	51	20	37	52	18	45	53	16	52	54	15	0
37	48	49	41	49	48	17	50	46	52	51	45	28	52	44	4	53	42	39	54	41	15
38	49	13	7	50	12	11	51	11	15	52	10	19	53	9	22	54	8	26	55	7	30
39	49	36	34	50	36	6	51	35	37	52	35	9	53	34	41	54	34	13	55	33	45
40	50	0	0	51	0	0	52	0	0	53	0	0	54	0	0	55	0	0	56	0	0

Partes	57			58			59			60			61			62			63		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	57	0	0	58	0	0	59	0	0	60	0	0	61	0	0	62	0	0	63	0	0
2	40	4	41	40	46	52	41	29	4	42	11	15	42	53	26	43	35	37	44	17	49
3	40	31	24	41	14	4	41	56	43	42	39	22	43	22	2	44	4	41	44	47	21
4	40	58	7	41	41	15	42	24	22	43	7	30	43	50	37	44	33	45	45	16	52
5	41	24	51	42	8	26	42	52	2	43	35	37	44	19	13	45	2	49	45	46	24
6	41	11	34	42	35	37	42	19	41	44	3	45	44	47	49	45	31	52	46	15	56
7	42	18	17	43	2	49	43	47	21	44	31	52	45	16	24	46	0	56	46	45	28
8	42	45	0	43	30	0	44	15	0	45	0	0	45	45	0	46	30	0	47	15	0
9	43	11	43	43	57	11	44	42	39	45	28	7	46	13	36	46	59	4	47	44	32
10	43	38	26	44	24	22	45	10	19	45	56	15	46	42	11	47	28	7	48	14	4
11	44	5	9	44	51	34	45	37	58	46	24	22	47	10	47	47	57	11	48	43	36
12	44	31	52	45	18	45	46	5	37	46	52	30	47	32	22	48	26	15	49	13	7
13	44	58	36	45	45	56	46	33	17	47	20	37	48	7	58	48	55	19	59	42	39
14	45	25	19	46	13	7	47	0	56	47	48	45	48	36	34	49	24	22	50	12	11
15	45	52	2	46	40	19	47	28	36	48	16	52	49	5	9	49	53	26	50	41	43
16	46	18	45	47	7	30	47	56	15	48	45	0	49	33	45	50	22	30	51	11	15
17	46	45	28	47	34	41	48	23	54	49	13	7	50	2	21	50	51	34	51	40	47
18	47	12	11	48	1	52	48	51	34	49	41	15	50	30	56	51	20	37	52	10	19
19	47	38	54	48	29	4	49	19	13	50	9	22	50	59	32	51	49	41	52	39	51
20	48	5	37	48	56	15	49	46	52	50	37	30	51	28	7	52	18	45	53	9	22
21	48	32	21	49	23	26	50	14	32	51	5	37	51	56	43	52	47	49	53	38	54
22	48	59	4	49	50	37	50	42	11	51	33	45	52	25	19	53	16	52	54	8	26
23	49	25	47	50	17	49	51	9	51	52	1	52	52	53	54	53	45	56	54	37	58
24	49	52	30	50	45	0	51	37	30	52	30	0	53	22	30	54	15	0	55	7	30
25	50	19	13	51	12	11	52	5	9	52	58	7	53	51	6	54	44	4	55	37	2
26	50	45	56	51	33	22	52	32	49	53	26	15	54	19	41	55	13	7	56	6	34
27	51	12	39	52	6	34	53	0	28	53	54	22	54	48	17	55	42	11	56	36	6
28	51	39	22	52	33	45	53	28	7	54	22	30	55	16	52	56	11	15	57	5	37
29	52	6	6	53	0	56	53	55	47	54	50	37	55	45	28	56	40	19	57	35	9
30	52	32	49	53	28	7	54	23	26	55	18	45	56	14	4	57	9	22	58	4	41
31	52	59	32	53	55	19	54	51	6	55	46	52	56	42	39	57	38	26	58	34	13
32	53	56	15	54	22	30	55	18	45	56	15	0	57	11	15	58	7	30	59	3	45
33	53	52	58	54	49	41	55	46	24	56	43	7	57	39	51	58	36	34	59	33	17
34	54	19	41	55	16	52	56	14	4	57	11	15	58	8	26	59	5	37	60	2	49
35	54	46	24	55	44	4	56	41	43	57	39	22	58	37	2	59	34	41	60	32	21
36	55	13	7	56	11	15	57	9	22	58	7	30	59	5	37	60	3	45	61	1	52
37	55	39	51	56	38	26	57	37	2	58	35	37	59	34	13	60	32	49	61	31	24
38	56	9	34	57	5	37	58	4	41	59	3	45	60	2	49	61	1	52	62	0	56
39	56	33	17	57	32	49	58	32	21	59	31	52	60	31	24	61	30	56	62	30	28
40	57	0	0	58	0	0	59	0	0	60	0	0	61	0	0	62	0	0	63	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes	64			65			66			67			68			69			70		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	64	0	0	65	0	0	66	0	0	67	0	0	68	0	0	69	0	0	70	0	0
2	45	0	0	45	42	11	46	24	22	47	6	34	47	48	45	48	30	56	49	13	7
3	45	30	0	46	12	39	46	55	19	47	37	58	48	20	37	49	3	17	49	45	56
4	46	0	0	46	43	7	47	26	15	48	9	22	48	52	30	49	35	37	50	18	45
5	46	30	0	47	13	36	47	57	11	48	40	47	49	24	22	50	7	58	50	51	34
6	47	0	0	47	44	4	48	28	7	49	12	11	49	56	15	50	40	19	51	24	22
7	47	30	0	48	14	32	48	59	4	49	43	36	50	28	7	51	12	39	51	57	11
8	48	0	0	48	45	0	49	30	0	50	15	0	51	0	0	51	45	0	52	30	0
9	48	30	0	49	15	28	50	0	56	50	46	24	51	31	52	52	17	21	53	2	49
10	49	0	0	49	45	56	50	31	52	51	17	49	52	3	45	52	49	41	53	35	37
11	49	30	0	50	16	24	51	2	49	51	49	13	52	35	37	53	22	2	54	8	26
12	50	0	0	50	46	52	51	33	45	52	20	37	53	7	30	53	54	22	54	41	15
13	50	30	0	51	17	21	52	4	41	52	52	2	53	39	22	54	26	43	55	14	4
14	51	0	0	51	47	49	52	35	37	53	23	26	54	11	15	55	59	4	55	46	52
15	51	30	0	52	18	17	53	6	34	53	54	51	54	43	7	55	31	24	56	19	41
16	52	0	0	52	48	45	53	37	30	54	26	15	55	15	0	56	3	45	56	52	30
17	52	30	0	53	19	13	54	8	26	54	57	39	55	46	52	56	36	6	57	25	19
18	53	0	0	53	49	41	54	39	22	55	29	4	56	18	45	57	8	26	57	58	7
19	53	30	0	54	20	9	55	10	19	56	0	28	56	50	37	57	40	47	58	30	56
20	54	0	0	54	50	37	55	41	15	56	31	52	57	22	30	58	13	7	59	3	45
21	54	30	0	55	21	4	56	12	11	56	3	17	57	54	22	58	45	28	59	36	34
22	55	0	0	55	51	34	56	43	7	57	34	41	58	26	15	59	17	49	60	9	22
23	55	30	0	56	22	2	57	14	4	58	6	6	58	58	7	59	50	9	60	42	11
24	56	0	0	56	52	30	57	45	0	58	37	30	59	30	0	60	22	30	61	15	0
25	56	30	0	57	22	58	58	15	56	59	8	54	60	1	52	60	54	51	61	47	49
26	57	0	0	57	53	26	58	46	52	59	40	19	60	33	45	61	27	11	62	20	37
27	57	30	0	58	23	54	59	17	49	60	11	43	61	5	37	61	59	32	62	13	26
28	58	0	0	58	54	22	59	48	45	60	43	7	61	37	30	62	31	52	63	26	15
29	58	30	0	59	24	51	60	19	41	61	14	32	62	9	22	63	4	13	63	59	4
30	59	0	0	59	55	19	60	50	37	61	45	56	62	41	15	63	36	34	64	31	52
31	59	30	0	60	25	47	61	21	34	62	17	21	63	13	7	64	8	54	65	4	41
32	60	0	0	60	56	15	61	52	30	62	48	45	63	45	0	64	41	15	65	37	30
33	60	30	0	61	26	43	62	23	26	63	20	9	64	16	52	65	13	36	66	10	19
34	61	0	0	61	57	11	62	54	22	63	51	34	64	48	45	65	45	56	66	43	7
35	61	30	0	62	27	39	63	25	19	64	22	58	65	20	37	66	18	17	67	15	56
36	62	0	0	62	58	7	63	56	15	64	54	22	65	52	30	66	50	37	67	48	45
37	62	30	0	63	28	36	64	27	11	65	25	47	66	24	22	67	22	58	68	21	34
38	63	0	0	63	59	4	64	58	7	65	57	11	66	56	15	67	55	19	68	54	22
39	63	30	6	64	29	32	65	29	4	66	28	36	67	28	7	68	27	39	69	27	11
40	64	0	0	65	0	0	66	0	0	67	0	0	68	0	0	69	0	0	70	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes	71			72			73			74			75			76			77		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	71	0	0	72	0	0	73	0	0	74	0	0	75	0	0	76	0	0	77	0	0
2	49	45	19	50	37	30	51	19	41	52	1	52	52	44	4	53	26	15	54	8	26
3	50	28	36	51	11	15	51	53	54	52	36	34	53	19	13	54	1	52	54	44	32
4	51	1	52	51	45	0	52	28	7	53	11	15	53	54	22	54	37	30	55	20	37
5	51	35	9	52	18	45	53	2	21	53	45	56	54	29	32	55	13	7	55	56	43
6	52	8	26	52	52	30	53	36	34	54	20	37	55	4	41	55	48	45	56	32	49
7	52	41	43	53	26	11	54	10	47	54	55	19	55	39	51	56	24	22	57	8	54
8	53	15	0	54	0	0	54	45	0	55	30	0	56	15	0	57	0	0	57	45	0
9	53	48	17	54	33	45	55	19	13	56	4	41	56	50	9	57	35	37	58	21	6
10	54	21	34	55	7	30	55	53	26	56	39	22	57	25	19	58	11	15	58	57	11
11	54	54	51	55	41	15	56	27	39	57	14	4	58	0	28	58	46	52	59	33	17
12	55	28	7	56	15	0	57	1	52	57	48	45	58	35	37	59	22	30	60	9	22
13	56	1	24	56	48	45	57	36	6	58	23	26	59	10	47	59	58	7	60	45	28
14	56	34	41	57	22	30	58	10	19	58	58	7	59	45	56	60	33	45	61	21	34
15	57	7	58	57	56	15	58	44	32	59	32	49	60	21	6	61	9	22	61	57	39
16	57	41	15	58	30	0	59	18	45	60	7	30	60	56	15	61	45	0	62	33	45
17	58	14	32	59	3	45	59	52	58	60	42	11	61	31	24	62	20	37	63	9	51
18	58	47	49	59	37	30	60	27	11	61	16	52	62	6	34	62	56	15	63	45	56
19	59	21	6	60	11	15	61	1	24	61	51	34	62	41	43	63	31	52	64	22	2
20	59	54	22	60	45	0	61	35	37	62	26	15	63	16	52	64	7	30	64	58	7
21	60	27	39	61	18	45	62	9	51	63	0	56	63	52	2	64	43	7	65	34	13
22	61	0	56	61	52	30	62	44	4	63	35	37	64	27	11	65	18	45	66	10	19
23	61	34	13	62	26	15	63	18	17	64	10	19	65	2	21	65	54	22	66	46	24
24	62	7	30	63	0	0	63	52	30	64	45	0	65	37	30	66	30	0	67	22	30
25	62	40	47	63	33	45	64	26	43	65	19	41	66	12	39	67	5	37	67	58	36
26	63	14	4	64	7	30	65	0	56	65	54	22	66	47	49	67	41	15	68	34	41
27	63	47	21	64	41	15	65	35	9	66	29	4	67	22	58	68	16	52	69	10	47
28	64	20	37	65	15	0	66	9	22	67	3	45	67	58	7	68	52	30	69	46	52
29	64	53	54	65	48	45	66	43	36	67	38	26	68	33	17	69	28	7	70	22	58
30	65	27	11	66	22	30	67	17	49	68	13	7	69	8	26	70	3	45	70	59	4
31	66	0	28	66	56	15	67	52	2	68	47	49	69	43	36	70	39	22	71	35	9
32	66	33	45	67	30	0	68	26	15	69	22	30	70	18	45	71	15	0	72	11	15
33	67	7	2	68	3	45	69	0	28	69	57	11	70	53	54	71	50	37	72	47	21
34	67	40	19	68	37	30	69	34	41	70	31	52	71	29	4	72	26	15	73	23	26
35	68	13	36	69	11	15	70	8	54	71	6	34	72	4	13	73	1	52	73	59	32
36	68	46	52	69	45	0	70	43	7	71	41	15	72	39	22	73	37	30	74	35	37
37	69	20	9	70	18	45	71	17	21	72	15	56	73	14	32	74	13	7	75	11	43
38	69	53	26	70	52	30	71	51	34	72	50	37	73	49	41	74	48	45	75	47	49
39	70	26	43	71	26	15	72	25	47	73	25	19	74	24	51	75	24	22	76	23	54
40	71	0	0	72	0	0	73	0	0	74	0	0	75	0	0	76	0	0	77	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes	78			79			80			81			82			83			84		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	70	0	0	79	0	0	80	0	0	81	0	0	82	0	0	83	0	0	84	0	0
2	54	50	37	55	32	49	56	15	0	56	57	11	56	39	22	58	21	34	59	3	45
3	55	27	11	56	9	51	56	52	30	57	35	9	58	17	49	59	0	28	59	43	7
4	56	3	45	56	46	52	57	30	0	58	13	7	58	56	15	59	39	22	60	22	30
5	56	40	19	57	23	54	58	7	30	58	51	6	59	34	41	60	18	17	61	1	52
6	57	16	52	58	0	56	58	45	0	59	29	4	60	13	7	60	57	11	61	41	15
7	57	53	26	58	37	58	59	22	30	60	7	2	60	51	34	61	36	6	62	20	37
8	58	30	0	59	15	0	60	0	0	60	45	0	61	30	0	62	15	0	63	0	0
9	59	6	34	59	52	2	60	37	30	61	22	58	62	8	26	62	53	54	63	39	22
10	59	43	7	60	29	4	61	15	0	62	0	56	62	46	52	63	32	49	64	18	45
11	60	19	41	61	6	6	61	52	30	62	38	54	63	25	19	64	11	43	64	58	7
12	60	56	15	61	43	7	62	30	0	63	16	52	64	3	45	64	50	37	65	37	30
13	61	32	49	62	20	9	63	7	30	63	54	51	64	42	11	65	29	32	66	16	52
14	62	9	22	62	57	11	63	45	0	64	32	49	65	20	37	66	8	27	66	56	15
15	62	45	56	63	34	13	64	22	30	65	10	47	65	59	4	66	47	21	67	35	37
16	63	22	30	64	11	15	65	0	0	65	48	45	66	37	30	67	26	15	68	15	0
17	63	59	4	64	48	17	65	37	30	66	26	43	67	15	56	68	5	9	68	54	22
18	64	35	37	65	25	19	66	15	0	67	4	41	67	54	22	68	44	4	69	33	45
19	65	12	11	66	2	21	66	52	30	67	42	39	68	32	49	69	23	58	70	13	7
20	65	48	45	66	39	22	67	30	0	68	20	37	69	11	15	70	1	52	70	52	30
21	66	25	19	67	16	24	68	7	30	68	58	36	69	49	41	70	40	47	71	31	52
22	67	1	52	67	53	26	68	45	0	69	36	34	70	28	7	71	19	41	72	11	15
23	67	38	26	68	30	28	69	22	30	70	14	32	71	6	34	71	58	36	72	50	37
24	68	15	0	69	7	30	70	0	0	70	52	30	71	45	0	72	37	30	73	30	0
25	68	51	34	69	44	32	70	37	30	71	30	28	72	23	26	73	16	24	74	9	22
26	69	28	7	70	21	34	71	15	0	72	8	26	73	1	52	73	55	19	74	48	45
27	70	4	41	70	58	36	71	52	30	72	46	24	73	40	19	74	34	13	75	28	7
28	70	41	15	71	35	37	72	30	0	73	24	22	74	18	45	75	13	7	76	7	30
29	71	17	49	72	12	39	73	7	30	74	2	21	74	57	11	75	52	2	76	46	52
30	71	54	22	72	49	41	73	45	0	74	40	19	75	35	37	76	30	56	77	26	15
31	72	30	56	73	26	43	74	22	30	75	18	17	76	14	4	77	9	51	78	5	37
32	73	7	30	74	3	45	75	0	0	75	56	15	76	52	30	77	48	45	78	45	0
33	73	44	4	74	40	47	75	37	30	76	34	13	77	30	56	78	27	39	79	24	22
34	74	20	37	75	17	49	76	15	0	77	12	11	78	9	22	79	6	34	80	3	45
35	74	57	11	75	54	51	76	52	30	77	50	9	78	47	49	79	45	28	80	43	7
36	75	33	45	76	31	52	77	30	0	78	28	7	79	26	15	80	24	22	81	22	30
37	76	10	19	77	8	54	78	7	30	79	6	6	80	4	41	81	3	17	82	1	52
38	76	46	52	77	45	56	78	45	0	79	44	4	80	43	7	81	42	11	82	41	15
39	77	23	26	78	22	58	79	22	30	80	22	2	81	21	34	82	21	6	83	20	37
40	78	0	0	79	0	0	80	0	0	81	0	0	82	0	0	83	0	0	84	0	0

r	85			86			87			88			89			90			91		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	85	0	0	86	0	0	87	0	0	88	0	0	89	0	0	90	0	0	0	0	0
2	59	45	50	60	28	7	61	10	19	61	52	30	62	34	41	63	16	52	63	59	4
3	60	25	47	61	8	26	61	51	6	62	33	45	63	16	24	63	59	4	64	41	43
4	61	5	37	61	48	45	62	31	52	63	15	0	63	58	7	64	41	15	65	24	22
5	61	45	28	62	29	4	63	12	39	63	56	15	64	30	51	65	23	26	66	7	2
6	62	25	19	63	9	22	63	53	26	64	37	30	65	21	34	66	5	37	66	49	41
7	63	5	9	63	49	41	64	34	13	65	18	45	66	3	17	66	47	49	67	32	21
8	63	45	0	64	30	0	65	15	0	66	0	0	66	45	0	67	30	0	68	15	0
9	64	24	51	65	10	19	65	55	47	66	41	15	67	26	43	68	12	11	68	57	39
0	65	4	41	65	50	37	66	36	34	67	22	30	68	8	26	68	54	22	69	40	19
1	65	44	32	66	30	56	67	17	21	68	3	45	68	50	9	69	36	34	70	22	58
2	66	24	22	67	11	15	67	58	7	68	45	0	69	31	52	70	18	45	71	5	37
3	67	4	13	67	51	34	68	38	54	69	26	15	70	13	36	71	0	56	71	48	17
4	67	44	4	68	31	52	69	19	41	70	7	30	70	55	19	71	43	7	72	30	56
5	68	23	54	69	12	11	70	0	28	70	48	45	71	37	2	72	25	19	73	13	36
6	69	3	45	69	52	30	70	41	15	71	30	0	72	18	45	73	7	30	73	56	15
7	69	43	36	70	32	49	71	22	2	72	11	15	73	0	28	73	49	41	74	38	54
8	70	23	26	71	13	7	72	2	49	72	52	30	73	42	11	74	31	52	75	21	34
9	71	3	17	71	53	26	72	43	36	73	33	45	74	23	54	75	14	4	76	4	13
0	71	43	7	72	33	45	73	24	22	74	15	0	75	5	37	75	56	15	76	46	52
1	72	22	58	73	14	4	74	5	9	74	56	15	75	47	21	76	38	26	77	29	4
2	73	2	49	73	54	22	74	45	56	75	37	30	76	29	4	77	20	37	78	12	11
3	73	42	39	74	34	41	75	26	43	76	18	45	77	10	47	78	2	49	78	54	51
4	74	22	30	75	15	0	76	7	30	77	0	0	77	52	30	78	45	0	79	37	39
5	75	2	21	75	55	19	76	48	17	77	41	15	78	34	13	79	27	11	80	20	0
6	75	42	11	76	35	37	77	29	4	78	22	30	79	15	56	80	9	22	81	2	49
7	76	22	2	77	15	56	78	9	51	79	3	45	79	57	39	80	51	34	81	45	28
8	77	1	52	77	56	15	78	50	37	79	45	0	80	39	22	81	33	45	82	28	7
9	77	41	43	78	35	3	79	31	24	80	26	15	81	21	6	82	15	56	83	10	47
0	78	21	34	79	16	52	80	12	11	81	7	30	82	2	49	82	58	7	83	53	27
1	79	1	24	79	57	11	80	52	58	81	48	45	82	44	32	83	40	19	84	36	6
2	79	41	15	80	37	30	81	33	45	82	30	0	83	26	15	84	22	30	85	18	45
3	80	21	6	81	17	49	82	14	32	83	11	15	84	7	58	85	4	41	86	1	24
4	81	0	56	81	58	7	82	55	19	83	52	30	84	49	41	85	46	52	86	44	4
5	81	40	47	82	38	26	83	36	6	84	33	45	85	31	24	86	29	4	87	26	43
6	82	20	37	83	18	45	84	16	52	85	15	0	86	13	7	86	11	15	88	9	22
7	83	0	28	83	59	4	84	57	39	85	56	15	86	54	51	87	53	26	88	52	2
8	83	40	19	84	39	22	85	38	26	86	37	30	87	36	34	88	35	37	89	34	41
9	84	20	9	85	19	41	86	19	13	87	18	45	88	18	17	89	17	49	0	0	0
0	85	0	0	86	0	0	87	0	0	88	0	0	89	0	0	90	0	0	0	0	0

Partes	92			93			94			95			96			97			98		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	64	41	15	65	23	26	66	5	37	66	47	49	67	30	0	68	12	11	68	54	22
3	65	24	22	66	7	2	66	49	41	67	32	21	68	15	0	68	57	39	69	40	19
4	66	7	30	66	50	37	67	33	45	68	16	52	69	0	0	69	43	7	70	26	15
5	66	50	37	67	34	13	68	17	49	69	1	24	69	45	0	70	28	36	71	12	11
6	67	33	45	68	17	49	69	1	52	69	45	56	70	30	0	71	14	4	71	58	7
7	68	16	52	69	1	24	69	45	56	70	30	28	71	15	0	71	59	32	72	44	4
8	69	0	0	69	45	0	70	30	0	71	15	0	72	0	0	72	45	0	73	30	0
9	69	43	7	70	28	36	71	14	4	71	59	32	72	45	0	73	30	28	74	15	56
10	70	26	15	71	12	11	71	58	7	72	44	4	73	30	0	74	15	56	75	1	52
11	71	9	22	71	55	47	72	42	11	73	28	36	74	15	0	75	1	24	75	47	49
12	71	52	30	72	39	22	73	26	15	74	13	7	75	0	0	75	46	52	76	33	45
13	72	35	37	73	22	58	74	10	19	74	57	39	75	45	0	76	32	21	77	19	41
14	73	18	35	74	6	34	74	54	22	75	42	11	76	30	0	77	17	49	78	5	37
15	74	1	52	74	50	9	75	38	26	76	26	43	77	15	0	78	3	17	78	51	34
16	74	45	0	75	33	45	76	22	30	77	11	15	78	0	0	78	48	45	79	37	30
17	75	28	7	76	17	21	77	6	34	77	55	47	78	45	0	79	34	13	80	23	26
18	76	11	15	77	0	56	77	50	37	78	40	19	79	30	0	80	19	41	81	9	22
19	76	54	22	77	44	32	78	34	41	79	24	51	80	15	0	81	5	9	81	55	19
20	77	37	30	78	28	7	79	18	45	80	9	22	81	0	0	81	50	37	82	41	15
21	78	20	37	79	11	43	80	2	49	80	53	54	81	45	0	82	36	6	83	27	11
22	79	3	45	79	55	19	80	46	50	81	38	26	82	30	0	83	21	34	84	13	7
23	79	46	52	80	38	54	81	30	56	82	22	58	83	15	0	84	7	2	84	59	4
24	80	30	0	81	22	30	82	15	0	83	7	30	84	0	0	84	52	30	85	45	0
25	81	13	7	82	6	6	82	59	4	83	52	2	84	45	0	85	37	58	86	30	56
26	81	56	15	82	49	41	83	43	7	84	36	34	85	30	0	86	23	26	87	16	52
27	82	39	22	83	33	17	84	27	11	85	21	6	86	15	0	87	8	54	88	2	49
28	83	22	30	84	16	52	85	11	15	86	5	37	87	0	0	87	54	22	88	48	45
29	84	5	37	85	0	28	85	55	19	86	50	9	87	45	0	88	39	51	89	34	41
30	84	48	45	85	44	4	86	39	22	87	34	41	88	30	0	89	25	19	0	0	0
31	85	31	52	86	27	39	87	23	26	88	19	13	89	15	0	0	0	0			
32	86	15	0	87	11	15	88	7	30	89	3	45	90	0	0	0	0	8			
33	86	58	7	87	54	51	88	51	34	89	48	17	0	0	0	0	0	0			
34	87	41	15	88	38	26	89	35	37	0	0	0	0	0	0						
35	88	24	22	89	22	2	0	0	0												
36	89	7	30	0	0	0															
37	89	50	37	0	0	0															
38	0	0	0	0	0	0															

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Numerus ſiue ordo Quadratorum.

Partes	99			100			101			102			103			104			105		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	69	36	34	70	18	45	71	0	56	71	43	7	72	25	19	73	7	30	73	49	41
3	70	22	58	71	5	37	71	48	17	72	30	56	73	13	36	73	56	15	74	37	58
4	71	9	22	71	52	30	72	35	37	73	18	45	74	1	52	74	45	0	75	28	7
5	71	55	47	72	39	22	73	22	58	74	6	34	74	50	9	75	35	45	76	17	21
6	72	42	11	73	26	15	74	10	19	74	54	22	75	38	26	76	22	30	77	6	34
7	73	28	36	74	13	7	74	57	39	75	42	11	76	26	43	77	11	15	77	55	47
8	74	15	0	75	0	0	75	45	0	76	30	0	77	15	0	78	0	0	78	45	0
9	75	1	24	75	46	52	76	32	21	77	17	49	78	3	17	78	48	45	79	34	13
10	75	47	49	76	33	45	77	19	41	78	5	37	78	51	34	79	37	30	80	23	26
11	76	34	13	77	20	37	78	9	2	78	53	26	79	39	51	80	26	15	81	12	39
12	77	20	37	78	7	30	78	54	22	79	41	15	80	28	7	81	15	0	82	1	52
13	78	7	2	78	54	22	79	41	43	80	29	4	81	16	24	82	3	45	82	51	6
14	78	53	26	79	41	15	80	29	4	81	16	52	82	4	41	82	52	30	83	40	19
15	79	39	51	80	28	7	81	16	24	82	4	41	82	52	58	83	41	15	84	20	32
16	80	26	15	81	15	0	82	3	45	82	52	30	83	41	15	84	30	0	85	18	45
17	81	12	39	82	1	52	82	51	6	83	40	19	84	29	32	85	18	45	86	7	58
18	81	59	4	82	48	45	83	37	30	84	28	7	85	17	49	86	7	30	86	57	11
19	82	45	28	83	35	37	84	25	47	85	15	56	86	6	6	86	56	15	87	46	24
20	83	31	52	84	22	30	85	13	7	86	3	45	86	54	22	87	45	0	88	35	37
21	84	18	17	85	9	22	86	0	82	86	51	34	87	42	39	88	33	45	30	24	51
22	85	4	41	85	56	15	86	47	49	87	39	22	88	30	56	89	22	30	0	0	0
23	85	51	6	86	43	7	87	35	9	88	27	11	89	19	13	0	0	0	0	0	0
24	86	37	30	87	30	0	88	22	30	89	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	87	23	54	88	16	52	89	9	51	0	0	0									
26	88	10	19	89	3	45	89	57	11	0	0	0									
27	88	56	43	89	50	37	0	0	0	0	0	0									
28	89	43	7	0	0	0															
29	0	0	0	0	0	0															
30	0	0	0																		

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

Partes	106			107			108			109			110			111			112		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	74	31	52	75	14	4	75	56	15	75	38	26	77	20	37	78	2	49	78	45	0
3	75	21	34	76	4	13	76	46	52	77	29	32	78	12	11	78	54	51	79	52	30
4	76	11	15	76	54	22	77	37	30	78	20	37	79	3	45	79	46	52	80	30	0
5	77	0	56	77	44	32	78	28	7	79	11	43	79	55	19	80	38	54	81	22	30
6	77	50	37	78	34	41	79	18	45	80	2	49	80	46	52	81	30	56	82	15	0
7	78	40	19	79	24	51	80	9	22	80	53	54	81	38	26	82	22	58	83	7	30
8	79	30	0	80	15	0	81	0	0	81	45	0	82	30	0	83	15	0	84	0	0
9	80	10	41	81	5	9	81	50	37	82	36	6	83	21	34	84	7	2	84	52	30
10	81	9	22	81	55	19	82	41	15	83	27	11	84	13	7	84	59	4	85	45	0
11	81	59	4	82	45	28	83	31	52	84	18	17	85	4	41	85	51	6	86	37	30
12	82	48	45	83	35	37	84	22	30	85	9	22	85	56	15	86	43	7	87	30	0
13	83	38	26	84	25	47	85	13	7	86	0	28	86	47	49	87	35	9	88	22	30
14	84	28	7	85	15	56	86	3	45	86	51	34	87	39	22	88	27	11	89	15	0
15	85	17	49	86	6	6	86	54	22	87	42	39	88	30	56	89	19	13	0	0	0
16	86	7	30	86	56	15	87	45	0	88	33	45	89	22	30	0	0	0			
17	86	57	11	87	46	24	88	35	37	89	24	51	0	0	0	0	0	0			
18	87	46	52	88	36	34	89	26	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
19	88	36	34	89	26	43	0	0	0												
20	89	26	15	0	0	0	0	0	0												
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0												

Partes	113			114			115			116			117			118			119		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	79	27	11	80	9	22	80	51	34	81	33	45	82	15	56	82	58	7	83	40	19
3	80	20	9	81	2	49	81	45	28	82	28	7	83	10	47	83	53	26	84	36	6
4	81	13	7	81	56	15	82	39	22	83	22	30	84	5	37	84	48	45	85	31	52
5	83	6	6	82	49	41	83	33	17	84	16	52	85	0	28	85	44	4	86	27	39
6	82	59	4	83	43	7	84	27	11	85	11	15	85	55	19	86	39	22	87	23	26
7	83	52	2	84	36	34	85	21	6	86	5	37	86	50	9	87	34	41	88	19	13
8	84	45	0	85	30	0	86	15	0	87	0	0	87	45	0	88	30	0	89	15	0
9	85	37	58	86	23	26	87	8	54	87	54	22	88	39	51	89	25	19	0	0	0
10	86	30	56	87	16	52	88	2	49	88	48	45	89	34	41	0	0	0	0	0	0
11	87	23	54	88	10	19	88	56	43	89	43	7	0	0	0	0	0	0			
12	88	16	52	89	3	45	0	0	0	0	0	0									
13	89	9	51	89	57	11	0	0	0												
14	0	0	0	0	0	0															
15	0	0	0																		

Partes	120			121			122			123			124			125			126		
	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	84	22	30	85	4	41	85	46	52	86	29	4	87	11	15	87	53	27	88	35	37
3	85	18	45	86	1	24	86	44	4	87	26	43	88	9	22	88	52	2	89	34	41
4	86	15	0	86	58	7	87	41	15	88	24	22	89	7	30	89	50	37	0	0	0
5	87	11	15	87	54	51	88	38	26	89	22	2	0	0	0	0	0	0	0	0	8
6	88	7	30	88	51	34	89	35	37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	89	3	45	89	48	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	90	0	0	0	0	0															
9	0	0	0																		

Partes	127			128		
	G	M	S	G	M	S
1	0	0	0	0	0	0
2	89	17	49	90	0	0
3	0	0	0	0	0	0

Numerus ſiue ordo Quadrantum.

10. QVANDO

10. QVANDO intra Quadrantem non deſcripti ſunt plures quadrantes, ſed vnicus tantum adeſt in 90. gradus exquiſitè diſtributus, cognoſcemus ſolo circini beneficio, quot Minuta, ac ſecunda in quauis gradus particula contineantur: id quod etiam in libello de vſu, & fabrica inſtrumenti horologiorũ, & in Aſtrolabio fecimus, hoc ſcilicet modo. Sit data verbi gratia particula t u, in gradu 20. ſuperioris Quadrantis BC. Sumatur ea diligentiſsimè beneficio circini, & à principio Quadrantis, id eſt, à puncto C, incipiendo, eadem apertura circini accipiantur 60. æquales particulæ vſque ad punctum X, ita vt arcus CX, ſexagecuplus ſit arcus t u: Quot .n. gradus integri in hoc arcu ſexagecuplo comprehenduntur, tot minuta complectetur particula data t u. Et ſi vltra gradus integros in arcu CX, ſuperſit aliqua particula, accipiatur ea ſexagies quoque, initio facto à puncto C. Nam quot gradus integri in hoc arcu ſexagecuplo continentur, tot ſecunda vltra Minuta inuenta continebuntur in data particula t u. Quod ſi adhuc aliquid ſuperſit, reperientur eodem modo Tertia, &c. Itaque cum in arcu CX, qui ſexagecuplus eſt particulæ t u, contineantur 40. gradus integri, comprehendet particula t u, quadraginta Minuta, & inſuper tot ſecunda, quot gradus continentur in arcu, qui ſexagecuplus ſit particulæ vltra 40. gradus in arcu CX, contentæ, &c.

Quo pacto per circinum deprehendantur Minuta, ac ſecunda in quauis propoſita gradus particula.

HOC autem ita demonſtro. Quã proportionem habet arcus 60. graduum ad 1. gradum, eam habet arcus CX. ad particulam t u, cum vtrobique proportio ſit ſexagecupla. Igitur permutando erit, vt arcus 60. graduum ad arcum CX, ita 1. gradus ad particulam t u: Ac proinde quot partes ſexageſimæ arcus 60. graduum, hoc eſt, quot gradus in arcu CX, continentur, tot ſexageſimæ partes vnius gradus, id eſt, tot minuta in particula t u, exiſtent. Item quam proportionem habet arcus 60. Minutorum ad 1. Minutum eam habet arcus ſexagecuplus particulæ, quæ vltra gradus integros vſque ad X, ſupereſt ad hanc ipſam particulam. Permutando igitur erit, vt arcus 60. Minutorum ad arcum ſexagecuplum dictæ particulæ reliquæ, ita 1. Minutum ad dictam particulam reliquam. Quare quot partes ſexageſimæ arcus 60. Minutorum, hoc eſt, quot minuta in arcu dictæ particulæ ſexagecuplo (ſumendo nunc gradus Quadrantis BC, pro Minutis) continentur, tot partes ſexageſimæ vnius Minuti, id eſt, tot Secunda, in reliqua illa particula includentur, & ſic deinceps, ſi opus ſit, de Tertijs, Quartis, &c. intelligatur. Sed ſatis eſt, meo iudicio, ſi minuta diligenter inquirantur. Et ſi quidem particula remanens maior fuerit ſemiſſe gradus, pro illa Minutum aſſumatur, Minutiſque inuentis adijciatur, quod tunc in illa particula contineantur plura Secunda quam 30. Si verò eadem particula ſemiſſe gradus fuerit minor, nihil Minutis inuẽtis adijciatur, quod tunc in illa particula pauciora Secũda includantur, q̃ 30. Si deniq; dicta particula ſemiſsi grad. fuerit æqualis, liberũ ſit addere Minutis inuẽtis vnum Minutũ, vel non addere.

11. QVIA verò facilè error committi poteſt, ſi circino particulam dictam gradus, vel minuti ſexagies ordine ſumere velimus, rectius feceris, quando particula data ſemiſſe gradus minor eſt, ſi eam vna cum præcedente gradu acceptam primo loco quintuples, deinde hunc arcum quintuplũ duples, tertio hũc arcum duplum triples, ac tandem quarto hunc arcum triplum iterum duples. Vltimus enim hic arcus erit datæ particulæ vna cum gradu accepto ſexagecuplus. Quare ſi ex eo demãtur 60. gradus, indicabunt reliqui gradus numerũ minutorum in data particula contentorum. Quod ſi per æſtimationẽ cognoueris,

parti-

particulam ſemiſſe gradus minorem non ſuperare min. 24. (Nam ſi ſuperaret 24. minuta, non poſſemus ratione iam explicanda inquirere minuta; propterea quod circumducendo circinum, totum Quadrantem excederemus, vt patebit.) commodius minuta datæ particulæ cognoſcemus hoc modo. Datam particulam cum gradu præcedenti primo loco quadruplicabimus: deinde hunc arcum quadruplum duplabimus, vt habeamus octuplum arcus ex particula, & vno gradu compoſiti; tertio arcum hunc octuplum iterum duplabimus, vt fiat arc⁹ ſedecupl⁹ arcus ex data particula, & vno gradu cõpoſiti; quarto hunc arcũ rurſus duplabimus; & quinto tandem hunc duplum iterum duplabimus; vt habeatur arcus continens arcum ex particula propoſita, & vno gradu ſexagies & quater, cuius extremum punctum diligenter notetur. Nam ſi ex toto arcu ab eo puncto incipiendo, auferatur arcus quadruplus particulæ datæ vnâ cum vno gradu, ſupererit arcus ſexagecuplus eiuſdem particulæ vnâ cum vno gradu; ex quo denique ſi demantur 60. gradus, reliqui gradus numerum minutorum indicabunt. Quòd ſi data particula ſemiſſe gradus fuerit maior, explorabimus eodem modo minuta in reliqua particula minore comprehenſa. Hæc namque minuta ex 60. detracta relinquent minuta in particula illa maiore comprehenſa. Benè autem vides, quando data particula minor parum à ſemiſſe gradus differt, tutius eſſe quintuplare illam vnâ cum vno gradu; deinde hunc arcum duplare, tertio hunc arcum triplare, & poſtremò hunc iterum duplare. Hac enim ratione ex vltimo arcu duplato auferendi tantum ſunt 60. gradus, & nunquam totus quadrans exhauritur, vt patet.

12. NEQVE verò ſemper opus eſt, vt particula illa gradus, vel particula minor vnâ cum vno gradu ſexagies repetatur, ſed ſatis eſt, vt ea aliquoties repetita incidat præciſè in aliquem gradum; quod non raro accidere ſolet. Nam tunc conſtituetur fractio, cuius numerator eſt numerus graduum percurſorũ: Denominator autem numerus tot vnitatum, quoties particula circino repetita fuerit. Verbi gratia, ſi aliqua grad⁹ particula vicies repetita incidat in 6. gradũ, cõplectetur particula illa $\frac{6}{20}$. vnius gradus. Quare ſi numerator 6. per 60. multiplicetur, & productus numerus 360. per denominatorem 20. diuidatur, indicabit Quotiens 18. particulam illam continere 18. minuta. Sic ſi alia particula ſepties repetita incidat in tertium gradum, comprehendet ea $\frac{3}{7}$. vnius gradus. Si igitur numerator 3. per 60. multiplicetur, & numerus productus 180. per denominatorem 7. diuidatur, reperientur 25. min. Et quia in diuiſione ſuperſunt 5. ſi ea rurſum multiplicentur per 60. productuſque numerus 300. per eundem denominatorem 7. diuidatur, dabit quotiens adhuc 42 $\frac{6}{7}$. ſecunda.

DEMONSTRATIO huius praxis hæc eſt. Quoniam in priori exemplo, ita ſe habent 20. gradus ad 1. gradum, vt particula vicies repetita ad vnam particulam; erit permutando arcus 20. graduum ad arcum continentem particulam vicies, hoc eſt, ad arcum 6. graduum, vt 1. gradus ad vnam particulam: & conuertendo 6. grad. ad 20. grad. vt 1. particula ad 1. grad. Cum ergo 6. grad. ſint $\frac{6}{20}$. graduum 20. continebit quoque vna particula $\frac{6}{20}$. vnius gradus, quod eſt propoſitum. In poſteriori verò exemplo, quia ita ſe habent 7. grad. ad 1. gradum, vt particula ſepties repetita, hoc eſt, vt 3. gradus ad 1. particulam; erit permutando arcus 7. graduum ad 3. grad. vt 1. grad. ad 1. particulam: & conuertendo 3. gradus ad 7. grad. vt vna particula ad 1. grad. Cum ergo 3. gradus ſint $\frac{3}{7}$. ſeptem graduum, complectetur quoque 1. particula $\frac{3}{7}$. vnius gradus; quod eſt propoſitum. eademque in ceteris ratio eſt.

QVANDO particula minor cum vno gradu repetita incidit in gradum aliquem præcisè, auferendi erunt ex gradibus percurſis tot gradus, quoties particula illa cum vno gradu repetita fuit. Reliquus enim numerus erit Numerator fractionis: Denominator autem erit, qui prius. Vt ſi particula illa minor cum 1. gradu repetita ſepties incidit in 10. gradum; demendi erunt 7. gradus repetiti. Atq; ita habebuntur iterum $\frac{3}{7}$. vnius gradus in data particula.

13. SI viciſsim ex quouis gradu auferre velimus particulam quotlibet minutorum, ita agendum erit. In quadrante ſuperiore B C, accipiatur circino arcus tot graduum, quot minuta deſiderantur; atq; (vt confuſionem vitemus) in arcum interuallo ſemidiametri quadrantis B C, deſcriptum transferatur. Si enim hic arcus in 60. partes æquales ſecetur, (primum, videlicet in duas: deinde vna harũ iterum in duas: Tertio vna harũ in tres; ac poſtremo vna harũ in quinq;) cõtinebit vna particula ſexageſima numerum minutorum propoſitũ. Verbi gratia, ſi particula quæratur continens 50. min. accipiemus in arcu F G, ad interuallum ſemidiametri A C, deſcripto arcum F G, arcui C Z, graduum 50. æqualem, eumque in 60. partes æquales ſecabimus, primum in duas in puncto K: Deinde arcum F K, iterum in duas in puncto L; tertio arcum F L, in tres in punctis T, V. ac tandem arcum F V, in quinque. Vna namque harum 5. particularum comprehendet 50. min. ac proinde ſi transferatur circino in quemlibet gradum Quadrãtis B C, abſciſſa erunt 50. Min. ex eo gradu. Hoc ita demonſtro. Quoniam eſt, vt arcus 60. graduum ad 1. gradum, ita arcus C Z, vel F G, graduum 50. ad ſexageſimam partem eiuſdem arcus F G; erit permutando, vt arcus 60. graduum ad arcum F G, graduum 50; ita 1. gradus ad ſexageſimam particulam arcus F G: & conuertendo, vt arcus F G, graduum 50. ad arcum graduum 60. ita particula ſexageſima arcus F G, ad 1. gradum. Cum ergo arcus F G, contineat $\frac{50}{60}$, arcus 60. graduum, continebit quoq; particula ſexageſima arcus F G, $\frac{50}{60}$. vnius gradus, hoc eſt, 50. Min. Quod eſt propoſitum.

Quo pacto ex quouis gradu particula quotlibet Minutorum abſcindatur.

SED hæc res incommodiſsima eſt in paruis Quadrantibus, præſertim ſi pauca Minuta, vtpote 1. 2. vel 3. abſcindenda ſint. Quis enim in Quadrante exiguo arcum 1. gradus, vel 2. vel 3. in 60. particulas diſtribuat? Quamobrem commodius id, quod proponitur, efficiemus hac ratione. Ex eodem quadrante ſuperiore B C, arcus grad. 61. transferatur in arcum X Y, ad interuallum ſemidiametri A C. deſcriptum, ab X, vſque ad Y. Atque hic arcus X Y, in 6. partes æquales ſecetur; Primum ſcilicet in 2. deinde vtraq; ſemiſsis in 3. Deinde prima pars in 10. particulas æquales diuidatur, ita vt quælibet harum particularũ ſit $\frac{1}{60}$. arcus XY. Et quoniam vna harum particularum eſt ad arcum XY, vt 1. gradus Quadrantis B C, ad arcum 60. graduum; cum vtrobique proportio ſit ſubſexagecupla; erit permutando vna illarum particularum ad 1. grad. vt arcus XY, ad arcum 60. graduum. Quocirca quemadmodum arcus XY, arcum grad. 60. continet ſemel, & inſuper vnam eius partem ſexageſimam, id eſt, 1. ad grad. ex conſtructione; Ita quoq; vna illarum particularum comprehendet 1. gradum ſemel, & inſuper vnam partem ſexageſimam vnius gradus, hoc eſt, 1. Minutum. Ex quo fit, vt duæ particulæ complectantur 2. grad. & inſuper 2. Minuta. At vero 3. particulæ contineant 3. grad. & 3. Min. & ſic deinceps.

ITAQVE ſi in Quadrantem BC, transferatur vna particula ſexageſima arcus XY, à puncto C, vel à quouis gradu, habebitur 1. Min. in 2. gradu, vel quouis alio. Et ſi duæ particulæ transferantur, habebuntur in tertio gradu duo Minuta:

tria autem Min. in 4. gradu, ſi tres particulæ transferantur, & ſic de cæteris.

PARI ratione, ſi quis deſideret quotlibet gradus, ac Minuta, inquirenda prius erit particula Minutorum, quæ deſiderantur, eaque ad gradus propoſitos adijcienda. Quod ſi particula minutorum inuentorum tam exigua fuerit, vt circino vix accipi poſsit, accipienda ea erit vnà cum 1. gradu: & hic arcus ex 1. gradu & particula conflatus adijciendus ad numerum graduum propoſitum minus vno. Vt ſi velit quis grad. 89. Min. 59. Inuenienda prius erunt 59. Minuta. quod fiet, ſi 59. particulæ arcus XY, in Quadrantem BC, transferantur. Nam particula in 60. gradu complectetur 59. Min. vt dictum eſt. Si igitur arcus ex illa particula, & 1. grad. conflatus adijciatur ad arcum 88. grad. conficietur arcus grad. 89. Min. 59. Eademque ratio eſt de cæteris. Accipientur autem in arcu XY, particulæ 59. ſi vnus pes circini in puncto 50. ſtatuatur, & alter in nona particula primæ partis ſextæ totius arcus XY, verſus X. Ita accipientur quoque particulæ 49. 48. 39. 34. &c. vt perſpicuum eſt.

IAM vero ſi Minuta non in Quadrante BC, ſed in maiori, minoriue accipienda ſint, inquirenda ea erunt in Quadrante BC, beneficio arcus XY, vt docuimus; Deinde arcui inter C, & finem particulæ inuentæ auferendus ex Quadrãte propoſito arcus ſimilis. quod fiet, ſi ille Quadrans ex centro A, deſcribatur, rectaque ex A, per finem particulæ in BC, inuentæ educatur, &c.

Quo pacto reperiatur fractio cuiuſque particulæ in parte qualibet lineæ rectæ in partes æquales diuiſa.

14. QVÆ Num. 13. præcedenti diximus, perbelle etiam quadrant in lineas rectas. Nam eadem ratione cognoſcemus, ſi linea recta in quotuis partes æquales ſecetur, quantam fractionem quælibet particula vnius partis contineat: Et viciſsim quo pacto ex vna parte abſcindenda ſit quæcunque fractio propoſita. Quæ res incredibile eſt, quantam vtilitatem cum alijs rebus Geometricis, tum verò maxime Dimenſionibus, quæ per ſcalam altimetram fieri ſolent, afferat, vt lib. 3. cum de Quadrato Geometrico, vbi ſcalæ altimetræ vſus apparebit, perſpicuum erit. Sit enim recta linea AB, vt ad pedem Quadrantis ſuperioris vides, ſecta in 10. partes æquales. (In tot enim partes libet tam vmbram rectam, quam verſam ſcalæ altimetræ diſtribuere: quamuis ab alijs vtraque in 12. diuidatur: quod per illam diuiſionem facilius Dimenſiones perficiantur, vt ſuo loco patebit. Magis tamen probarem, ſi vtrumque vmbræ latus in 100. partes ſecaretur, ſi id magnitudo inſtrumenti commode permittit) propoſitumque ſit, quot partes decimas contineat particula DC, partis quintæ. Beneficio circini ſumpta particula DC, decupletur ab A, vſque ad E. Et quoniam in AE, continentur ſex partes totius lineæ AB, continebit propterea particula DC. $\frac{6}{10}$. vnius partis decimæ, hoc eſt, $\frac{6}{100}$. totius lineæ. Ita vt ſi recta AB, diuiſa cogitetur in 100. partes, tribuendo ſingulis decimis partibus denas particulas, ſegmentum AC, comprehendat $\frac{46}{100}$. Quia vero vltra $\frac{6}{10}$. ſupereſt adhuc particula FE, vnius decimæ, ſi ea rurſum decupletur ab A, vſque ad G, reperientur in AG, octo partes totius lineæ AB. Continet ergo particula FE, $\frac{8}{10}$. vnius decimæ, hoc eſt, propoſita particula DC, vltra $\frac{6}{10}$. vnius partis rectæ AB, continet inſuper $\frac{8}{10}$. vnius decimæ, (vnius inquam decimæ ex illis $\frac{6}{10}$. quas in particula DC, diximus comprehendi) nimirum $\frac{8}{100}$. vnius partis. ſi ſingulæ partes decimæ rectæ AB, diuiſæ eſſent in 100. particulas; atque adeo, ſi recta AB, ſecta intelligatur in 1000. partes, tribuendo ſingulis decimis partibus centenas particulas ſegmentum AC, complectetur $\frac{468}{1000}$. quippe cum in AD, contineantur

tur $\frac{400}{1000}$. Et in D C, $\frac{68}{100}$. vnius partis rectæ AB, ſiue $\frac{68}{1000}$. totius lineæ AB; cum quælibet centeſima particula vnius partis decimæ ſit $\frac{1}{1000}$. Atque in hunc modum progredi licebit ad decimas vnius decimæ ex illis $\frac{6}{10}$. quæ in particula D C, continentur. nimirum ad fractionem à 10000. denominatam, &c. ſed ſatis mihi videtur ad partes milleſimas peruenire.

DEMONSTRATIO hic eadem eſt, quæ in gradibus, ac Minutis. Eandem enim proportionem habet recta 10. partium ad 1. partem, quam recta A E, ad particulam D C, cum vtrobique proportio ſit decupla, ideoque permutando erit vt recta 10. partium ad rectam A E, ita 1. pars ad particulam D C. Quamobrem ſicut in AE, continentur $\frac{6}{10}$. rectæ AB, decem partium, & inſuper particula F E, reſpectu vnius partis lineæ A B, decem partium, ita quoque in particula data D C, continebuntur $\frac{8}{10}$. vnius partis, & inſuper talis particula reſpectu vnius decimæ qualis eſt F E, reſpectu vnius partis lineæ A B, decem partium, &c.

ITAQVE, vt vides, duabus operationibus ad milleſimas partes peruenitur, ac ſi latus totum A B, in 1000. partes ſectum eſſet, quod conſideratione dignum eſt. Et duo quidem numeratores decimarum eo ordine poſiti, quo inuenti ſunt, dant Numeratorem centeſimarum: cui ſi præponatur ad ſiniſtram numerus integrarum partium ante datam particulam exiſtentium, conflabitur Numerator milleſimarum. Vt in ſuperiori exemplo, quia ante datam particulam D C, reperiuntur 4. partes, inuentæque ſunt $\frac{6}{10}$. & $\frac{8}{10}$. erit tota fractio $\frac{468}{1000}$. Sic ſi inuentæ eſſent pro aliqua particula in octaua parte, $\frac{7}{10}$. $\frac{0}{10}$. conſtitueretur fractio $\frac{870}{1000}$. Item ſi in tertia parte inuentæ eſſent $\frac{0}{10}$. $\frac{7}{10}$. fieret fractio $\frac{307}{1000}$. & ſic de cæteris. Quod ſi recta A B, id eſt, latus vtriuſque vmbræ diuideretur in 100. partes, reperientur partes milleſimæ vnica operatione; ſi nimirum particula data in vna centeſima decuplaretur: quia tunc intelligerentur ſingulæ centeſimę in denas particulas ſubdiuiſæ. Sed quia particula data in centeſima aliqua parte perparua eſt, vt vix circino capi poſſit, accipiemus eam cũ vna centeſima, vel duabus, & ex decuplo abijciemus 10. vel 20. centeſimas, vt reliquę centeſimæ exhibeant decimas vnius centeſimę. Eadem ratione, quando data particula in linea 10. partium eſt perpuſilla accipienda erit reliqua particula maior decies. Nam reliqua pars rectę AB, à B, vſque ad finem illius particulę decuplę dabit numerum decimarum in propoſita minore particula, &c. Hac ratione, ſi particulam CH, decuples, incides in punctum K. Ergo ſegmẽtum B K, dabit $\frac{6}{10}$. & inſuper particulam DK, vt ſupra; cum DK, particulę FE, ſit ęqualis. Ratio huius rei eſt, quod ambę particulę DC, CH, decuplatę conficere debeant totam A B, vt conſtat.

Denominatio facilis fractionum milleſimarum.

AD Maiorem quoque commoditatem pro inueſtigandis partibus decimis, hoc eſt, pro decuplanda particula propoſita, conſtrui poterit circinus duplicis aperturę, in quo ſcilicet crura producta ſe mutuo interſecent, atque vna apertura alterius ſit ſemper decupla, inſtar circini, quo linea duas in partes ęquales diuidi ſolet. Ita enim fiet, vt accepta per minorem aperturam particula abſciſſa, particula maior exhibeat eam particulam decies ſumptam, vt non opus ſit toties circinum circumducere: qua quidem in re facile error committi poteſt, qui illo circino, ſi recte fabricatus ſit, facilius vitatur. Sed ſine hoc circino, idem fieri poteſt per inſtrumentum partium, quod capite pręcedenti conſtruximus. Nam ſi particula data circino capiatur, & ſumma diligentia ei

ſumatur in inſtrumento interuallum inter 10. & 10. æquale, erit interuallum inter 100. & 100. datæ particulæ decuplum.

Quo modo ex data linea auferendæ ſint quotcunque partes decimæ vel alia partes

15. IAM vero ſi viciſſim ex qualibet parte rectæ A B, auferendæ ſint quotcunque decimæ partes vnius, diuidendum erit ſegmentum continens numerum partium decimarum in 10. partes æquales. Nam vna pars decima huius ſegmenti continebit decimas partes quæſitas. Vt ſi cupiat quis $\frac{7}{10}$, diuidendum erit ſegmentum rectæ A B, includens 7. partes, in 10. particulas. Quælibet namq; harum comprehendet $\frac{7}{10}$. vnius partis rectæ A B. Eademq; ratio eſt de cæteris. Sed commodius hunc vſum nobis præſtabit inſtrumentum partium ſupra conſtructum. Eius enim beneficio ex quauis recta abſcindemus non ſolum quotcunque decimas, ſed etiam centeſimas, decimas nonas, nonageſimas octauas, & ſic deinceps, vſque ad dimidiatam partem. Nam ſi velimus $\frac{3}{100}$. alicuius lineæ, capiemus ei lineæ interuallum inter 100. & 100. æquale. Circinus namque extenſus inter 3. & 3. dabit $\frac{3}{100}$. quæſitas. Ita quoque circini pedes inter 50. & 50. dabunt $\frac{50}{100}$. id eſt, $\frac{1}{2}$. Rurſus pedes circini inter 20, & 20. dabunt $\frac{20}{100}$. hoc eſt, $\frac{1}{5}$. & ſic de cæteris, vt fuſius in vſu prædicti inſtrumenti partium cap. 1. expoſuimus.

PROBLEMATA VARIA TRIANGVLORUM rectilineorum.

CAPVT III.

TERTIO loco præmiſſuros nos polliciti ſumus varia problemata triangulorum rectilineorum, vt & latera eorum atque anguli ex quibuſdam datis, & cognitis promptè, atque expeditè, cum id res poſtulauerit, poſſint erui: quod hoc tertio capite exequemur. Priori autem loco de triangulis rectangulis: poſteriori vero de obliquangulis agemus. In margine porrò adſcripſimus propoſitiones noſtri tractatus triangulorum rectilineorum, in Theodoſio noſtro editi, in quibus problemata hæc demonſtrantur, vt ſtudioſi intelligant, vnde eorum demonſtrationes, quando libuerit, petere debeant.

TRIANGVLORVM RECTILINEORVM RECTANGULORUM problemata.

I. PROPORTIONES LATERVM

Ex datis omnibus angulis cuiuſuis trianguli patefacere.

1. Triang. rectil.

Singulis lateribus adſcribantur ſinus angulorum oppoſitorum. Latera enim eaſdem proportiones habent, quæ inter ſinus angulorum lateribus oppoſitorum reperiuntur.

II. LA-

II. LATVS.

Ex baſe, & alterutro angulorum acutorum, ac proinde & altero, notum efficere.

Vt ſinus totus	*ad baſem*	*Ita ſinus anguli lateri quæſito oppoſiti*	*ad latus quæſitum in partibus baſis.*	2. Triang. rectil.

III. LATVS.

Ex baſe, & altero latere cognoſcere.

Vt baſis	*ad ſinum totum*	*ita datum latus.*	*ad ſinum anguli dato lateri oppoſiti.*	3. Triang. rectil.

Deinde, ſumpto complemento anguli inuenti pro reliquo angulo.

Vt ſinus totus	*ad baſem*	*Ita ſinus anguli, qui lateri quæſito opponitur,*	*Ad latus quæſitum in partibus baſis, & alterius lateris.*

IIII. LATVS.

Ex altero latere, & alterutro angulo acuto, ac proinde & altero, eruere.

Vt ſinus totus	*ad latus datum.*	*Ita tangens anguli quæſito lateri oppoſiti*	*Ad latus quæſitum in partibus dati lateris.*	2. Triang. rectil.

Vel

Vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti.	*ad latus datum.*	*Ita ſinus alterius anguli*	*ad latus quæſitum in partibus dati lateris.*	2. Triang. rectil.

V. BASEM.

Ex vno latere, & vno angulo acuto, ac proinde & altero, inueſtigare.

Vt ſinus totus	*ad latus datum:*	*Ita ſecans anguli dato lateri adiacentis.*	*Ad baſem in partibus lateris dati.*	2. Triang. rectil.

Vel

Vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti	*ad ſinum totum.*	*Ita latus datum.*	*ad baſem in partibus lateris dati.*	2. Triang. rectil.

VI. BASEM.

Ex vtroque latere perſcrutari, vna cum angulis acutis.

Vt latus alterutrum datum	*ad ſinum totum:*	*Ita alterum latus datum*	*ad tangentem anguli huic alteri lateri oppoſiti.*	3. Triang. rectil.

Deinde, ſumpto complemento anguli inuenti pro reliquo angulo.

Vt ſinus totus	*ad latus alterutrum datum:*	*ita ſecans anguli accepto lateri adiacentis*	*ad baſem in partibus lateris dati.*

VII. ANGVLVM.

Ex baſe, & vno latere inquirere.

3. Triang. rectil.	*Vt baſis*	*ad ſinum totum*	*ita latus datum*	*ad ſinum anguli dato lateri oppoſiti*

Complementum anguli inuenti dabit alterum angulum.

VIII. ANGVLVM.

Ex vtroque latere reddere cognitum.

3. Triang. rectil.	*Vt latus alterutrum*	*ad ſinum totum:*	*ita alterum latus datum*	*ad tangentem anguli huic alteri lateri oppoſiti.*

Complementum anguli inuenti dabit alterum angulum.

TRIANGVLORVM RECTILINEOrum obliquangulorum Problemata.

IX. SEGMENTA LATERIS A Perpendiculari facta.

Ex datis tribus lateribus cognoſcere.

9. Triang. rectil.	*Vt latus, in quod cadit perpendicularis*	*ad ſummam aliorum duorum laterum*	*ita differentia eorundẽ duorum laterum*	*ad quartum quendam numerum.*

Et ſi quidem quartus numerus inuentus minor fuerit latere, in quod cadit perpendicularis, auferendus is erit ex illo latere. Semiſsis enim reliqui numeri dabit minus ſegmentum, quod ex toto latere ſubductum relinquet ſegmentum maius.

Si verò quartus numerus inuentus maior fuerit latere, in quod cadit perpendicularis, auferendum erit hoc latus ex illo numero. Semiſsis enim reliqui numeri dabit ſegmentum minus, exterius videlicet inter perpendicularem, & angulum obtuſum: quod additum eidem lateri conflabit aliud ſegmentum maius inter perpendicularem, & angulum acutum.

X. LATERA DVO.

Ex tertio latere, & duobus quibuſuis angulis, ac proinde omnibus tribus, cum tertius ſit aliorum complementum ad ſemicirculum, hoc eſt, ad grad. 180. inuenire.

10. Triang. rectil.	1. *Vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti*	*ad latus datum:*	*ita ſinus alterutrius reliquorũ angulorum*	*ad latus huic angulo oppoſitum.*

Rurſus

1 Triang. rectil.	*Vt ſinus anguli dato lateri oppoſiti*	*ad latus datum:*	*ita ſinus tertii anguli*	*ad latus huic tertio angulo oppoſitum.*

2. IN Iſoſcele vnius tantum lateris inuentione opus eſt, cum vnum datum ſitcum

ſit cum angulis. In æquilatero vero triangulo, ſi vnum latus datum ſit, erunt & reliqua illi æqualia, data.

XI. LATVS.

Ex duobus reliquis lateribus, & duobus quibuſuis angulis, ac proinde omnibus tribus, cum tertius ſit aliorum complementum ad ſemicirculum, id eſt, ad grad. 180. addiſcere.

Vt ſinus anguli alterutri lateri dato oppoſiti	*ad latus oppoſitum datum:*	*ita ſinus anguli quæſito lateri oppoſiti*	*ad latus quæſitum.*	10. Triang. rectil.

XII. LATVS.

Ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo colligere.

1. *Vt ſinus totus*	*ad ſecantem complementi arcus, qui ſemiſſi aggregati datorum laterum ad ſinus reuocatorum, vt ſinui, debetur:*	*Ita differentia inter eam ſemiſſem, & alterutrum datorum laterum ad ſinus reuocatorum.*	*ad quartũ quendam numerum.*	Problema 17. triang. ſphæric.

☞ Latera data ad ſinus reuocabuntur, ſi vtrumq; multiplicetur per 10. vel 100. vel 1000. &c. ita vt maioris lateris numerus habeat tot figuras, quot continentur in maioribus ſinubus tabulæ ſinuum, nimirum 5. ſi ſinus totus ſtatuatur 100000. vel 7. ſi ſinus totus ponatur 10000000.

Deinde.

Vt ſinus totus	*ad tangentem ſemiſſis arcus, qui detracto dato angulo ex ſemicirculo relinquitur:*	*ita quartus numerus inuentus*	*ad tangentem differentiæ inter ſemiſſẽ eiuſdem arcus, & alterutrum angulorum non datorum.*

Hæc autem tangens hoc etiam modo inuenietur, qui priori præferendus videtur.

2. *Vt ſemiſſis aggregati duorum laterum datorum.*	*ad tangentem ſemiſſis arcus, qui detracto dato angulo ex ſemicirculo relinquitur.*	*ita differentia inter ſemiſſem aggregati duorum datorum laterũ, & vtrumlibet laterum*	*ad tangentem differentiæ inter ſemiſſem arcus prædicti, & alterutrum angulorum non datorum.*	Alio modo qui priori præferendus videtur.

Arcus huius tangentis inuentæ additus ad ſemiſſem eiuſdem arcus (eſt autem hic arcus ſumma duorum angulorum non datorum, nimirum dati anguli complementum ad ſemicirculum, hoc eſt, ad grad. 180.) dabit maiorem angulum non datum, qui videlicet maiori lateri dato opponitur: ex eadem verò ſemiſſe detractus reliquum faciet minorem angulum non datum, qui nimirum lateri minori dato opponitur.

Poſt hæc.

Vt ſi-

1. Triang. rectil.

Vt ſinus vtriuſlibet anguli inuenti	*ad latus oppoſitum:*	*ita angulus datus*	*ad latus oppoſitum quod quæritur.*

Itaque antequam tertium latus inueniatur, diſquirendi prius ſunt reliqui duo anguli: qui commodius videntur poſteriori via Num. 2. expoſita indagari, quam priori illa ratione Num. .explicata.

[a] 5. primi.

3. Si duo latera ſint æqualia; [a] erunt reliqui duo anguli æquales. Semiſſis ergo arcus, qui detracto angulo dato ex ſemicirculo relinquitur, dabit vtrumque, &c.

XIII. LATVS.

Ex duobus lateribus, & angulo vni eorum oppoſito (ſi modo conſtet ſpecies anguli alteri lateri dato oppoſiti, quando datus angulus acutus eſt) exquirere.

13. triang. rectil.

1. Vt latus datum dato angulo oppoſitum	*ad ſinum anguli dati:*	*ita alterum latus datum,*	*ad ſinum anguli huic alteri lateri oppoſiti.*

Hic ſinus inuentus dabit angulum alteri dato lateri oppoſitum, ſi acutus fuerit: (erit autem ſemper acutus, quando datus angulus eſt obtuſus) ſi verò fuerit obtuſus, arcus ſinus inuenti ex ſemicirculo demptus, reliquum faciet eum angulum: Propterea quando datus angulus eſt acutus, oportet dari huius alterius ſpeciem, vt ſciamus, num acutus ſit, vel obtuſus. Summa autem horum angulorum ex ſemicirculo ſubtracta relinquet tertium angulum quæſito lateri oppoſitum. Ergo.

1. triang. rectil.

Vt ſinus dati anguli	*ad datum latus ei oppoſitum;*	*ita ſinus tertii anguli inuenti quæſito lateri oppoſiti.*	*ad latus quæſitum.*

[b] 5. primi.

2. Si duo latera data ſint æqualia: [b] erit angulus alteri dato lateri oppoſitus, dato angulo æqualis.

XIIII. ANGVLOS DVOS.

Ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo, reperire.

Inuenientur ex iis, quæ data ſunt, duo anguli, vt in priori parte problematis 12. dictum eſt: ſi nimirum inquiratur tangens differentiæ inter ſemiſſem arcus, qui detracto angulo dato ex ſemicirculo relinquitur, & alterutrum angulorum, qui quæruntur, &c. quæ quidem tangens duobus modis inuenta eſt in priori parte problematis 12. in quo latus proponitur inueſtigandum ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo. Quod vt fieret, inuenti prius fuerũt alii duo anguli, qui in hoc problemate 14. quæruntur.

XV. ANGVLOS DVOS.

Ex duobus lateribus, & angulo vni eorum oppoſito (ſi modo conſtet ſpecies anguli alteri lateri dato oppoſiti, quando datus angulus acutus eſt) expiſcari.

Hic etiam adhibenda eſt prior operatio problematis 13. in quo latus opponitur inquirendum ex iiſdem datis: quod vt fieret, inuenti prius fuere reliqui duo anguli, qui in hoc problemate 15. indagandi proponuntur.

XVI. AN-

XVI. ANGVLOS OMNES TRES.

Ex tribus omnibus lateribus perueſtigare.

1. Ducta ad maximum latus perpendiculari ex angulo oppoſito [a] *(vt nimirum perpendicularis ſemper intra triangulum cadat) inueniantur per problema 9. ſegmenta duo maximi lateris facta à perpendiculari. Deinde.* 11. triang. rectil.

Vt minimum latus	*ad ſinum totum:*	*ita minus ſegmentum maximi lateris*	*ad ſinum complementi anguli medio lateri oppoſiti.*	1. triang. rectil.

Rurſus.

Vt medium latus	*ad ſinum totum:*	*ita maius ſegmentum maximi lateris*	*ad ſinum complementi anguli medio lateri oppoſiti.*	1. triang. rectil.

Inuentis duobus angulis ad maximum latus, qui medio lateri, & minimo opponuntur; ſi eorum ſumma ex ſemicirculo dematur, reliquus fiet tertius angulus lateri maximo oppoſitus.

2. In Iſoſcele, ducta perpendiculari ad baſem [a], quam biſariam ſecabit, Schol. 26. lib. 1. Eucl.

Vt alterum laterum æqualium	*ad ſinum totum:*	*ita ſemiſſis baſis*	*ad ſinum complementi vnius angulorum æqualium ad baſem.*

Summa duorum angulorum æqualium inuentorum ex ſemicirculo detracta, reliquum faciet tertium angulum.

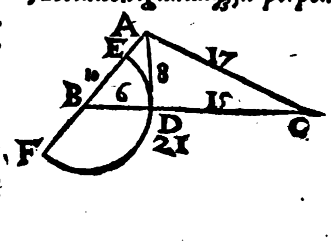
3. In æquilatero triangulo dabuntur anguli, etiamſi latera non dentur, cum quilibet gradus 60. tertiam videlicet partem duorum rectorum, vel duas tertias partes vnius recti, complectatur.

XVII. PERPENDICVLAREM IN LATVS quodcunque ex angulo oppoſito cadentem.

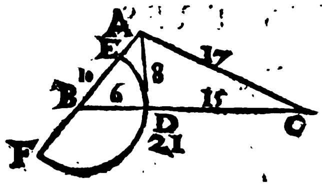
Ex tribus omnibus lateribus efficere notam.

Per problema 9. inquirantur ſegmenta lateris facta à perpendiculari. Deinde differentia inter vtrumuis ſegmentum, & latus adiacens ducatur in ſummam eiuſdem ſegmenti, & lateris adiacentis. Radix namque quadrata numeri producti perpendicularem quæſitum indicabit.

In triangulo enim A B C, ſit AB, 10. A C, 17. & BC, 21. inueſtigandaq; ſit perpendicularis A D. Per problema 9. reperietur ſegmentum B D, 6. & C D, 15. Differentia inter B D, & A B, eſt 4. quæ ducta in 16. ſummam rectarum BD & A B, faciet 64. cuius radix quadrata 8. dat perpendicularem A D. Quod quia in noſtro tractatu triangulorum rectilineorum demonſtratum non eſt, demonſtro hoc propoſito Theoremate.



Theorema.



In triangulo rectangulo rectangulum ſub differentia baſis, & alterutrius lateris circa rectum angulum, & ſub ſumma baſis, & eiuſdem lateris, æquale eſt quadrato alterius lateris circa angulum rectum.

Nam in triangulo rectangulo A B D, cuius angulus D, rectus, ſi ex B, per D, ſemicirculus deſcribatur EFD, erit A E, differentia inter baſem A B, & latus B D: At A F, ſumma erit baſis A B, & eiuſdem lateris B D, cum BD, BE, B F, recte ſint æquales. Dico igitur rectangulum ſub A E, A F, æquale eſſe quadrato lateris A D. Recta enim A D, cum perpendicularis ſit ad ſemidiametrum B D, [a] ſemicirculum tanget in D. [b] Igitur rectangulum ſub A E, A F, quadrato tangentis A D, æquale erit, quod erat demonſtrandum.

[a] Coroll. 16. ter.
[b] 36. ter.

FINIS LIBRI PRIMI.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

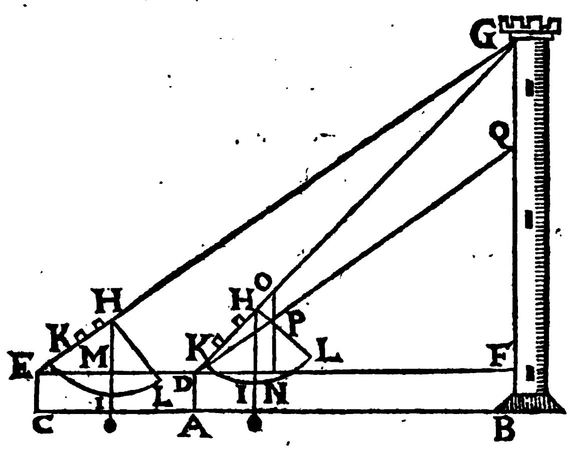
LIBER SECVNDVS.

Linearum rectarum per Quadrantem Aſtronomicum Dimenſionem explicans.

NOMINE linearum rectarum intelligimus diſtantias locorum, ſeu interualla, longitudineſue: altitudines turrium, ædificiorum, arborum, & montium: ac poſtremo profunditates puteorum, vallium, atque foſſarum. Ad harum Dimenſiones varii varia adhibent inſtrumenta; quibuſdam enim placet ſcala altimetra in dorſo Aſtrolabii, ſeu planiſphærii deſcripta. Aliis radius Aſtronomicus Gemmæ Friſii, vel radius dictus Latinus, quod à Domino Latino Vrſino nobili Romano excogitatus ſit; vel baculus Iacob: Aliis annulus Aſtronomicus, vel Holometrum; Aliis denique alia inſtrumenta arrident. Mihi vero præ cæteris probatur Quadrans Aſtronomicus in 90. gradus diſtributus: & Quadratum Geometricum tum ſtabile, tum pendulum, cuius duo latera in certas quaſdam partes æquales ſint diuiſa. Hoc autem 2. lib. qua ratione per Quadrantem Aſtronomicum Dimenſio linearum rectarum perficiatur, docebimus. Quæ ratio vt intelligatur, in promptu, & ad manum eſſe debent tabulæ ſinuum, Tangentium, atque ſecantium in noſtro Theodoſio, & in aliorum auctorum libris deſcripta, vnde petenda erunt. Superuacaneum enim eſſe duximus, eaſdem hic repetere, ne opus in maiorem formam excreſcat.

DISTANTIAM in plano, ſiue acceſſibilis ea ſit, ſiue inacceſſibilis per duas ſtationes in eodem plano factas per Quadrantem metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo aliqua perpendicularis, etiamſi infimum eius extremum non cernatur. Atque hinc altitudinem quoque ipſam elicere.

PROBLEMA I.



Sit diſtantia ſiue longitudo inueſtiganda AB, in plano CB, erectaque ſit in extremo B, altitudo quæpiam perpendicularis BG, licet extremum B, non appareat. Statura menſoris ſit D A, àb oculo ad pedes vſque. Ne autem hæc ſtatura mutetur, ſed eadem ſemper maneat, recte feceris, ſi pro ea ſtatura baculum eidem æqualem accipias, ad cuius extremum oculum applices. Ducta autem cogitatione per D, ipſi CB, parallela EF, fiat prima ſtatio in D, Secunda verò in E, puncto remotiore: ſitque recta DE, quæ differentia ſtationum dicitur, nota ſecundum aliquam menſuram vulgarem. Deinde dirigatur latus quadrantis HK, in quo ſunt pinnacidia, verſus faſtigium G, ita vt oculus in D, poſitus per vtriuſque pinnacidij foramina, faſtigium G videat, libere pendente perpendiculo HI: diligenterque per ea, quæ cap. 2. libr. 1. Num. 7. & 10. tradita ſunt, notetur in gradibus, ac minutis angulus GDF, quem arcus IL, in Quadrante manifeſtabit, complementum videlicet arcus IK, Cum enim filum perpendiculi HI, ſit ad DF, rectum, erit angulus GDF, complementum anguli DHI, æqualis nimirum angulo IHL, qui eiuſdem anguli DHI, complementum etiam eſt. Atque hunc angulum GDF, angulum obſeruationis dicemus. Eodem modo obſeruetur in ſecunda ſtatione angulus GEF, per radium viſualem ab oculo, & per pinnacidia Quadrantis ad faſtigium G, directum. Sumptis autem EM, DN, æqualibus, erigantur perpendiculares MN, NO, (in figura conincidit MH, cum filo perpendiculi; quod nihil refert.) Si igitur EM, DN, ſtatuantur ſinus toti, erunt MH, NO, Tangentes angulorum obſeruationum E, & D. Ducta quoque DQ, ipſi EG, parallela ſecante NO, in P, [a] erit angulus NDP, angulo E, æqualis. Cum ergo duo anguli N. D, trianguli NDP, duobus angulis M, E, trianguli MEH, ſint æquales, (eſt enim & rectus N, recto M, æqualis) lateraque DN, EM, quibus adiacent, æqualia; [b] erunt latera NP, MH, æqualia: ac proinde OP, differentia erit inter Tangentes angulorum obſeruationum. [c] Quia verò eſt, vt OP, ad PN, ita GQ, ad QF: [d] Et vt GQ, ad QF, ita ED, ad DF; erit quoque vt OP, differentia Tangentium angulis obſeruationum reſpondentium ad PN, ſiue ad HM, Tangentem remotioris ſtationis, ita ED, differentia ſtationum ad DF, diſtantiam quæſitam. Quocirca ſi fiat,

Differentia ſtationum.

Angulus obſeruationis.

[a] *29. primi.*

[b] *26. primi.*

[c] *Schol. 4. lib. 6.*

[d] *2. ſext.*

Diſtantiæ inuentio per tangentes.	*Vt OP, differentia inter Tangentes angulorum obſeruationum.*	*ad PN, vel HM, Tangentem minorem:*	*Ita ED, differentia ſtationum nota in menſura aliqua vulgari*	*ad aliud; hoc eſt ad DF,*

prodibit

prodibit diſtantia D F, quæſita, ſiue A B, in eadem menſura differentiæ ſtationum: cui ſi adijciatur differentia ſtationum E D, cognita etiam fiet diſtantia E F, vel C B, à remotiori ſtatione.

ALITER

2. POSITO ſinu toto G F, erit D F, Tangens anguli D G F, complementi anguli obſeruationis GDF. quem angulum DGF, indicat arcus Quadrantis IK, à perpendiculo verſus oculum, [a] cum angulus DHI, æqualis ſit angulo DGF, externus interno. Eodem modo E F, Tangens erit anguli EGF, complementi alterius anguli obſeruationis GEF. At ED, differentia inter eas Tangentes exiſtet. Si igitur fiat,

[a] *29. primi.*

vt E D, differentia inter Tangentes angulorũ, qui cõplemẽta ſunt angulorũ obſeruationũ,	*ad D F, Tangentem complementi anguli obſeruationis G D F, in propinquiore ſtatione, hoc eſt, ad Tangentem minorem:*	*Ita E D, differentia ſtationum nota in aliqua menſura vulgari.*	*ad aliud hoc eſt, ad DF,*

Diſtantiæ inuentio alia per tangentes.

procreabitur diſtantia minor quæſita DF, vel A B, in eadem menſura differentiæ ſtationum: cui ſi addatur differentia ſtationum E D, nota quoque fiet diſtantia maior E F.

3. Rurſus [b] ſi fiat,

[b] *4. ſexti.*

Vt D N, ſinus totus	*ad N O, Tangentem anguli GDF, in propinquiore ſtatione:*	*Ita DF, diſtantia inuenta minor*	*ad aliud, hoc eſt, ad FG;*

Inuenietur altitudo FG, in menſura diſtantiæ inuentæ D F; minoris, cui ſi addatur menſuris ſtatura FB, cognita erit tota altitudo B G. Item [c] ſi fiat,

Altitudinis inuentio per tãgentes.

[c] *4. ſexti.*

Vt E M, ſinus totus	*ad M H, tangentem anguli GEF, in remotiore ſtatione:*	*ita EF, diſtantia inuenta maior*	*ad aliud, hoc eſt, ad FG,*

reperietur eadem altitudo F G, in menſura diſtantiæ inuentæ E F, maioris, cui ſi addatur ſtatura menſoris FB, nota fiet tota altitudo B G.

Altitudinis inuentio alia per tangentes.

ALITER

4. Si per ſolos ſinus idem expedire lubeat, erit operatio aliquando longior. Primum enim inuenienda eſt vtraque hypotenuſa E G, D G, in aliqua menſura nota, hoc modo. [d] Quoniam angulus G D F, æqualis eſt duobus angulis E, EGD: ſi angulus E, in remotiore ſtatione obſeruatus dematur ex angulo GDF, in propinquiore ſtatione deprehenſo, reliquus fiet angulus EGD, differentia nimirum inter duos angulos obſeruationum. [e] Quod ſi fiat,

[d] *32. primi.*

[e] *10. Triang. rectil.*

Vt ſinus anguli E G D, differentia inter angulos duos obſeruationum	*ad E D differentiam ſtationum notam:*	*Ita ſinus anguli D E G, vel. Ita ſinus anguli EDG, cõplementi anguli G D F, ad duos rectos,*	*ad DG, vel ad E G,*

producetur tam D G, quam E G, nota in partibus differentiæ ſtationum. Igitur [f] ſi fiat,

Inuentio Hypotenuſarum.

[f] *10. triang. rectil.*

Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad hypotenuſam D G,*	*Ita ſinus anguli DGF, complementi anguli obſeruationis in propinquiore ſtatione proxime inuentam*	*ad D F,*

Diſtantia inuentio per ſolos ſinus.

nota fiet diſtantia D F, cui ſi adijciatur differentia ſtationum E D, cognita etiam erit longior diſtantia EF, quam inuenies quoque, [a] ſi fiat,

[a] *10. triang. rectil.*

Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad hypotenuſam E G, nuper inuentam,*	*Ita ſinus anguli E G F, complementi anguli obſeruationis in remotiore ſtatione*	*ad E F.*

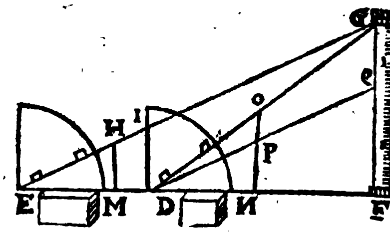
[b] *10. triang. rectil.*

Altitudinis inuentio per ſolos ſinus.

Altitudo autem F G, per ſolos ſinus inuenietur, [b] ſi fiat,

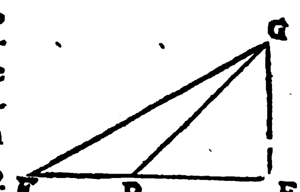
Vt ſinus totus anguli recti F,	*ad hypotenuſam E G, vel ad hypotenuſam D G:*	*Ita ſinus anguli E, obſeruati minoris, vel ita ſinus anguli G D F, obſeruati maioris*	*ad F G, ad F G.*

5. Per Quadrantem ſtabilem eodem modo dimenſio fit: ſolum anguli obſeruationum in duabus ſtationibus hac ratione inueſtigantur. Collocato Quadrante ſupra baſem aliquam planam Horizonti æquidiſtãtem, ita vt rectus ſit ad Horizontem; quod beneficio alicuius perpendiculi efficies. Collocato, inquam, hoc modo Quadrante eleua dioptram, donec per foramina pinnacidiorum faſtigiũ G, videas. Ita enim in propinquiore ſtatione D, angulus obſeruationis erit GDF; In remotiore vero GEF. Vtrumque autem metietur arcus Quadrantis inter rectam EF, & dioptræ lineam fiduciæ. Reliqua omnia fient, ſicut in Quadrante pendulo, vt figura demonſtrat. Solum ad altitudinem FG, inuentam adijcienda erit altitudo baſis; cui impoſitus eſt Quadrans, non autem ſtatura menſoris, niſi altitudini baſis ſit æqualis.



Problema hoc 1. quo pacto ſine numeris abſoluatur.

6. Iam vero ſine numeris, id eſt, ſinę multiplicatione ac diuiſione numerorum omnia hæc explorari poterunt, (quod ijs, qui parum in numeris, & vſu ſinuum, Tangentium, ac ſecantium exercitati ſunt, pergratum fore non dubito.) hoc modo. In charta aliqua, vel plano conſtruatur figura illi omnino ſimilis, quam ab oculo vſque ad altitudinem ſupra concepimus eſſe conſtructã; quod ita fiet. Ex inſtrumento partium cap. 1. ſuperioris libri fabricato, vel (ſi inſtrumentum non adſit) ex aliqua recta in particulas plurimas æquales diuiſa capiantur circino tot particulæ æquales, quot palmi, vel pedes inter duas ſtationes comprehenduntur; transferaturque interuallum illud circini in rectam quamcunque ex E, in D: atque in D, & E, omni adhibita diligentia, anguli obſeruationum GDF, GEF, primæ, & ſecundæ ſtationis fiant: Punctumque G, in quo rectæ DG, EG, conueniunt, diligenter notetur, (Ne in hoc puncto erretur, propter obliquam ſectionem, docebimus in ſequenti lemmate, quo pacto exquiſitiſsime deprehendi poſsit. Niſi enim hoc fiat, mẽſuræ nõ inueniẽtur accurate) ex quo perpẽdicularis demittatur G F Figura ita conſtructa, ſi rectæ D F, EF, F G, DG, EG, per circinum transportentur in latus 100. partium prædicti inſtrumenti, vel in dictam rectam in plurimas partes æquales diuiſam, illico apparebit, quot particulæ inter pedes circini

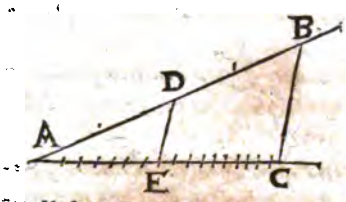


includan-

includantur. Atque tot palmos, aut pedes quælibet illarum rectarum complectetur, quot particulæ in earum interuallis deprehenſæ fuerint.

ALITER

7. IDEM aſſequentur via quadam generali, quæ in omnes dimenſiones quadrat, videlicet. Fiat angulus quicunque B A C. Deinde ſumpta verbi gratia, in exemplum regula trium Num. 1. huius propoſitionis, accipiatur primæ quantitati O P, (hoc eſt, differentiæ Tangentium angulorum obſeruatorum) æqualis; vel ſi nimis parua eſt, multiplex A D. (Nos duplam accepimus) Item ſecūdæ P N, (hoc eſt, Tangenti minoris anguli) æqualis, vel æque multiplex cum A D, nimirum D B. Poſt hæc ex inſtrumento partium capiantur tot particulæ A E, quot palmi, aut pedes in E D, differentia ſtationum continentur. Ducta autem recta D E, agatur ei parallela BC. Nam quot partes inſtrumenti partium includet interuallum EC, tot palmos, aut pedes diſtantia DF, complectetur; [a] cum quatuor quantitates AD, DB, AE, EC, proportionales ſint.



Problema hoc 1. qua ratione aliter ſine numeris abſoluatur

[a] *4. Sexti.*

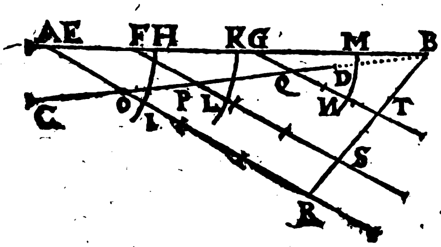
EODEM modo procedes in alijs exemplis, hoc obſeruato, vt quando ſinus alicuius anguli in regula trium reperitur, accipias ex tabula ſinuum ſinum, abiectis quinque figuris, vt ſinus totus ſit 100. Verbi gratia. In vltimo exemplo Num. 4. recta AD, ſumenda eſſet æqualis 100. particulis inſtrumenti partium, nimirum ſinui toti. At D B, æqualis hypotenuſæ E G, vel D G, in figura Num. 6. Et AE, ſi angulus E, eſt grad. 30. Min. 15. æqualis 50 $\frac{4}{10}$. ferme particulis: quia tantus eſt ſinus grad. 30. Min. 15. Vel ſi angulus G D F, eſt grad. 53. Min. 20. accipienda eſſet AE, æqualis particulis 80 $\frac{2}{10}$. fere. Ita enim interuallum E C, dabit tot palmos, aut pedes rectæ FG, quot particulæ in eo comprehenduntur, Et ſic de cæteris.

QVANDO autem tota regula 100. partium eſt nimis longa, ſumi poteſt pro ſinu toto quoduis interuallum inter 100, & 100. dummodo reſpectu huius ſinus totius accipiantur poſtea ſinus, vt cap. 1. lib. 1. Num. 12. declarauimus.

POTERIS autem nonnunquam ordinem immutare, ponendo nimirum ſecundam quantitatem DB, in recta AC; & tertiam AE, in recta DB, prout videlicet id expedire cognoueris ad parallelas DE, BC, ducendas.

LEMMA.

DATIS duabus rectis ad inuicem inclinatis, punctum, in quo conueniant, inuenire.



QVOD hic proponitur, demonſtratum à nobis fuit lēmate 13. lib. 1. noſtri Aſtrolabij pluribus viis. Sed quia eius inſignis eſt vtilitas in puncto concurſus duarum rectarum exquirendo demonſtrabimus illud ipſum hoc loco paulo aliter. Sint ergo duæ rectæ A B, C D, obliquè ſe in concurſu B, ſecantes. Ex quotlibet punctis E, F, G, vtcunque in altera ea-

ra earum aſſumptis deſcribantur verſus alteram ad quodcunque idem internallum arcus H I, K L, M N, ex quibus arcus quadrante minores abſcindantur in I, L, N, punctis, per quæ ex centris rectæ egrediantur ſecantes C D, in O, P, Q. Sumptis deinde in E I, producta ipſi E O, tot partibus æqualibus vſque ad R, quot ſatis eſſe videbuntur, vt recta ex R, verſus concurſum ducta non valde obliquè ipſas rectas ſecet, accipiantur in F L, G N, productis totidem partes ipſis F P, P Q, æquales vſque ad S, T. Dico tam rectam R S, quam R T, & quam S T, in punctum B, concurſus cadere, ita vt puncta R, S, T, B, in vna recta linea iaceant. [a] *Quoniam enim anguli E, F, G, æquales ſunt,* [b] *erunt rectæ E R, F S, G T, parallelæ.* [c] *Cum ergo E R, F S, G T, eaſdem proportiones habeant, quas E O, E P, G Q, hoc eſt* [d] *E B, F B, G B, habent,* [e] *cadent rectæ R S, R T, S T, in punctum B, quod eſt propoſitum.*

[a] 27. Tertij. [b] 28. Primi [c] 15. Quinti [d] 4. Sexti & permutãdo. [e] ſchol. 4. ſexti.

H O C ergo lemma ſi adhibeatur, ſatis exquiſitè in ſuperiore figura Num. 6. punctum concurſus G, deprehendetur, proindeque menſura rectarum, quas ſine numeris inuenire docuimus, non multum à vero aberunt.

Quo pacto in fig. Num. 6. obliqua ſectio in puncto concurſus G, vitetur.

8. V E R V M commodè obliquam illam ſectionem in concurſu G, vitabimus, ſi figuram hoc alio modo conſtruemus, Fiat in figura Num. 6, angulus rectus E F G, & in quolibet puncto G, vbi concurſum eſſe volumus, conſtituantur anguli F G D, F G E, æquales complementis angulorum obſeruationum. Ita enim D E, reſpondebit differentiæ ſtationum, &c. Quocirca ſi cogitetur D E, ſecta in tot partes æquales, quod palmi, vel pedes in differentia ſtationum fuerunt aſſumpti, cognoſcemus per ea, quæ ad finem Num. 1. cap. 1. lib. 1. docuimus, quot ex ijs partibus in diſtantijs D F, E F, & in altitudine F G, atque hypotenuſis G D, G E, comprehendantur. Atque hoc modo punctum concurſus G, dubium aut incertum eſſe non poteſt, cum illud ante omnia elegerimus.

SCHOLIVM.

Vt etiam pro tyronibus ſemel explicemus, quid per noſtrum loquendi modum intelligamus, cum dicimus verbi gratia, Num. 1. huius problematis, Fiat.

Vt O P, differentia inter tangentes angulorum obſeruationum.	*ad P N, vel H M, Tangentem minorem.*	*Ita E D, differentia ſtationum.*	*ad D F:*

Sciendum eſt, nos hoc modo redigere opus ad terminos regulæ trium. Quapropter ſi iuxta tenorem regulæ numerus in tertio loco poſitus ducatur in eum, qui ſecundum locum occupat, hoc eſt, differentia ſtationum in propoſito exemplo multiplicetur per Tangentem minorem, productuſque numerus per eum, qui in primo loco collocatur, id eſt, per differentiam Tangentium, diuidatur: (niſi quando primus numerus eſt ſinus totus. Tunc enim diuiſio non fit, ſed ex producto quinque figuræ abijciuntur, vel ſeptem, prout ſinus totus ſtatuitur 100000. vel 10000000.) procreabitur in quotiente quartus numerus, qui quæritur, nimirum diſtantia D F. Eademque eſt ratio de cæteris.

Altitudinis inuentio per vnicam ſtationem, quando diſtantia nota eſt.

COROLLARIVM I.

ITAQVE quando diſtantia à loco menſoris vſque ad altitudinem ignotam cognita eſt, inuenietur altitudo per vnicam ſtationem. [f] Si fiat.

Vt ſinus totus	*ad Tangentem anguli obſeruationis:*	*Ita diſtantia nota*	*ad altitudinem.*

[f] *4. Triang. rectil.*

Hoc enim demonſtratum eſt Num. 3. huius problematis 1. tam per angulum obſerua-

ſeruationis GDF, & diſtantiam DF, quam per angulum obſeruationis GEF, & diſtantiam EF. Vtroque enim modo inuenta eſt altitudo GF.

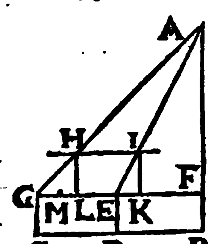
COROLLARIVM II.

PERSPICVVM etiam eſt, ſi G, ſit cacumen alicuius montis, nos per hoc problema 1. eius altitudinem poſſe metiri per duas ſtationes D, E, in plano factas: ſi nimirum prius inueſtigetur recta D F, vel E F, ab oculo menſoris vſque ad perpendicularem GF, quæ à cacumine G, in planum Horizontis cadit, etiãſi eius extremum F, non videamus. *Altitudo mõtis quo pacto inueſtigetur.*

ALTITVDINEM inacceſſibilem, quando diſtantia à loco mẽſoris ad baſem altitudinis ignota eſt, per duas ſtationes in plano factas, per quadrantem dimetiri. Atque hinc diſtantiam quoque ipſam eruere, etiam ſi extremus eius terminus non cernatur.

PROBLEMA II.

1. SIT inquirenda altitudo AB, ſiue ea turris ſit, ſiue mons, ſiue aliquid aliud, licet non cernatur eius perpendiculi infimus terminus B, vt in omni monte contingit: planum autem, cui perpendicularis eſt altitudo, ſit CB. Statura mẽſoris D E. Ducta autem cogitatione per E, ipſi CB, parallela GF, fiat prima ſtatio in D, propinquior, ſecunda vero in G, remotior, vt differentia ſtationum ſit GE. Deinde per radios viſuales EA, GA, ad verticem A, directos diligenter obſeruentur anguli AEF, AGF, ſiue per quadrantem pendulum, vt Num. 1. problematis præcedentis docuimus, ſiue per ſtabilem, vt Num 5. eiuſdem problematis præcepimus. Eodem enim ſemper modo dicti anguli obſeruantur, quando è loco inferiori altitudinis faſtigium inſpicitur. Cogitetur quoque ducta HI, ipſi G F, parallela, [a] vt demiſſæ perpendiculares H L, I K, in parallelogrammo LI, ſint æquales, pro ſinubus totis: quorum tangentes ſunt EK, GL, angulis, I, H, qui complementa ſunt angulorum obſeruationum E, G, debitæ. Et quoniam angulus G A F, maior eſt angulo E A F, [b] eſtque priori angulus G H L, & poſteriori angulus E I K, æqualis: erit quoque GHL, maior quam EIK, ideoque tãgens G L, maior Tangente EK, quòd ſinus toti H L, I K, æquales ſint. Abſcindatur LM, ipſi EK, æqualis, vt GM, ſit differẽtia Tangẽtium G L, E K, [c] Et quia eſt vt G L, ad L H, ita G F, ad F A, erit permutando, vt GL, ad GF, ita LH, vel IK, ad FA; [d] Vt autem IK, ad F A, ita quoque eſt E K, ad EF. Igitur erit, vt tota GL, ad totam GF, ita EK, vel LM, ex GL, ablata, ad EF, ex GF, ablatam: [e] ac proinde erit etiam vt GM, ex GL, reliqua ad G E, ex G F, reliquam, ita tota G L, ad totam G F, hoc eſt, [f] ita L H, ſinus totus, a d F A. Quamobrem ſi fiat.



a 34. primi.
b 29. primi.
c 4. ſexti.
d 4. ſexti & permutando
e 19. quinti
f 4 ſexti & permutando.

Vt GM, differentia Tangentium GL, EK, complementorum angulorum obſeruationum.	*ad GE, differentiam ſtationum.*	*ita LH, ſinus totus.*	*ad FA,*

Altitudinis inuentio per Tangentes.

inuenta erit altitudo F A, in partibus differentiæ ſtationum, cui ſi adijciatur F B, ſtatura menſoris, tota altitudo AB, nota euadet.

2. ITEM ſi fiat.

Vt G M, differentia Tangentium complementorum angulorum obſeruationum.	*ad G E, differentiam ſtationum:*	*ita G L, Tangens complementi anguli obſeruationis in remotiori ſtatione*	*ad G F,*

Diſtantiæ inuentio.

efficietur nota G F, diſtantia maior, quandoquidem paulo ante demonſtratum eſt, eſſe GM, ad GE, vt GL, ad GF. Quod ſi ex GF, inuenta detrahatur GE, differentia ſtationum, nota relinquetur EF, diſtantia minor.

ALITER.

a 32. primi.

3. SI per ſolos ſinus dimenſio inſtituatur, inueſtiganda primum erit alterutra hypotenuſarum GA, EA, vel vtraque. hoc ſcilicet modo. [a] Quoniam angulus A E F, duobus G, G A E, æqualis eſt, ſi angulus G, in remotiore ſtatione tollatur ex angulo AEF, in ſtatione propinquiore, reliquus fiet angulus GAE, differentia inter duos angulos G, AEF obſeruationum.

b 10. triang. rectil.

[b] Ergo ſi fiat,

Vt ſinus anguli G A E, differentia inter duos angulos obſeruationum.	*ad G E, differentiam ſtationum:*	*ita ſinus anguli A G E,*	*ad AE,*
		vel	
		ita ſinus anguli G E A, complementi anguli A E F, ad duos rectos.	*ad G A.*

Hypotenuſarum inuentio.

nota fiet tam A E, quam A G, in partibus differentiæ ſtationum.

c 10. triang. rectil.

[c] Si igitur fiat.

Vt ſinus totus anguli recti F.	*ad rectam E A:*	*ita ſinus anguli A E F, in propinquiore ſtatione,*	*ad A F,*
	vel	*vel*	
	ad rectam G A, proximè inuentam.	*ita ſinus anguli A G F, in remotiore ſtatione*	*ad A F.*

Altitudinis inuentio per ſolos ſinus.

gignetur altitudo A F, & ſi adiungetur F B, ſtatura menſoris, tota altitudo AB, efficietur nota.

d 10. triang. rectil.

Diſtantiæ inuentis per ſolos ſinus.

DISTANTIA autem vtraque E F, G F, per ſolos etiam ſinus inuenietur, [d] ſi fiat.

Vt ſinus totus anguli recti F.	*ad hypotenuſam E A.*	*ita ſinus anguli E A F, complimenti anguli in propinquiore ſtatione,*	*ad E F.*
	vel	*vel*	
	ad hypotenuſam G A:	*ita ſinus anguli G A F, complementi anguli in remotiore ſtatione.*	

Problema quo pacto ſi ſine numeris ſolutum.



4. SINE numerorum multiplicatione ac diuiſione eadem inueſtigabuntur, ſi illi figuræ, quam ab oculo menſoris ad altitudinem vſque concepimus eſſe conſtruendam, ſimilem omni diligentia conſtituamus, vt Num. 6. & 8. præcedentis problematis 1. diximus

diximus, vt manifeſtum eſt, ſi in ea figura Num. 6. altitudo intelligatur FG, & diſtantiæ FD, FE, &c. Idemque efficies per ea, quæ Num. 7. eiuſdem problematis 1. tradita ſunt.

COROLLARIVM I.

ITAQVE ſi altitudo fuerit nota, inuenietur diſtantia per vnicam ſtationem, a ſi fiat. *Diſtantia inuentio per vnicam ſtationem, quando altitudo nota eſt.*

Vt ſinus totus AF,	*ad Tangentem FE, complementi anguli in propinquiore ſtatione:* *vel* *ad Tangentem FG, complementi anguli in remotiore ſtatione:*	*ita altitudo nota AF,*	*ad diſtantiam FE,* *vel* *ad diſtantiam FG.*

a 4. triang. rectil.

ITEM ſi diſtantia nota fuerit, reperietur altitudo per vnicam quoq; ſtationem, ſi fiat,

Vt ſinus totus GF,	*ad AF, Tangentem anguli G, obſeruati in remotiori ſtatione:*	*ita GF, diſtantia nota*	*ad AF, altitudinem*

Vel

Vt ſinus totus EF,	*ad AF, Tangentem anguli E, obſeruati in ſtatione propinquiore:*	*ita EF, diſtantia nota,*	*ad AF, altitudinem.*

COROLLARIVM II.

MANIFESTVM etiam eſt, ſi punctum A, ſit cacumen alicuius montis eodem pacto inueſtigari poſſe lineam perpendicularem AF, quæ ex cacumine in Horizontis planum demittitur: ſi nimirum duæ ſtationes fiant in E, G.

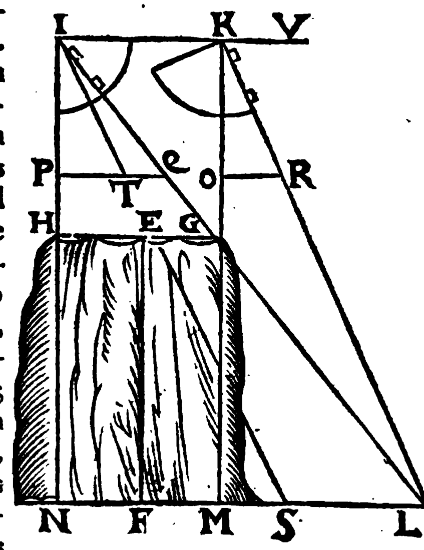
EX VERTICE montis, aut turris, in cuius ſummitate duæ ſtationes fieri poſſint, è quibus ſignum aliquod in Horizonte appareat, altitudinem ipſius montis, turriſue dimetiri. Atque hinc ipſam quoque diſtantiam à turris baſi, vel perpendiculo montis ad ſignum illud inueſtigare.

PROBLEMA III.

1. SIT mons, aut turris GHNM, cuius altitudo perpendiculum EF, vel etiam latus turris GM, vel HN. Eligantur duæ ſtationes in G, H; & ab oculo menſoris tam in I, quam in K, poſito cerni poſsit ſignum L, in Horizonte, vel plano, cui turris, aut mons inſiſtit. Dirigatur latus Quadrantis penduli, in quo pinnacidia, verſus L, diligenterq; angulus K, notetur, quem arcus Quadrantis inter latus pinnacidiorum, & filum perpendiculi libere pendentis determinat. Eodemque pacto angulus I, obſeruetur. Per Quadrantem ſtabilem vterque obſeruabitur, ſi vnum eius latus ad Horizontem ſit rectũ, (quod tum demũ fiet,

 quando

quando filum perpendiculi ex centro pendentis illi lateri adhærebit) & dioptra attollatur, donec per pinnacidiorum foramina ſignum L, cerni poſsit. Nam arcus inter dictum latus, & lineam fiduciæ in dioptra angulum obſeruationis metietur. Intelligatur quoque filum perpendiculi in vtroque ſitu Quadrantis penduli, vel latus quandrantis ſtabilis ad Horizontem rectum productum vſque ad baſem montis, aut turris ad M, N. Sũptis deinde rectis æqualibus K O, I P, pro ſinubus totis, ducantur P Q, O R, ad I N, KM, perpendiculares, [a] quæ parallelæ erunt plano Horizontis, hoc eſt, rectę NL; & Tangentes angulorũ obſeruationum I, K [b] Ipſæ autem HN, GM, altitudini EF, æquales erunt. Et quoniam in triangulis I N L, K M L, anguli recti N, M, ſunt æquales, & ILN, minor quam KLM, pars toto; erit reliquus N IL, reliquo MKL, maior, ideoque & Tangens P Q, Tangente O R, maior. Abſciſſa ergo P T, ipſi O R, æquali; [c] quia eſt vt I P, ſinus totus ad P Q, Tangentem maioris anguli obſeruationis, ita IN, ad NL: erit permutando, vt IP, ad IN, ita P Q, ad NL. Eademque ratione erit, vt KO, ad KM, hoc eſt, vt IP, ad IN, [d] (cum KO, KM, ipſis IP, IN, ſint æquales) ita OR, hoc eſt, ita P T, ad ML; atque ideo erit, vt P Q, ad NL, ita P T, ad ML. Quia ergo eſt, vt tota P Q, ad totam N L, ita P T, ablata ad M L, ablatam, [e] erit quoque reliqua T Q, differentia Tangentium, ad reliquam NM, differentiam ſtationum, [f] (quod NM, HG, æquales ſint.) vt tota P Q, ad totam NL, [g] hoc eſt, vt IP, ad IN. Quãobrem ſi fiat.



a 28. primi.
b 34. primi.
c 4. ſexti.
d 34. primi.
e 19. quinti.
f 34. primi.
g 4. ſexti.

Vt T Q, differentia inter Tangentes angulorum obſeruationum	*ad N M, vel H G, differentiam ſtationum:*	*ita ſinus totus I P,*	*ad IN,*

Altitudinis inuentio.

reperietur recta I N, ex qua ſi dematur I H, ſtatura menſoris, nota relinquetur HN, vel EF, altitudo quæſita. Et ſi rurſus fiat,

Vt T Q, differentia Tangentium	*ad NM, vel GH, differentiam ſtationum:*	*ita P Q, Tangens maior*	*ad NL, diſtantiam.*

Diſtantiæ inuentio.

nota fiet diſtantia N L; à qua ſi ſubtrahatur NF, vel HE, quam metiri licebit, cognita relinquetur FL, diſtantia à perpendiculo montis. Vel ſi dematur NM, differentia ſtationum, nota relinquetur diſtantia ML, à turri vſque ad L. Item [h] ſi fiat.

h 4. ſexti.

Vt IP, ſinus totus	*ad P Q. Tangentem maiorem:*	*ita IN, paulo ante inuenta*	*ad NL, diſtantiam,*

inuenietur rurſus diſtantia NL, &c.

2. VERUM ita eſſe T Q, differentiam Tangentium ad NM, vel H G, diffe-

rentiam

rentiam ſtationum, vt eſt P Q, Tangens maior ad diſtantiam N L, vt paulo ante oſtenſum eſt, facilius demonſtrabimus, ſi ducatur recta I T, quæ producta ſecet N L, in S. Nam in triangulis I P T, K O R, duo latera I P, P T, duobus lateribus K O, O R, æqualia ſunt, anguloſque continent æquales, vtpote rectos. [a] Igitur anguli T, R, æquales ſunt; [b] ideoque K L, I S, parallelæ. [c] Et quia ducta I K, æqualis eſt & ipſi S L, & differentiæ ſtationum H G, vel N M, [d] liquido conſtat, ita eſſe T Q, differentiam Tangentium ad S L, quæ differentię ſtationum I K, vel H G, æqualis eſt, vt eſt P Q, Tangens maior ad diſtantiam N L,

[a] *4. primi.*
[b] *28. primi.*
[c] *34. primi.*
[d] *ſchol. 4. ſext.*

ALITER.

3. PER ſolos ſinus ita Problema efficiemus. Primum inquiremus hypotenuſas I L, K L, hoc modo. [e] Quoniam angulus L K V, duobus angulis L I K, I L K, æqualis eſt; ſi L I K, angulus complementi maioris anguli obſeruationis L I N, auferatur ex L K V, angulo complementi minoris anguli obſeruationis L K M, reliquus fiet angulus I K L. [f] Si ergo fiat.

[e] *32. primi.*
[f] 10. triang. rectil.

Vt ſinus anguli I K L, differentiæ inter duos angulos complementorum angulorum obſeruationum	*ad I K, differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli I K L, conflati ex recto, & angulo obſeruationis minore, vel*	*ad I L,*
		Ita ſinus anguli L I K, complementi maioris anguli obſeruationis.	*ad K L,*

euadet nota tam I L, quam K L, in menſura differentiæ ſtationum. [g] Igitur ſi fiat,

Hypotenuſarum inuẽtio.

[g] 10. triang. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti N,	*ad Hypotenuſam proxime inuentam I L,*	*Ita ſinus anguli I L N, complementi maioris anguli obſeruationis*	*ad I N,*

Vel

Vt ſinus totus anguli recti M,	*ad hypotenuſam K L, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli K L M, complementi minoris anguli obſeruationis*	*ad K M,*

cognita fiet altitudo I N, vel K M, ex qua ſi dematur ſtatura menſoris, altitudo quæſita relinquetur H N, vel G M, hoc eſt, E F.

Altitudinis inuentio per ſolos ſinus.

DISTANTIA autem vtraque N L, M L, reperietur, [h] ſi fiat.

[h] 10. triang. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti N, vel M,	*ad Hypotenuſam inuentam I L, vel K L,*	*Ita ſinus anguli maioris obſeruati N I L, vel*	*ad N L, diſtantiam*
		Ita ſinus anguli minoris obſeruati M K L,	*ad M L, diſtantiam.*

Diſtantiæ inuentio per ſolos ſinus.

SINE numeris eædem rectæ I N, N L, I L, K L, &c. reperientur, vt in ſuperioribus: ſi nimirum (vtemur figura huius problematis, ne nouam conſtruere cogamur) ſumpta recta I K, tot partium, quot palmi, pedeſue in differentia ſtationum exiſtunt, fiant anguli V K L, V I L, complementorum angulorum M K L, N I L, obſeruationum, & concurſus L, notetur, ex quo ducatur L N, ipſi I K, parallela, & ad hanc perpendicularis in I, excitetur I N, &c. Vel ſi angulus rectus conſtituatur I N L, & in aſſumpto puncto L, vbi concurſum eſſe volumus, fiat

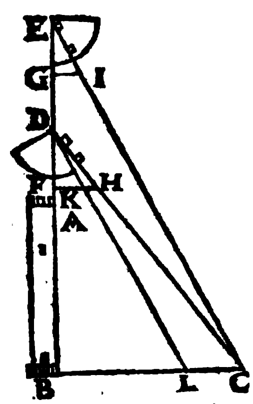
Quo pacto problema conficiatur ſine numeris.

tam angulus NLI complementi maioris anguli obſeruationis, quam angulus NLK, complementi minoris anguli obſeruationis, &c. Reliqua autem fiant, vt in problemate 1. Num. 6. & 8. dictum eſt. Idemque efficies per ea, quæ Num. 7. in eodem problemate 1. ſcripſimus.

EX vertice montis, vel turris per duas ſtationes in aliqua haſta erecta, vel in duabus feneſtris turris, quarum vna ſupra aliam exiſtat, factas, è quibus ſignum aliquod in Horizonte videri poſſit, altitudinem ipſius montis, aut turris metiri. Atque hinc diſtantiam quoque à perpendiculo montis, vel turris vſque ad ſignum viſum cognoſcere.

PROBLEMA IV.

1. NON poſſunt aliquando commodè duæ ſtationes in ſummitate montis, vel turris fieri. Quare tunc ita agendum erit. Sit altitudo AB, ſupra planum BC, menſuranda ex ſummitate A. Erigatur haſta aliqua quotlibet palmorum, aut pedum. Et primum inſpiciatur ſignum C, in plano per angulum BDC; Deinde idem inſpiciatur ex loco ſuperiore haſtæ per angulum BEC. Vterque autem angulus obſeruabitur vel per quadrantem pendulum, vt in priori angulo vides, vel per ſtabilem cum dioptra, vt in poſteriori. Sumptis quoque æqualibus DF, EG, pro ſinubus totis, ducantur ad EB, perpendiculares FH, GI, pro Tangentibus angulorum obſeruationum. Ducta autem DL, ipſi EC, parallela ſecante FH, in K: a quoniam anguli BDL, & E, æquales ſunt, & F, G, recti, nec non & latera adiacentia DF, EG, æqualia: b erunt latera FK, GI, æqualia: atque adeo KH, differentia Tangentium. Quia vero ex ſchol. propoſitionis 4. lib. 6. Euclid. eſt, vt KH, ad FK, ita LC, ad BL: c Vt autem LC, ad BL, ita eſt, ED, ad BD; erit quoque vt KH, ad FK, ita ED, ad DB. Si igitur fiat,



a 29. primi.

b 26. primi.

c 2. ſexti.

Vt KH, differentia inter Tangentes angulorum obſeruationum.	*ad FK, vel ad GI, Tangentem minorem:*	*Ita ED, ſpatium inter angulos obſeruationum, quod notum eſſe poteſt per aliquam menſuram,*	*ad DB,*

Altitudinis inuentio.

inuenietur DB, ex qua ſi dematur portio haſtæ AD, inter altitudinis faſtigium A, & inferiorem angulum obſeruationis D, nota relinquetur altitudo propoſita AB.

EODEMQVE modo in turri eadem altitudo deprehendetur, ſi pro haſta AE, duæ feneſtræ eligantur, è quibus ſignum C, ſub iiſdem angulis videatur, vt patet. Sed tunc altitudini DB, inuentæ (ſi feneſtræ ſint DE,) adiicienda eſt portio turris inter punctum D, feneſtræ inferioris, & turris faſtigium E, vt tota altitudo turris habeatur EB. d Et ſi fiat,

d 4. ſexti.

Vt DF,

Vt DF, ſinus totus	*ad FH, Tangentem maiorem:*	*Ita DB, altitudo inuenta*	*ad BC.*

Diſtantia inuentio.

inuenta erit diſtantia BC.

ALITER.

2. Posito ſinu toto CB, erit BE, Tangens anguli BCE, complementi minoris anguli obſeruationis E, & BD, Tangens anguli BCD, complementi maioris anguli obſeruationis D; ideoque DE, differentia illarum Tangentium. Quamobrem ſi fiat,

Vt DE, differentia Tangentium complementorum angulorũ obſeruationum	*ad DB, tangentem minorem:*	*Ita DE, differentia ſtationum oculorum*	*ad DB,*

prodibit altitudo DB, cognita ab oculo in prima ſtatione vſque ad baſem altitudinis, &c. *Altitudinis inuentio alia.*

ALITER.

3. Vt per ſolos ſinus inſtituatur operatio, inueſtiganda prius eſt vtraque hypotenuſa CD, CE, vel alterutra earum, hoc modo. [a] Quoniam angulus BDC, duobus E, & DCE, æqualis eſt, ſi minor angulus obſeruationis E, ex maiori angulo obſeruationis BDC, ſubtrahatur, notus relinquetur angulus DCE. [b] Itaque ſi fiat,

[a] *29. primi.*
[b] 10. triang. rectil.

Vt ſinus anguli DCE differentia angulorum obſeruationum.	*ad DE, differentiam ſtationum oculorum:*	*Ita ſinus minoris anguli obſeruationis E,*	*ad CD.*
		Vel	
		Ita ſinus anguli EDC, complementi maioris anguli obſeruationis ad duos rectos,	*ad CE,*

Hypotenuſarum inuẽtio.

reperietur tam hypotenuſa CD, quam CE, in partibus differentiæ ſtationum DE. [c] Quapropter ſi iam fiat,

[c] 10. triang. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam CD,*	*Ita ſinus anguli BCD, complementi maioris anguli obſeruationis BDC,*	*ad DB,*
	Vel	*Vel*	
	ad hypotenuſam CE, proximè inuentam:	*Ita ſinus anguli BCE, complementi minoris anguli obſeruationis E;*	*ad EB,*

cognita erit vtraque altitudo DB, EB, &c. Si autem fiat,

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad Hypotenuſam CD,*	*Ita ſinus anguli D, maioris obſeruati,*	*ad BC,*
	Vel	*Vel*	
	ad hypotenuſam CE, nuper inuentam	*Ita ſinus anguli E, minoris obſeruati.*	*ad BC,*

Altitudinis inuentio per ſolos ſinus.

cognoſcetur quoque diſtantia BC, per ſolos ſinus.

4. Ara-

Diſtantiæ inuentio per ſolos ſinus.

4. Absque numeris problema efficiemus, vt in præcedentibus, ſi nimirum in recta EB, ſumatur portio ED, tot partium æqualium, quot palmi pedeſue in ED, differentia ſtationum oculorum exiſtunt, & tam angulus E, minor obſeruationis, quam BDC, maior conſtituatur, concurſuſque C, notetur, à quo ad EB, perpendicularis ducatur CB, &c. vel ſi angulus rectus efficiatur B, & in quouis puncto C, vbi optamus eſſe concurſum, cõſtituatur tam angulus BCD, complemento maioris anguli obſeruationis, quam angulus BCE, complemento minoris anguli obſeruationis æqualis, &c. Reliqua autem abſoluantur, vt in Problemate 1. Num. 6. & 8. dictum eſt. Idemque efficies per ea, quæ ibid. Num. 7. explicata ſunt.

Problematis ſolutio ſine numeris.

COROLLARIVM.

Igitur ſi diſtantia ſigni ex turre viſi vſque ad turrim nota fuerit, nimirum recta CB, reperietur altitudo turris per vnicam ſtationem in faſtigio A factam: [a] ſi videlicet fiat,

[a] 4. Triang. rectil.

Vt ſinus totus CB,	*ad BD, Tangentem anguli BCD, qui complementum eſt anguli obſeruationis D,*	*Ita diſtantia nota CB,*	*ad BD,*

Et ſi ex inuenta BD, auferatur menſoris ſtatura AD, nota relinquetur altitudo turris BA.

Altitudinis inuentio per vnicam ſtationem quando diſtantia nota eſt.

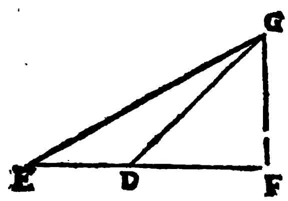
VEL PER SOLOS SINVS.

Vt ſinus anguli obſeruationis D,	*ad diſtantiam CB, notam*	*Ita ſinus anguli BCD, complementi anguli obſeruationis D.*	*ad BD*

Quod ſi oculus D, ſtatuatur in aliqua feneſtra turris, adiicienda erit portio turris inter oculum, & faſtigium ad altitudinem DB, inuentam. Ita namq; conficietur tota altitudo turris EB, ſi faſtigium ſit E, vt perſpicuum eſt.

EX VERTICE MONTIS, AVT TVRRIS ALTITVDInem ipſius, ſi in plano, cui inſiſtit, ſpatium aliquod è directo menſoris notum ſit, deprehendere.

PROBLEMA V.



1. Qvando ſpatium aliquod DE, è directo menſoris à monte vel turri remotum fuerit notum, metiemur ipſam altitudinem FG, è faſtigio G, hac ratione. Inſpiciantur termini D, E, per angulos FGD, FGE, ſiue per Quadrantem, pendulum, ſiue ſiue per ſtabilem. Et quoniam, poſito ſinu toto GF, Tangentes angulorum obſeruationum ſunt DF, EF, ipſarumque differentia per ſpatium propoſitum: Si fiat,

Vt DE, differentia Tangentium angulis obſeruationum debitarum	*ad ſinum totum GF:*	*Ita DE, ſpatium notum*	*ad GF,*

manifeſta erit altitudo GF, quæſita in partibus ſpatij noti DE.

ALI-

ALITER.

2. Per ſolos ſinus eandem altitudinem G F, adipiſcemur, ſi prius hypotenuſam G D, venabimur, hoc modo. [a] Fiat, [a] 10. triang. rectil.

Vt ſinus anguli D G E, differentia angulorum obſeruationum, ad D E, ſpatium cognitum, Ita ſinus anguli E, complementi maioris anguli obſeruationis ad hypotenuſam G D,

Numerus enim productus dabit hypotenuſam GD, in partibus ſpatii DE, notam. [b] Si ergo rurſus fiat, [b] 10. triang. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti F, ad hypotenuſam G D, proximè inuentam: Ita ſinus anguli D, complementi minoris anguli obſeruationis ad G F, altitudinem,

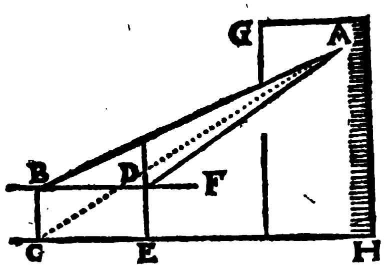
producetur altitudo GF, in partibus hypotenuſæ GD, ſiue ſpatij DE, nota. *Solutio problematis ſine numeris.*

3. SINE numeris agendum erit, vt in problemate 1. declaratum eſt.

DISTANTIAM ab oculo, vel pede menſoris ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum, per duas ſtationes in plano factas metiri.

PROBLEMA VI.

1 SIT inquirenda diſtantia puncti A, in muro G H, ſiue perpendiculari ad Horizontem, ſiue inclinato, vel etiam in tecto quopiam; ab oculo B, vel pede C, poſita ſtatura menſoris B C. Concipiatur ducta B D, ipſi plano CE, paſallela, ſitque primo punctum A, altius, quam oculus B. Inſpecto puncto A, notetur angulus ABD, quem latus pinnacidiorum in quadrante pendulo, vel linea fiduciæ in dioptra Quadrantis ſtabilis cum recta BD, facit. Deinde accede verſus punctum A, quotlibet palmis aut pedibus vſque ad D, vt BD, differentia ſtationum nota ſit. Rurſumque ex D, punctum A, inſpiciatur, notato diligenter angulo ADF: exiſtentque rectæ AB, AD, B D, B C, D E, in eodem plano, in eo videlicet, quod per ſtaturas menſoris B C, DE, & per punctum A, ducitur, [c] Et quia angulus A D F, duobus B, & B A D, eſt æqualis: ſi angulus B, in remotiore ſtatione auferatur ex angulo D, in propinquiore, notus fiet reliquus angulus A. [d] Si igitur fiat, [c] 32. primi. [d] 10. triang. rectil.



Vt ſinus anguli A, quo angulus minor B, à maiori differt, ad B D, differentiam ſtationum: Ita ſinus anguli A D B, qui complementum eſt maioris anguli D, ad duos rectos, ad A B, diſtantiã quæſitam,

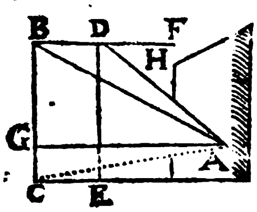
reperta erit quæſita diſtantia A B, in partibus differentiæ ſtationum.

QVOD ſi oculus exiſtat in D, & recedatur à puncto D, vſque ad B, inuenietur eadem arte diſtantia D A, ſi loco anguli A D B, ſumatur angulus B, in remotiore ſtatione, vt liquet. [e] Eſt enim vt ſinus anguli A, quo angulus minor B, [e] 10. triang rectil.

nor B, à maiori ADF, differt, ad BD, differentiam ſtationum: ita ſinus anguli B, in remotiori ſtatione. ad DA.

2. Distantia verò à puncto A, ad pedem menſoris C, hoc eſt, recta AC, cognoſcetur per Problema 12. triang. rectil. cap. 3. lib. 1. cum in triangulo obliquangulo ABC, duo latera AB, BC, nota ſint, nimirum diſtantia inuenta, & ſtatura menſoris, comprehendantque angulum ABC, notum, vtpote conflatum ex recto CBD, & angulo obſeruationis ABD.

3. Sit deinde punctum A, vt in muro HI, infra oculum B. Inſpecto puncto A, obſeruetur angulus CBA. quem latus pinnacidiorum cum perpendiculi filo, vel dioptræ linea fiduciæ cum BC, facit: Deinde accede verſus A, vſque ad D, & iterum conſidera angulum EDA: exiſtentque rectæ AB, AD BD, BC, DE, in vno eodemque plano, in eo videlicet, quod per ſtaturas menſoris BC, DE, & per punctum A, ducitur.



I

a 32. primi.

a Et quoniam angulus FDA, complementi anguli obſeruationis in propinquiore ſtatione æqualis eſt duobus DBA, DAB; ſi DBA, angulus complementi anguli remotioris ſtationis dematur ex angulo ADF, complementi anguli ſtationis propinquioris, reliquus fiet notus BAD. b Si ergo fiat,

b 10. Triang. rectil.

Vt ſinus anguli BAD, differentia inter angulos complementorum angulorum obſeruationum	*ad BD, differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli ADB, conflati ex recto BDE, & ex angulo obſeruationis ADE, in propinquiore ſtatione*	*ad AB diſtantiam quæſitã.*

cognita erit diſtantia AB, quam quærimus, in partibus differentiæ ſtationum BD.

Qvod ſi oculus ponatur in D, & recedatur à puncto D, vſque ad B, reperietur eodem modo diſtantia DA, ſi pro angulo BDA, aſſumes angulum DBA, complementi anguli ABC, obſeruationis in remotiore ſtatione, vt manifeſtum eſt. c Nam eſt, vt ſinus anguli BAD, differentiæ inter angulos complementorum angulorum obſeruationum, ad BD, differentiam ſtationum: ita ſinus anguli DBA, complementi anguli ABC, in remotiore ſtatione, ad DA.

c 10. Triang. rectil.

4. Vt autem diſtantia CA, à pede ad punctum A, inueniatur, ita progrediemur. Quoniam in triangulo rectangulo ABG, (ſi ex puncto A, concipiatur ducta ad BC, ſtaturam menſoris perpendicularis AG,) baſis AB, nota eſt per inuentionem, & angulus BAG, notus, quippe cum ſit complementum anguli obſeruationis ABG; d Si fiat,

d 2. Triang. rectil.

Vt ſinus totus	*ad baſem AB, proximè inuentam:*	*Ita ſinus anguli BAG, complementi anguli obſeruationis,*	*ad BG,*

cognoſcetur BG, in partibus baſis AB, hoc eſt, in partibus differentiæ ſtationum BD, in quibus AB, inuenta fuit. Ablata autem BG, ex menſoris ſtatura BC, nota fiet reliqua CG. e Item ſi fiat,

e 2. Triang. rectil.

Vt ſinus totus	*ad baſem AB, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli obſeruationis ABG,*	*ad AG,*

nota etiam fiet AG, in partibus eiuſdem baſis AB, vel differentiæ ſtationum BD. Quia

BD. Quia ergo in triangulo rectangulo ACG, duo latera AG, GC, per inuentionem nota facta ſunt; *a* cognoſcetur quoq; baſis AC, quod eſt propoſitum. *a* 3. triang. rectil.

5. Manifestvm autem eſt, eodem pacto vtramque diſtantiam AB, AC, reperiri, etiamſi punctum A, in plano ſit, in quo menſor conſiſtit, nimirum in Horizonte, qui ponatur tranſire per rectam AG, ita vt ſtatura menſoris ſit BG, Immo tunc per vnicam ſtationem vtraque diſtantia AB, AG, reperietur. Nam poſito ſinu toto BG, ſtatura menſoris; AB, ſecans eſt anguli obſeruationis ABG, & AG, Tangens. Quocirca ſi fiat,

Vt BG, ſinus totus	*ad BA, ſecantem anguli obſeruationis ABG,*	*Ita BG, ſtatura menſoris*	*ad BA,*
	Vel		
	ad GA, Tangentem anguli obſeruationis ABG:		*ad GA,*

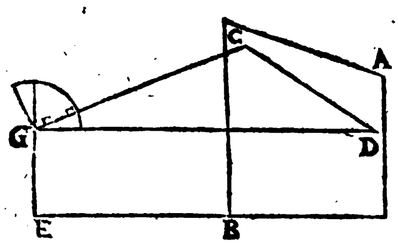
vtraque diſtantia & BA, ab oculo B, & GA, à G, pede menſoris cognita fiet.

6. Iam verò ſine numeris operabimur, vt in præcedentibus, vt manifeſtum eſt, ſi rectè figura conſtruatur, quemadmodum Num. 6. & 8. problematis 1. dictum eſt. *Quo pacto problema ſine numeris ſit ſoluendum.*

INTERVALLVM inter duo puncta in quolibet plano eleuato, ſiue illud ad Horizontem rectum ſit, ſiue inclinatum, metiri.

PROBLEMA VII.

1. In plano quolibet eleuato AB. propoſitum ſit interuallum CD, quod ex plano EB, inueſtigandum ſit. Poſito oculo in G, vt ſtatura menſoris ſit, GE, inueſtigetur per præcedens problema 6. vtraque diſtantia GC, GD, in partibus ſtaturæ menſoris GE, ſiue differentiæ duarum ſtationum, è quibus ipſæ diſtantiæ inueſtigantur. Deinde applicato Quadrante ſtabili ad oculum G, ita vt eius planum per puncta CD, tranſeat, & vna eius ſemidiameter ad punctum D, vergat, (quod fiet, ſi poſita linea fiduciæ dioptræ ſupra illam ſemidiametrum, punctum D, per foramina pinnacidiorum conſpiciatur) vertatur dioptra, donec per eam punctum C, appareat, arcuſque inter dictam ſemidiametrum, & lineam fiduciæ interceptus notetur. hic enim angulum G, metietur. Quod ſi altera ſemidiameter Quadrantis vltra rectam GC, exiſtat, erit angulus acutus CGD: Si verò altera illa ſemidiameter citra rectam GC, extiterit, dictus angulus erit obtuſus, qui cognoſcetur, ſi ad rectum adiiciatur reliquus angulus inter alteram illam ſemidiametrum, & rectam GC; quem quidem reliquum inueſtigabimus per Quadrantem, vt de acuto CGD, diximus, ſi videlicet in recta CD, mente notemus punctum, in quod altera illa ſemidiameter incurreret producta. Si namque tunc ſemidiameter illa rectæ GC, congruat,

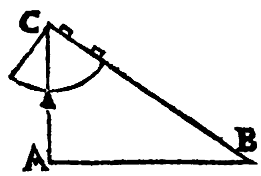


& dioptra ad illud punctum mente notatum dirigatur, indicabunt gradus inter illam ſemidiametrum, & dioptram prædictum angulum reliquum. Si denique altera illa ſemidiameter præcisè in C, tendat, angulus C G D, rectus erit. Quia ergo in triangulo G C D, obliquangulo latera nota G C, G D, continent angulum notum G; cognoſcetur latus C D, per problema 12. triang. rectil. cap. 3. lib. 1.

Problematis ſolutio ſine numeris. 2. ABSQVE numeris facile problema ſoluetur, ſi fiat angulus G, æqualis ei, qui per Quadrantem obſeruatus fuit, & in rectis G C, G D, ex inſtrumento partium tot particulæ ſumantur, quot palmi, aut pedes in diſtantiis G C, G D, inuenti ſunt, &c.

LONGITVDINEM lineæ rectę, quando menſor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota, quę perpendicularis ſit in eo extremo ad planum, in quo linea iacet, exiſtens alterum extremum videre poteſt, per Quadrantem comprehendere.

PROBLEMA VIII.



1. SIT exquirenda longitudo A B, hoc eſt, diſtantia inter A, & B, etiamſi puncta intermedia ſiue propter tumores interiectos, ſiue propter valles, cerni nequeant, dummodo in extremo A, exiſtens menſor, vel in aliqua altitudine cognita ad planum, in quo linea A B, perpendiculari, ita vt A C, ſit vel ſtatura menſoris, vel haſta aliqua erecta, vel turris. Inſpecto extremo B, obſeruetur angulus C. Et quia poſito ſinu toto AC, diſtantia AB, eſt Tangens anguli obſeruati C: ſi fiat,

Vt ſinus totus AC,	*ad AB, tangentem anguli obſeruati C.*	*Ita AC, ſtatura menſoris, vel altitudo nota,*	*Ad AB, longitudinem.*

a 4. Triang. rectil. procreabitur longitudo A B, in partibus altitudinis notæ A C. Quæ per ſolos ſinus etiam producetur, *a* ſi fiat,

Vt ſinus anguli B, complenti anguli C, obſeruati	*Ad AC, ſtaturam menſoris, vel altitudinem notam.*	*Ita ſinus anguli C, obſeruationis*	*ad AB, longitudinem*

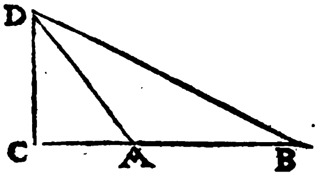
Solutio problematis ſine numeris. 2. SINE numeris eadem longitudo A B, cognoſcetur, vt in præcedentibus dictum eſt: ſi videlicet ex inſtrumento partium accipiatur A C, tot particularum, quot palmi, pedeſue in altitudine A C, exiſtunt, conſtituaturque angulus obſeruationis C, ac tandem ad A C, perpendicularis excitetur AB, &c.

LONGITVDINEM, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipſa longitudo producta ad pedes menſoris pertingat, ex altitudine aliqua nota dimetiri.

PRO-

PROBLEMA IX.

1. Sɪᴛ longitudo AB, è directo menſoris in C, exiſtentis, ita vt recta B A, producta tranſeat per C. Sit quoque CD, vel ſtatura menſoris, vel altitudo quæpiam nota. Si igitur per præcedens problema 8. inquiratur vtraque longitudo CB, CA, & CA, ex CB, detrahatur, reliqua fiet AB, ac proinde cognita.



ALITER

2. Pᴏsɪᴛᴏ ſinu toto CD, ſi termini A, B, per angulos CDA, CDB, ſpectētur, erit C A, Tangens minoris anguli, & C B, maioris, at A B, differentia earum Tangentium. Quare ſi fiat,

Vt ſinus totus CD,	*Ad AB, differentiam Tangentium angulorum obſeruationum.*	*Ita CD, altitudo nota*	*Ad AB, longitudinem,*

efficietur longitudo AB, nota in partibus altitudinis notæ C D.

ALITER

3. Pᴇʀ ſolos ſinus eandem longitudinem A B, cognoſcemus: ſed prius inuenienda eſt AD, [a] hac ratione fiat, a 5. triang. rectil.

Vt ſinus anguli CAD, complementi minoris anguli obſeruationis	*ad C D, altitudinem notam:*	*Ita ſinus totus anguli recti C,*	*ad A D,*

Productus enim numerus dabit A D, notam in partibus altitudinis notæ C D, [b] b 10. triang. rectil.
Si ergo rurſus fiat,

Vt ſinus anguli CBD, complementi maioris anguli obſeruationis	*Ad A D, proxime inuentam,*	*Ita ſinus anguli A D B, differentia inter duos angulos obſeruatos*	*ad A B, longitudinē,*

prodibit nota longitudo AB, in partibus rectę AD, hoc eſt, altitudinis notæ CD, in quibus recta AD, fuit inuenta.

4. Sɪɴᴇ numeris rem perficies, quemadmodum in præcedentibus, vt liquet.

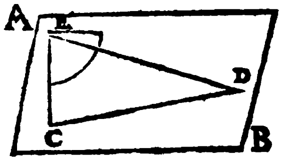
LONGITVDINEM tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumque extremum inſpici poteſt, notam efficere.

PROBLEMA X.

1. Sɪᴛ planum Horizontis AB, in quo jaceat longitudo CD, in tranſuerſum, pes autem menſoris ſit in E, ita vt recta D C, per pedes menſoris in E, non tranſeat. Quando namque longitudo D C, è directo menſoris ſita eſt, inueſtigabitur ea per problema 9. præcedens. Vt ergo tranuerſa longitudo CD, nota efficiatur, inueſtiganda primum erit vtriuſque puncti extremi C, D, diſtantia à pede menſoris E, & quidem per vnicam ſtationem in E, factā, vt problemate 6. Num.

 5. dictum

5. dictum eſt. Deinde per Quadrantem cum dioptra angulus C E D, exquirendus in plano Horizontis. quod fiet, ſi Quadrantis planum erectum tranſeat ſemel per puncta E, C, & iterum per puncta E, D, vt deſignari poſsint partes rectarum E C, E D. Quadrantis enim vno latere incumbente rectæ E C, dioptra vero rectæ E D, ſi angulus eſt acutus, indicabit arcus inter illud latus, ac dioptram, angulum C E D. Quod ſi alterum Quadrantis latus rectæ ED, congruet erit angulus CED rectus: Si vero recta ED. vltra alterum latus Quadrantis extiterit, dictus angulus obtuſus erit, qui cognitus erit, ſi recto angulo addatur reliquus inter alterum latus, & rectam ED: Qui quidem reliquus angulus per Quadrantem explorabitur vt de acuto diximus in problemate 7. Atq; ita habebimus triangulum ECD, cuius duo latera nota ſunt EC, E D, angulumq; notum comprehendunt C E D. [a] Igitur, & tertium latus C D, cognitum erit.



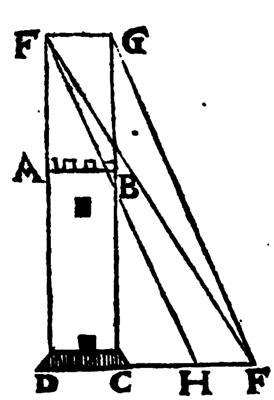
[a] 12. triang. rectil.

2. QVO pacto autem ſine ope numerorum problema perficiendum ſit, traditum eſt in problemate 7. Num. 2.

LONGITVDINEM in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas: vel in duabus feneſtris, quarum vna ſit ſub altera ad perpendiculum, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ignota ſit, demetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere.

PROBLEMA XI.

1. QVAMVIS problema hoc ſolutum iam ſit in problemate 3. & 4. occaſione altitudinis inquirendæ, libet tamen idem hic per ſe, & paulo aliter expedire. Sit ergo turris A B CD, & longitudo propoſita C E: ſtatura autem menſoris B G, vel AF. Inſpecto extremo E, in prima ſtatione per angulum C G E, & in ſecũda per angulum DFE, ducatur FH, ipſi G E, parallela. Et quia in triangulis F D H, G C E, anguli D, C, recti ſunt, [b] & H, E, æquales [c] latuſque FD, lateri GC. æquale: [d] erunt quoque & anguli G, DFH, æquales, & latera D H, C E. Poſito autem ſinu toto F D, erit DE, Tangens maioris anguli obſeruationis D F E, & D H, Tangens anguli D F H, hoc eſt, anguli æqualis G, in prima ſtatione obſeruati: ac proinde H E, differentia erit earum Tangentium, [e] quæ quidem æqualis eſt differentiæ ſtationum FG, vel AB, vel DC. Si igitur fiat,



[b] 29. primi.
[c] 34. primi.
[d] 26. primi.
[e] 34. primi.

Vt H E, differentia Tangentium angulorum obſeruationum.	*Ad CE, Tangentem minoris anguli obſeruationis CGE.*	*Ita HE, vel FG, differentia ſtationum.*	*ad G E, longitudinem.*

gigne-

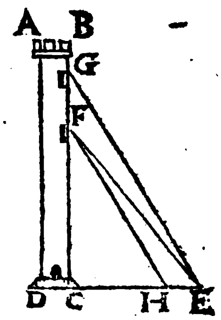
gignetur longitudo optata CE, in partibus differentiæ ſtationum HE, vel FG, &c. Quod ſi rurſus fiat,

Vt HE, differentia Tangentium angulorum obſeruationum,	*Ad FD, ſinum totum*	*Ita HE, vel FG, differentia ſtationum*	*ad FD,*

inuenietur recta FD, à qua ſi tollatur ſtatura menſoris AF, reliqua fiet altitudo turris AD.

2. Sed iam ex duabus feneſtris F, G, inſpiciatur extremum E, per angulos CFE, CGE, ducaturq; FH, ipſi GE, parallela. a Quoniã igitur angulus CFH, angulo CGE, æqualis eſt: ſi ponatur ſinus totus CE, erit CG, Tangens anguli CEG, complementi minoris anguli obſeruationis G, & CF, Tangens anguli CEF, complementi maioris anguli obſeruationis CFE: at FG, differentia ſtationum, hoc eſt, interuallum inter feneſtras, differentia erit dictarum Tangentium. Quamobrem ſi fiat, a 29. primi.

Vt FG, differentia Tangentium cõplemẽtorum angulorum obſeruationum,	*Ad CE, ſinum totum,*	*Ita FG, differentia ſtationum inter feneſtras,*	*ad CE, longitudinem propoſitam,*



cognita erit longitudo CE, deſiderata. Et ſi rurſum fiat,

Vt FG, differentia Tangentium complementorũ angulorũ obſeruationũ	*ad GC, Tangentem complementi minoris anguli obſeruati*	*Ita FG, differentia ſtationum inter feneſtras*	*ad GC,*

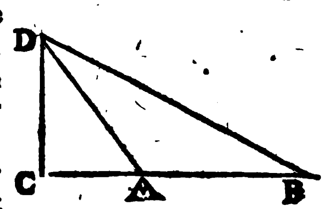
inuenta erit altitudo GC, à ſuperiori feneſtra ad baſem, in partibus differentiæ ſtationum, cui ſi addatur portio GB, à ſuperiori feneſtra ad faſtigium vſque, tota turris altitudo BC, non ignorabitur.

3. SINE auxilio numerorum procedendum eſt, vt in ſuperioribus.

LONGITVDINEM rectæ è directo menſoris poſitæ, cuius extremum vtrumque, vel alterum non appareat, niſi ad dextram, vel ſiniſtram accedat menſor, per quadrantem comprehendere.

PROBLEMA XII.

1. SIT longitudo AB, & menſor in extremo A, conſtitutus videre non poſſit alterum extremum, niſi ad dextram ſiniſtramue recedat vſq; ad D, punctũ, è quo vtrumq; extremũ cerni poſſit. Erit igitur longitudo AB, menſori in D, exiſtenti poſita in tranſuerſum. Quare ea per problema 10. inueſtigabitur.



2. Eodẽ modo, ſi mẽſor exiſtat in C, è directo lõgitudinis, ſed vel neutrũ extremũ, vel alterũ dũtaxat

intueri poſsit, longitudinem A B, venabimur. Si namque ex C, ad ſiniſtram, vel dextram procedemus, donec in D, vtrumq; extremũ videamus, inuenietur tranſuerſa longitudo AB, per problema 10. vt prius. Neque vero refert, ſiue per angulum rectum BCD, recedatur in latus, ſiue per angulum acutum BAD, &c.

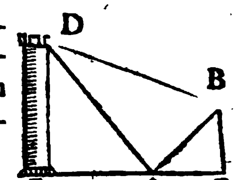
3. OPERATIO ſine numeris inſtituenda eſt, vt in ſuperioribus.

4. QVANDO menſor in A, exiſtens videre poteſt extremum B, inueſtigabitur longitudo AB, per problema 8.

SI autem è directo longitudinis exiſtat in C, & vtrumque etremum cernat, explorabitur per problema 9. eadem longitudo A B.

DISTANTIAM alicuius ſigni in Horizonte poſiti, à ſummitate turris, vel muri alicuius, licet ad ipſum ſignum acceſſus non pateat, per quadrantem colligere.

PROBLEMA XIII.



1. IN Horizontis plano punctum A, diſtet à ſummitate D, alicuius altitudinis CD, per rectam AD, quam metiri iubemur, Vbicunq; oculus menſoris exiſtat, nimirum in B, vt ſit ſtatura menſoris BG, inueſtigentur per problema 6. diſtantiæ punctorum A, D, ab oculo menſoris B.

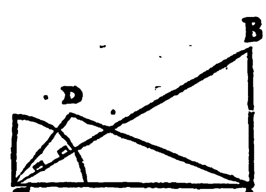
Deinde angulus exploretur A B D, quem nobis præbebit Quadrãs cum dioptra, ſi ad oculum ita applicetur, vt eius planum per tria puncta B, A, D, tranſeat, poſito centro in B; atque vnum eius latus rectæ B A, incumbat, dioptra vero ad punctum D, dirigatur, &c. Itaq; cum in triangulo B A D, duo latera nota B A, B D, angulum notum contineant B; [a] cognoſcetur quoque latus AD.

[a] *10. triang. rectil.*

2. QVA ratione eadem diſtantia AD, exquirenda ſit abſque numeris, docuimus Num. 5. problematis 7.

ALTITVDINEM inacceſſibilem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum lineam rectam accedere poſſimus, aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolũ ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis appareat, per Quadrantem explorare.

PROBLEMA XIV.



1. Sit altitudo A B, ad quam ex C, loco menſoris non liceat accedere, aut ab ea recedere ſecundum lineam rectam, ſed ſolum in latus, verbi gratia vſque ad D, vnde baſem videre poſsimus. Inquiratur per problema 10. longitudo tranſuerſa AC, ex loco D: inſpiciaturque vertex B, ex C, per angulum ACB. Et quia, poſito ſinu toto A C, altitudo A B, Tangens eſt anguli obſeruationis ACB, [b] ſi fiat.

[b] *4. Triang. rectil.*

Vt ſinus

Vt ſinus totus AC,	*ad AB, Tangentem anguli obſeruati ACB:*	*Ita longitudo AC, per problema 10. inuenta*	*Ad AB, altitudinem,*

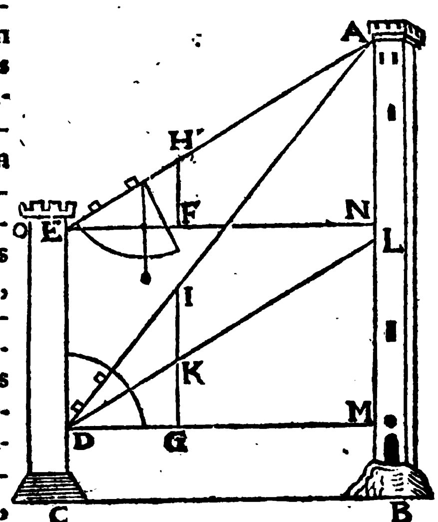
prodibit nota altitudo AB, in partibus, in quibus AC, inuenta fuit.

2. NON erit autem difficile problema hoc ſine numerorum auxilio exequi, ſi ſuperiora præcepta conſulantur.

ALTITVDINEM inacceſſibilem, quando neque diſtantia à loco menſoris ad eius baſem nota eſt, neque è directo ipſius duæ ſtationes in plano fieri poſſunt, neque denique baſis appareat, per Quadrantem notam reddere. Atque hinc obiter ipſam quoque diſtantiam elicere.

PROBLEMA XV.

1. SIT altitudo AB, locus menſoris C, diſtantia CB, incognita: baſis B, non appareat, & à loco C, non liceat accedere ad AB, neque recedere, vt duæ ſtationes fiant in plano. Erigatur haſta CE, ſi non præſtò ſit turris aliqua CO, & ſtatura menſoris ſit CD. Sumpta deinde portione haſtæ DE, notarum partium, concipiantur ductæ DM, EN, ipſi CB, parallelæ, obſeruenturq; per Quadrantem anguli ADM, AEN. Sumptis quoq; rectis æqualibus EF, DG, pro ſinubus totis, erigantur perpendiculares FH, GI, pro Tãgentibus angulorum obſeruationũ. Sumpta item AL, æquali ipſi DE, ducatur recta DL, [a] quæ parallela erit ipſi EA, ſecabitq; GI, in K. [b] Quoniam vero angulus DKG, angulo DLB, & hic angulo EAB, & hic angulo EHF, æqualis eſt; erit angulus DKG, angulo EHF, æqualis: Eſt autem & rectus G, recto F, æqualis, & latus DG, lateri EF, æquale; [c] erunt quoq; latera GK, FH, æqualia, & anguli D, E, æquales: ideoq; IK, differentia erit inter Tangentes GI, GK, angulorum GDI, GDK, ſiue FEH. [d] Et quia eſt, vt IK, ad KG. ita AL, ad LM; erit per contrariam compoſitionem à nobis in ſcholio propoſ. 18. lib. 5. demonſtratam, ita quoque IK, ad IG, vt AL, hoc eſt, vt ED, differentia ſtationum, ad altitudinem AM. Igitur ſi fiat,



[a] 33. primi.
[b] 29. primi.
[c] 26. primi.
[d] ſchol 4. ſexti.

Vt IK, differentia Tangentium	*ad IG, Tangentem maiorem:*	*Ita AL, vel ED, differentia ſtationum*	*Ad AM, altitudinem,*

gignetur altitudo AM, cui ſi apponatur ſtatura menſoris MB, tota altitudo AB, nota efficietur. [e] Iam ſi fiat, [e] 4. ſexti.

Vt GI, ſinus totus	*ad GD, Tangentem complementi maioris anguli obſeruationis:*	*Ita altitudo inuenta AM,*	*ad MD, diſtantiam,*

inuenta erit diſtantia DM, vel CB.

2. PER ſolos ſinus idem problema conficiemus, ſi prius inueſtigetur hypotenuſa AD, hoc modo. [f] Fiat, [f] 10. Triang.

K *Vt ſinus rectil.*

Vt ſinus anguli A D L, differentia inter angulos obſeruationum ADM, LDM, *ad A L, hoc eſt, ad DE, differentiam ſtationum:* *Ita ſinus anguli ALD, qui relinquitur, ſi DLM, complementum minoris anguli L D M, obſeruati ex duobus rectis ſubtrahatur,* *ad AD,*

Nam productus numerus offeret hypotenuſam AD.[a] Si ergo rurſus fiat,

[a] 10. triang. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti M, *ad hypotenuſam AD, inuentam:* *Ita ſinus maioris anguli obſeruationis ADM,* *ad AM,*

procreabitur altitudo A M, &c.[b] Si autem fiat,

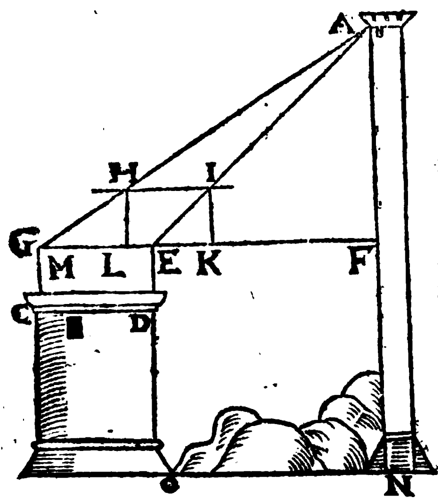
[b] 10. triang. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti M, *ad hypotenuſam AD, proxime inuentam,* *Ita ſinus anguli D A M, complementi maioris anguli obſeruationis,* *ad DM,*

efficietur diſtantia D M, cognita.

3. Si ſine numeris problema ſoluendum eſt, recurrendum erit ad ſuperiora, præſertim ad Num. 6. 8. & 7. problematis 1.

ALTITVDINEM maiorem ex minori cognita, per duas ſtationes in ſummitate, vel in duabus feneſtris factas, etiamſi ſolum maioris altitudinis vertex cernatur, per Quadrantem adinuenire. Atque hinc diſtantiam quoque inter altitudines colligere.



PROBLEMA XVI.

1. Maior altitudo ſit AN, minor turris C O, cognita, ex qua ſolum cacumen A, non autem baſis N, appareat. Fiant in ſummitate duæ ſtationes in C, D, menſoriſque ſtatura ſit C G, vel D E, & ad A N, intelligatur ducta perpendicularis G E F. Atque inſpecto cacumine A, obſeruentur anguli A E F, A G F. Reliqua fiant, vt in 2. problemate. Si ergo fiat, ſicut in eo problemate demonſtrauimus,

Vt GM, differentia Tangentium GL, EK, angulorum H, I, qui complementa ſunt angulorũ obſeruationum, poſitis ſinubus totis HL, IK, *ad GE, differentiam ſtationum:* *Ita LH, ſinus totus* *ad FA,*

Inuenietur altitudo A F, cui ſi adijciatur F N, conflata ex altitudine turris C O, & ſtatura menſoris, tota maior altitudo AN, nota euadet. Item ſi fiat,

Vt GM, differentia Tangentium earundem. *ad GE, differentiam ſtationum:* *Ita GL, Tangens complementi minoris anguli obſeruationis* *ad GF,*

procreabitur diſtantia G F, à qua ſi dematur latitudo turris C O, reliqua erit diſtantia inter duas turres.

Hæc omnia in 2. problemate demonſtrauimus: & ob hanc cauſam eiſdem prorſus literis hic vſi ſumus, quas ibi vſurpauimus, vt demonſtratio ex illo loco in hunc transferri poſsit.

2. QVAN-

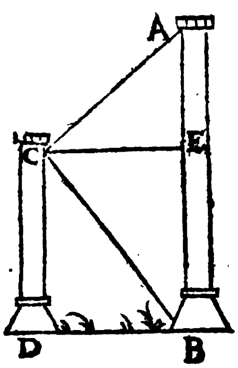
2. QVANDO in ſummitate turris minoris fieri duæ ſtationes nequeunt, eligantur duæ feneſtræ, in quibus duæ ſtationes fiant. Vt in figura præcedentis problematis 15. in minori turri CE, deligantur duæ feneſtræ D, E, & reliqua fiant, vt in haſta CE. Solum pro ſtatura menſoris ad altitudinem inuentam AM, adijcienda eſt portio turris inter inferiorem feneſtram D, & baſem C, vt tota maior altitudo AB, nota efficiatur.

3. SINE numeris nihil noui p̄cipimus, ſed ad ſuperiora lectorem amandamus.

4. QVO ēt pacto ꝓblema hoc ꝑ ſolos ſinus poſsit effici, docuimꝰ ꝓbl. 2. & 15.

ALTITVDINEM maiorem ex minori incognita, dummodo baſis maioris cerni poſſit per Quadrantem perſcrutari.

PROBLEMA XVII.



1. SIT maior altitudo AB, & minor CD, incognita, poſsitq; baſis maioris B, videri ex minori altitudine. Primum per duas ſtationes in ſummitate turris minoris, vel in duabus feneſtris, inquiratur tam altitudo turris minoris CD, quam diſtantia DB, vt problemate 11. vel etiam 3. & 4. traditum eſt. Nam tunc ex minori altitudine nota CD, maior AB, explorabitur per ea, quæ in antecedente problemate 16. ſcripſimus.

2. AT ex altitudine CD, & diſtantia DB, cognitis diſcemus altitudinem maiorem AB, per ſolos ſinus, hoc modo. Ex aliqua feneſtra C, minoris altitudinis inſpiciantur extrema A, B, maioris altitudinis per ãgulos ACE, BCD, (ducta prius CE, ipſi DB, parallela, vel ad vtramq; altitudinem perpendiculari.) [a] Deinde fiat,

[a] 10. Triang. rectil.

Vt ſinus anguli CBD, complementi illius, quo baſis inſpicitur	*ad inuentam altitudinem CD:*	*Ita ſinus totus anguli recti D,*	*ad BC,*

Vel

Vt ſinus anguli BCD, quo baſis inſpicitur,	*ad inuentam diſtantiam BD:*	*Ita ſinus totus anguli recti D,*	*ad BC,*

Vtroque enim modo cognita erit hypotenuſa BC. [b] Si ergo rurſus fiat,

[b] 10. Triang. rectil.

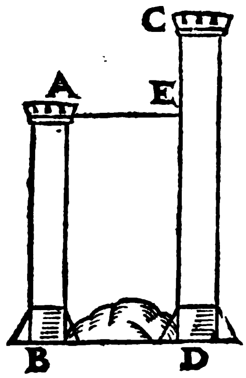
Vt ſinus anguli A, complementi illius quo cacumen inſpicitur,	*ad inuentam hypotenuſam BC:*	*Ita ſinus anguli ACB, conſlati ex complemento anguli, quo baſem intuemur, & ex angulo, quo faſtigium cernitur,*	*ad AB,*

manifeſtabitur altitudo maior AB.

3. DE ſolutione problematis ſine numeris nihil noui hic præcipimus, ſed ea ex ſuperioribus petenda eſt.

ALTITVDINEM minorem ex maiori cognita, licet baſis minoris non cerni poſſit, ope Quadrantis perueſtigare. Atque hinc diſtantiam quoque inter altitudines duas eruere.

PROBLEMA XVIII.



1. Minor altitudo A B, ex maiore C D, cognita proponatur addiſcenda, etiamſi baſis B, non cernatur. Concipiatur ducta recta AE, ipſi BD, parallela, vt E D, minori altitudini AB, ſit æqualis. Si igitur ex duabus ſtationibus in ſummitate maioris altitudinis C D, factis, per problema 3. vel ex duabus feneſtris, per problema 4. inueſtigetur tam altitudo C E, quam diſtantia A E, inſpecto cacumine A, ac ſi eſſet ſignum aliquod in Horizonte A E, viſum, & CE, ex tota altitudine C D, auferatur, reliqua ED, hoc eſt, minor altitudo fiet nota. Diſtantia autem AE, inuenta quæſitæ BD, eſt æqualis: ac proinde DB, cognita erit.

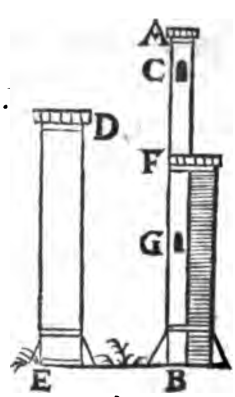
ALTITVDINEM minorem ex maiori incognita, dummodo baſis minoris videri poſſit, per Quadrantem explorare. Atque hinc diſtantiam quoque inter duas altitudines coniicere.

PROBLEMA XIX.

1. Repetatur figura præcedentis problematis. Et quia baſis B, minoris altitudinis ex maiore apparet; ſi punctum B, ex duabus ſtationibus in ſummitate maioris altitudinis C D, factis inſpiciatur, reperietur per problema 3. tã altitudo maior CD. quam diſtantia BD. Quod etiam efficies per problema 4. ſi punctum B, ex duabus feneſtris maioris altitudinis C D, inſpiciatur. Cognita ergo altitudine maiori CD, inuenietur minor altitudo AB, vt in præcedẽti problemate traditũ eſt. Cũ igitur & diſtãtia BD, ſit explorata, patet ſolutio ꝓblematis ꝓpoſiti.

PORTIONEM altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiori cognoſcere per Quadrantem.

PROBLEMA XX.



1. Sit portio A C, maioris altitudinis A B, exquirenda ex minore altitudine DE: Item portio FG, minoris altitudinis FB, ex altitudine maiore DE. Si DE, altitudo minor eſt portione CB, inueſtigetur tam altitudo maior A B, quam CB, ex minore altitudine DE, per problema 16. vel 17. prout videlicet DE, cognita fuerit, aut incognita. Nam CB, ablata ex A B, notam relinquet portionem A C, quæſitam.

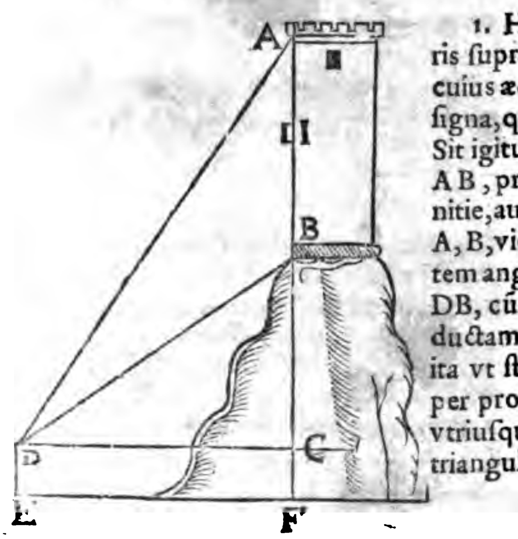
2. Si vero D E, maior eſt portione F B, explorandaq; ſit portio AF; inquirẽda quidem erit maior altitudo A B, ex minore D E, per problema 16. vel 17. At vero altitudo minor

nor FB, ex maiore DE, per problema 18. vel 19. exploranda erit. Nam rurſus FB, detracta ex AB, notam relinquet portionem AF.

3. NON ſecus per problema 18. vel 19. indaganda erit vtraque altitudo minor FB, GB, ex maiore DE, vt illarum differentia FG, quæ quæritur, colligatur nota.

ALTITVDINEM, cuius baſis impoſita ſit alteri altitudini, & vtraque illius extremitas cerni poſſit, etiamſi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiuſdem puncti infimi diſtantia à loco menſoris cognita non ſit, per Quadrantem ex valle, aut ex plano Horizontis explorare.

PROBLEMA XXI.



1. HVIVSCEMODI altitudo eſt turris ſupra montem poſita, & portio alicuius ædificij inter duas feneſtras, vel duo ſigna, quorum alterum altero ſuperius eſt. Sit igitur ſupra montem altitudo turris AB, propoſita. Ex aliquo loco E, in planitie, aut valle, vnde vtrumque extremum A, B, videatur, obſeruentur per Quadrantem anguli ADC, BDC, quos radij DA, DB, cũ recta DC, quæ ex D, ad AB, productam intra montẽ eſt perpendicularis: ita vt ſtatura menſoris ſit DE. Deinde per problema 6. inueſtigetur longitudo vtriuſque radij DA, DB. [a] Nam ſi fiat in triangulo ABD, [a] 10. Triang. rectil.

Vt ſinus anguli BAD, qui complementum eſt maioris anguli ADC, obſeruati,	*ad radium DB, proximè inuẽtum:*	*Ita ſinus anguli ADB, qui differentia eſt angulorum obſeruationũ ADC, BDC,*	*ad AB, altitudinem,*

inuenta erit altitudo AB, quæſita, in partibus, in quibus cognitus eſt radius DB. [b] Sic etiam, ſi fiat, [b] 10. Triang. rectil.

Vt ſinus anguli ABD, vel (quod idem eſt) anguli DBC, qui complementum eſt minoris anguli obſeruati BDC,	*ad radium DA, proximè inuentum*	*Ita ſinus anguli ABD, differentia angulorum obſeruatorum ADC, BDC,*	*ad AB, altitudinem*

prodibit rurſus altitudo quæſita AB, in partibus radij inuenti DA.

ALITER.

2. PER problema 2. vel 15. inueſtigetur tam altitudo inacceſsibilis AC,

 quam

quam BC, ſecluſa menſoris ſtatura CF. Altitudo namq; BC, ex altitudine A C, detracta notam relinquet altitudinem AB, quæ quæritur.

ALITER.

3. INVENTA diſtantia DC, per ea, quæ in problemate 1. & 2. tradidimus, [a] ſi fiat,

[a] 4. Triang. rectil.

Vt ſinus totus DC,	*ad diſtantiam cognitam DC,*	*Ita A C, Tangens maioris anguli obſeruati ADC,*	*ad A C,*

reperietur altitudo maior A C, in partibus diſtantiæ inuentæ D C. [b] Et ſi rurſus fiat,

[b] 4. Triang. rectil.

Vt ſinus totus DC,	*ad diſtantiam inuentam DC:*	*Ita BC, Tangens minoris anguli obſeruati BDC,*	*ad B C,*

cognita fiet altitudo minor BC, in partibus eiuſdem diſtantiæ inuentæ DC, quæ dempta ex maiore altitudine A C, notam relinquet altitudinem turris B A, quæſitam.

ATQVE hæc ratio commodiſsima eſt, quando in turri aliqua. vel ædificio, cuius diſtantia à menſore cognita ſit, metiendum eſt interuallum perpendiculare inter duas feneſtras.

ALITER.

4. INVENTA rurſum diſtantia DC, per ea, quæ in problemate 1. & 2. ſcripſimus; detrahatur Tangens B C, (poſito ſinu toto D C,) minoris anguli obſeruati A D C, vt nota remaneat AB, differentia dictarum Tangentium. Nam ſi fiat,

Vt ſinus totus DC,	*ad diſtantiam inuentam DC,*	*ita A B, differentia Tangentium AC, BC,*	*ad A B, altitudinem,*

procreabitur altitudo quæſita AB, in partibus diſtantiæ inuentæ D C.

ALITER.

5. INVENTA per problema 2. vel 15. altitudine montis B C, obſeruentur anguli B D C, A D C, per radios D B, D A. Poſito namque ſinu toto D C, ſi fiat,

Vt B C, Tangens minoris anguli obſeruati BDC,	*ad B C, altitudinem inuentam:*	*Ita A B, differentia Tangentium AC, CB, angulorum obſeruatorum ADC, BDC.*	*ad A B*

prodibit rurſus altitudo nota AB, quam quærimus.

SCHOLIVM.

ITAQVE ſi AB, portio ſuperior totius alicuius altitudinis AC, deſideretur, inueſtiganda erit per Problema 2. vel 15. tam tota altitudo AC, quam eius inferior portio BC. Earum enim differentia notam dabit ſuperiorem portionem AB.

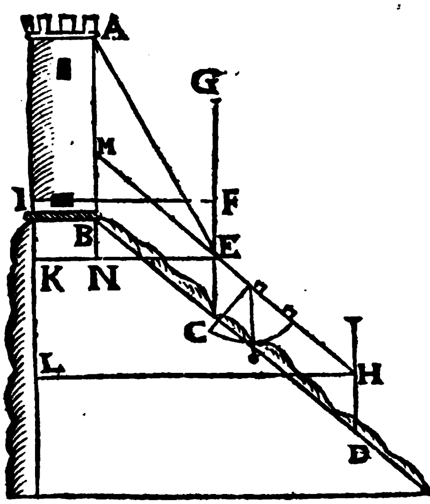
SI autem media aliqua portio I B, cognoſcenda eſt, coniicienda rurſus erit vtraque altitudo IC, BC, vt earum differentia IB, nota reddatur.

SI denique inferior pars B C, proponitur inquirenda, fiet id per Problema 2. vel 15.

DISTAN-

DISTANTIAM accliuem montis à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſitæ, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum efficere cognitam, beneficio Quadrantis.

PROBLEMA XXII.



1. SIT turris AB, monti impoſita, in cuius aſcenſu ſeu latere menſor conſiſtat in C, ex quo loco baſem turris videre non poſsit. *In figura due rectam FA.* Erigatur haſta aliqua CG, ad Horizontem, non autem ad latus montis perpendicularis, ſitque menſoris ſtatura CE. Cogitetur ducta EK, ad altitudinem perpendicularis: Et inſpecto cacumine A, per angulum AEK, fiat alia ſtatio ſuperior in F, ductaque FI, ad altitudinem perpendiculari, inſpiciatur idem cacumen A, per angulum AFI. [a] Et quia angulus AFG, duobus angulis FEA, FAE, eſt æqualis: ſi dematur AEF, complementum maioris anguli AEK, in prima ſtatione obſeruati, reliquus fiet angulus EAF, [b] Igitur ſi fiat,

[a] 32. primi.

[b] 10. triang. rectil.

Vt ſinus anguli EAF, differentia complementorũ angulorũ obſeruationum	*ad EF, differentiam ſtationum:*	*Ita ſinus anguli AFE, conſtati ex recto EFI, & minore angulo AFI, in ſecunda ſtatione obſeruati,*	*ad AE hypotenuſam.*

efficietur nota hypotenuſa AE. Poſt hæc erigatur alius baculus DH, ad Horizontem rectus, ſumptaque menſoris ſtatura DH, ipſi CE, æquali, & ducta recta HL, ad altitudinem perpendiculari, inſpiciatur punctum E, per angulum EHL, & per radium HEM, [c] qui ipſi BCD, lateri montis parallelus erit. Concipienda enim ſunt tria puncta B, C, D, in vna recta iacere, ac ſi DC, producta ad baſem turris perueniret. [d] Quia verò angulus EHL, angulo MEK, æqualis eſt: ſi hic ex maiori angulo obſeruato AEN, in prima ſtatione dematur, reliquus fiet angulus AEM. Eſt autem & angulus EAN, cognitus, quippe cum ſit complementum maioris anguli obſeruati AEN. Igitur & AME, reliquus duorum rectorum cognitus erit: qui quidem etiam relinquitur, ſi complementum anguli MHL, in ſtatione D, obſeruati ex duobus rectis detrahatur. [e] Igitur ſi fiat,

[c] 33. primi.

[d] 29. primi.

[e] 10. triang. rectil.

Vt ſinus anguli AME, qui relinquitur, ſi complementum poſtremi anguli obſeruati MHL, ex duobus rectis dematur	*ad hypotenuſam AE, nuper inuẽtam:*	*Ita ſinus anguli EAN, complemẽti maioris anguli obſeruati AEN*	*ad ME,*

inuen-

a 10. Triang. rectil.

inuenta erit recta EM, hoc eſt, diſtantia quæſita CB. a Et rurſum ſi fiat:

Vt ſinus eiuſdem anguli AME,	*ad eandem hypotenuſam AE, nuper inuentam:*	*Ita ſinus anguli AEM, qui relinquitur, ſi angulus poſtremo loco obſeruatus MHL, vel MEK, ex angulo maiori obſeruato AEK, detrahatur,*	*ad AM*

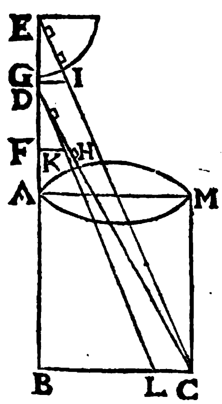
producetur AM, cui ſi addatur menſoris ſtatura MB, tota altitudo AB, cognita erit.

DANDA autem erit opera diligenter, vt tria puncta B, C, D, in vna recta iaceant, hoc eſt, vt recta ab vltima ſtatione D, per primam C, ducta per baſem B, tranſeat, quod plus minus iudicio ſenſuum aſſequemur. Nam per ea, quæ dicta ſunt hoc loco, ſolum reperitur diſtantia à loco C, vſque ad punctum altitudinis, in quod recta DC, protracta incidit, & altitudo ab A, vſque ad idem punctum, quod non multum à puncto B, diſtabit, ſi diligentia adhibeatur in ſtationibus C, D, captandis. Propter hanc cauſam in propoſitione diximus (prope verum efficere cognitam) quia neque diſtantia CB, neque altitudo AB, præciſè cognoſcitur, niſi quando tria puncta B, C, D, in recta linea iacent.

2. VT ſine numerorum auxilio problema efficias, recurrendum erit ad ſuperiora.

PROFVNDITATEM putei, vel ædificii cuiuſcunque ad perpendiculum erecti, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per Quadrantem reperire.

PROBLEMA XXIII.



1. HOC nihil eſt aliud, niſi turrim ex eius vertice, quando in Horizonte ſignum aliquod apparet, per duas ſtationes in haſta aliqua factas metiri, vt problemate 4. factum eſt. Operationem ergo eius problematis hic repetemus. Sit puteus, ſeu ædificium erectum ABCM, cuius angulus C, in fundo, vel ſignum C, in fundo poſitum conſpici poſsit. Erecta haſta AE, in orificio putei, vel ſummitate ædificij, fiant duæ ſtationes oculi menſoris in D, E, inſpiciaturque punctum C, per radios DC, EC, facientes angulos BDC, BEC: Sumptis deinde DF, EG, æqualibus pro ſinubus totis, ducantur ad EB, perpendiculares FH, GI, pro Tangentibus angulorũ BDC, BEC, obſeruatorum. Ducta quoque DL, ipſi EC, parallela ſecãte FH, in K, vt KH, differentia ſit Tangentium, quemadmodum problemate 4. demonſtrauimus. Si igitur, vt ibi, fiat hic.

Vt KH, differentia inter Tangentes angulorum obſeruatorum	*ad FK, vel ad GI, Tangentẽ minorem:*	*ita DE, differentia ſtationum, hoc eſt, ſpatium inter oculos, vel angulos obſeruationum,*	*ad DB,*

prodi-

prodibit recta D B, nota, vt problemate 4. oſtendimus: ex qua ſi ſubtrahatur ſegmentum haſtæ A D. inter orificium, & oculum in prima ſtatione, reliqua fiet profunditas, ſiue altitudo putei, vel ædificij A B.

ALITER.

2. Posito ſinu toto B C, fiat.

Vt D E, differentia Tangentium B D, B E, quæ complementis angulorum obſeruationum debentur,	*ad D B, Tangentem minorem*	*ita D E, differentia ſtationũ oculorum*	*ad D B,*

Nam numerus procreatus notam exhibebit eandem rectam D B, &c.

ALITER.

3. Si per ſolos ſinus operari lubeat, ita agendum erit. [a] Quoniam angulus maior obſeruatus B D C, duobus angulis E, DCE, æqualis eſt; ſi angulus E, minor obſeruatus tollatur ex maiore BDC, notus remanebit angulus DCE, differentia angulorum obſeruatorum. a *32. primi.*

[b] Igitur ſi fiat, b 10. triang. rectil.

Vt ſinus anguli D C E, differentia angulorum obſeruatorum.	*ad D E, differentiam ſtationũ oculorum:*	*ita ſinus anguli E, minoris obſeruati*	*ad D C,*

proſiliet nota hypotenuſa D C. [c] Quapropter ſi rurſum fiat, c 10. triang. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam D C, proximè inuentam:*	*ita ſinus anguli B C D, complementi maioris anguli obſeruati*	*ad D B,*

euadet iterum cognita recta D B, &c.

4. Iam verò ſi latitudo orificij AM, vel fundi BC, cognita fuerit, (Non erit autem difficile eam aliqua menſura nota metiri) facilius in cognitionem altitudinis, profunditatiſue A B, veniemus, per vnicam videlicet ſtationem in D, factam, hoc modo. Fiat,

Vt ſinus totus C B,	*ad B D, Tangentem anguli B C D, complementi anguli obſeruationis:*	*ita latitudo cognita C B,*	*ad D B.*

Numerus enim procreatus offeret DB, notam, vt ſupra, &c.

Vel per ſolos ſinus, [d] ſi fiat, d 10. triang. rectil.

Vt ſinus anguli B D C, obſeruationis	*ad latitudinem cognitam B C:*	*ita ſinus anguli B C D, complemẽti anguli obſeruationis.*	*ad D B,*

inuenietur rurſus D B, &c.

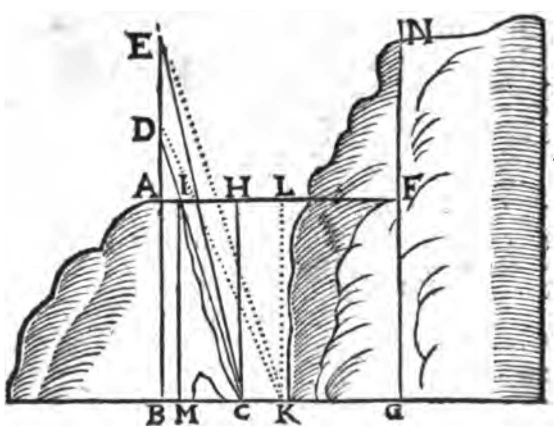
5. Vt idem aſſequaris ſine auxilio numerorum, conſule ea, quę problemate 4. num. 4. ſcripſimus.

PROFVNDITATEM vallis, eiuſdemque deſcenſum obliquum, ſi non ſit valdè inæqualis, eiuſque terminus, vel aliquod in ea ſignum conſpici poſſit, per Quadrantem ſcrutari.

PROBLEMA XXIV.

1. Hoc etiam nihil aliud eſt, niſi altitudinem quampiam ex eius ſummo faſtigio per duas ſtationes dimetiri, vt problemate 4. oſtenſum eſt. Sit enim vallis inter duos montes AB, FG, poſita, & terminus ipſius C, ex monte AB, poſſit conſpici. Erecta haſta aliqua AE, fiant in D, & E, duæ ſtationes, obſeruenturque anguli D, & E, inſpecto termino C, per radios DC, EC. Intelligatur autem recta EA, vſque ad baſem montis extenſa in B: & recta excurrens AF, ipſi BG, parallela, vel ad EB, perpendicularis: & denique CH ipſi AB, parallela, a quæ altitudini AB, ęqualis erit, ita vt AB, vel HC, ſit profunditas vallis ab A, vſque ad baſem montis, & IC, eius deſcenſus obliquus. Liquidò au-

a 34. primi.



tem conſtat, profunditatem AB, vel CH, exquiri poſſe, vt problemate 4. altitudo turris AB, ex duabus ſtationibus in haſta AE, factis, vel in duabus feneſtris, vel certè, vt in præcedenti problemate profunditas putei AB, inuenta fuit.

Descensvs autem obliquus IC, ita notus euadet. Quoniam, vt in antecedente problemate monſtratum eſt, angulus DCE, differentia eſt angulorum BDC, BEC, obſeruatorum: b ſi fiat,

b 10. Triang. rectil.

Vt ſinus anguli DCE, differentia inter angulos obſeruatos	*ad DE, differentiam ſtationum oculorum:*	*ita ſinus anguli E, minoris obſeruati*	*ad DC,*

cognita fiet recta DC, ex qua ſi detrahatur DI, (quam facilè ab oculo vſque ad rectam

rectam AI, menſurare poteris, cum ſit exigua) notus remanebit deſcenſus obliquus IC.

2. QVOD ſi terminus C, in fundo cerni nequeat, inſpiciendum erit ex D, & E, aliquod aliud ſignum K, in valle, & obſeruandi anguli BDK, BEK, per radios DK, EK. Ex his enim rurſus profunditas AB, vel KL, deprehendetur, vt in problemate 4. docuimus.

QVIN etiam, ſi in plano vallis commodè duæ ſtationes fieri poſsint: cognoſci ex illis poterit altitudo montis AB, vel IM, per ea, quę in problem. 2. ſcripſimus: deſcenſus vero obliquus IC, hoc eſt, interuallum inter I, & C, ex iis, quæ in problemate 7. tradita ſunt.

3. EANDEM denique profunditatem CH, perſcrutari licebit ex altiore monte NG, dummodo infimus terminus C, minoris montis ex cacumine N, appareat, vel aliquod aliud ſignum in valle; non aliter, quam in problemate 18. vel 19. altitudinem minorem ex maiori incognita indagare docuimus. Nam hic maior altitudo eſt NG, & minor CH, cuius terminum C, ex N, cerni poſſe ſtatuimus.

4. ABSQVE numerorum multiplicatione, ac diuiſione res peragetur, vt in antecedentibus dictum eſt.

FINIS LIBRI SECVNDI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ
LIBER TERTIVS.

Earundem linearum rectarum dimenſionem per Quadratum Geometricum exequens.

QVONIAM dimenſio rectarum linearum per Quadrantem Aſtronomicum ſuperiori lib. expoſita requirit tabulas Sinuum, Tangentium, & ſecantium, non ſemper autem eiuſmodi tabulas ad manum habere poſſumus, immo neque omnes in illis verſati ſunt, atque exercitati: propoſitum nobis tertio hoc libro eſt, lineas rectas, longitudines videlicet, latitudines, altitudines, & profunditates dimeriri per Quadratum Geometricum, vbi prædictis tabulis non indigemus, ſed omnia per vmbram rectam, & verſam; vt vocant, expediuntur. Qua tamen in re non nihil ab aliis ſcriptoribus diſſidebimus, quippe cum aliter tam vmbram rectam, quam verſam in partes diuiſuri ſimus, quam ab illis fieri ſolet: vt nimirum per noſtram partitionem expeditius dimenſiones perficiantur; quod prudens Lector facilè iudicabit, ſi noſtrã hanc diuiſionis rationem cum aliorum partitione contulerit. Sed principio Quadratum Geometricum conſtruendum eſt, explicandumque quo pacto tam in Quadrato ſtabili, quam in pendulo vtraque vmbra, recta videlicet, ac verſa conſiderari debeat. Neque enim ſemper eundem ſitum prædictæ vmbræ in inſtrumento ſeruant, ſed pro varietate vſuum non raro eum permutare ſolent, vt ex iis, quæ ſequuntur, liquido conſtabit.

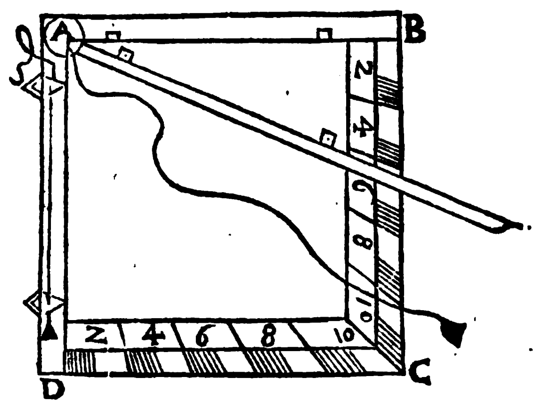
QVADRATI GEOMETRICI CONSTRVCTIO.

Compoſitio Quadrati Geometrici.

1. Ex quauis materia ſolida & dura conficiatur quadratum ABCD, ſiue ſolidum totum, ſiue excauatum: vel potius ex quatuor regulis æqualibus AB, BC, CD, DA, ita compactum, vt omnes in vno eodemque plano exiſtant. Deinde

indè in duab. regulis BC, CD, ducantur tres parallelæ extremitatibus quadrati, pro partibus & numeris vtriuſque vmbræ deſignandis, vt in figura apparet. Latus BC, vmbræ rectæ, & CD, vmbræ verſæ deſtinatur à Geometris: Vtrumque

Vmbra recta, & verſa in quadrato quæ, & in quot partes à Geometris vtraque ſecetur.



autem in 12. partes æquales partiri ſolent omnes, qui de vſu Quadrati Geometrici ſcripſerunt: Et ſi capacitas inſtrumenti permittit, ſingulas partes in 60. ſubdiuidunt, vt tota vmbra partes 720. complectatur, vel in 100. vt partes 1200. in vtraque vmbra exiſtant. Ego vtramque vmbram in 10. partes duntaxat æquales diuido, niſi inſtrumentum ſit tantæ magnitudinis, vt commode vtraque recta BC, CD, in 100, aut 1000. partes ſecari poſsit, ſubdiuiſis videlicet ſingulis decimis partibus in 10. vel 100. particulas. Figura porro ex vtraque vmbra cõſtans dici ſolet à Geometris Scala altimetra.

In quot partes vtraque vmbra in noſtro quadrato diuidatur.

Scala altimetra quid.

2. Antepono autem diuiſioni conſuetæ in 12. vel 720. vel 1200. partes diuiſionem noſtram in partes 10. vel 100. vel 1000. æquales, propterea quòd, ſi inſtrumentum propter paruitatem ſectum ſit tantummodo in 10. partes, facili admodum negotio cognoſcere poſſumus, quot centeſimæ, vel etiam milleſimæ partes in qualibet particula cuiuſcunque partis decimæ rectarum BC, CD, aſsignata comprehendantur: non ſecus ac ſi vtraque recta in 100. vel 1000. partes ſecta foret, vt Num. 14. cap. 2. lib. 1. copioſè expoſuimus. Huc accedit, quod in dimetiendis lineis per Quadratum Geometricum fieri ſemper debeat multiplicatio, aut diuiſio per omnes partes lateris BC, vel CD: Manifeſtum autem eſt, faciliorem eſſe multiplicationẽ, diuiſionemue per 10. aut 100. vel 1000. quàm per 12. aut 720. vel 1200. cum illa fiat per ſolam appoſitionem, vel detractionem 0. vel 00. vel 000. vt in noſtra Arithmetica practica declarauimus.

Quare noſtra diuiſio vmbra præferatur aliorum diuiſioni.

Invenio quidem latus quadrati à doctiſsimo Io. Antonio Magino diuiſum quoque eſſe, & quidem optimo conſilio, in 100. partes æquales; quamuis ab eo regula non tradatur, qua cognoſcendũ ſit, quot partes milleſimæ in quauis particula vnius centeſimæ comprehendantur, quod tamen omnino neceſſarium eſt, vt dimenſiones, ac ſtellarum altitudines exquiſitè obſeruentur: præſertim ſi propter inſtrumenti paruitatem latus in 10. partes duntaxat commode poſsit diuidi. Id quod per noſtram doctrinam, vt diximus, ſine magno labore effici poteſt.

Quadratum pendulum, ac ſtabile.

3. Post hæc è centro A, procedat filum cum perpendiculo, aut certe regula tenuis, cum linea fiduciæ, quæ pendens libere moueatur, vt lib. 1. capit. 2. Num 6. tradidimus: & in latere A B, duo pinnacidia affigantur, de quibus lib. 1. cap. 2. Num. 5. dictum eſt, ſi quadratum in ſuo vſu debeat eſſe pendulum. Nam ſi illud ſtabile eſſe velis, affigenda eſt circa centrum A, dioptra, hoc eſt, regula cum linea fiduciæ, ac duobus pinnacidijs, eodem artificio conſtructis, vt libere poſsit circumduci, & in omni ſitu firmari, vt loco ſupra citato in Quadrante ſtabili faciendum eſſe præcepimus.

Postremo iuxta latus A D, in plano quadrati (Nam ſi hoc fieret extra, prope craſsitiem inſtrumenti, non poſſet quadratum in plano Horizontis locari erectum ſupra latus A D. quod tamen vt fiat, non raro vſus quadrati poſtulat:) apponàtur duæ tabellæ perforàtæ cum filo, & perpendiculo, vt eius beneficio dignoſcere poſsis, num inſtrumentum rectum ſit ad Horizontem, nec ne. quod omnino neceſſarium eſt.

Vmbra recta, & verſa, quo pacto in vtroque quadrato cognoſcenda ſit.

4. Sed doceamus, quem ſitum vtraq; vmbra in vſu quadrati habeat. Res enim hæc non parui momenti eſt, vt in dimenſionibus nulla confuſio inter vmbras oriatur. In quadrato ergo pendulo vmbra verſa opponitur ſemper lateri pinnacidiorum: recta autem cum eodem latere concurrit in puncto à centro A, remotiori, vt in figura latus vmbræ rectæ eſt B C, verſæ autem C D. At in quadrato ſtabili, ſi metienda ſit altitudo, & centrum A, inferiorem obtineat locum, in eoque oculus ponatur, latus vmbræ rectæ ſupremam occupabit ſedem; latus vero vmbræ verſæ vergere debebit verſus ipſam altitudinem: ita vt tunc baſis inſtrumenti ſit A D. quo pacto iterum vmbra recta eſt B C, & verſa C D. Si autem centrum A, ſuperiorem locum poſsideat, & oculus in extremitate dioptræ exiſtat, (quod etiam fieri poteſt) latus vmbræ rectæ erit baſis C D, & latus vmbræ verſæ B C, prope oculum, & ab altitudine metienda remotius. Si autem longitudo metienda proponatur, centrumque A, in ſuperiori loco ſitum ſit, & in eo oculus collocetur, erit quoque baſis C D, latus vmbræ rectæ: latus autem B C, vmbræ verſæ deputabitur, quod quidem verſus longitudinem metiendam vergere debebit, & longius ab oculo abeſſe. At vero ſi centrum A, ponatur in loco inferiori, ita vt baſis ſit A D, oculus autem in extremitate dioptræ conſiſtat, (quod etiam fieri poteſt, præſertim ſi quadratum in ſublimi fuerit poſitum, vt in monte, vel turri aliqua) latus vmbræ rectæ erit B C, baſi A D, oppoſitum, vmbræ vero verſæ latus erit C D, quod ſcilicet longius à longitudine metienda recedit. In vtroque porro quadrato centrum A, per diametrum opponitur puncto, in quo vmbra recta cum verſa concurrit: & in ſtabili vmbra recta perpetuo vel ſupremum locum occupat, quando videlicet centrum A, infimam ſedem tenet; (vel infimum locum, quando ſcilicet centrum A, in ſuperiori loco exiſtit, vt ex dictis liquet. Hæc non negligenter conſideranda ſunt, ne in vario inſtrumenti vſu vmbram rectam pro verſa accipias, aut contra; quandoquidem pro diuerſo ſitu quadrati ſtabilis tam latus B C, quam C D, modo vmbræ rectæ, modo verſæ munus obire poteſt, vt diximus.

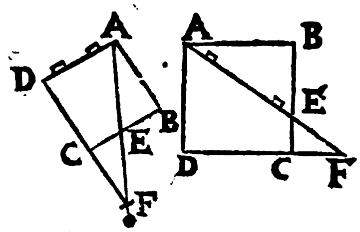
5. Quamvis autem vel ſola vmbra recta, vel verſa ſatis ſit ad altitudines, longitudines, profunditateſque perueſtigandas, vt ex ſequentibus fiet manifeſtum: vtraque tamen aſſumitur à Geometris, eo quod interdum vmbra recta excedit latus B C, nimirum quando filum perpendiculi, aut linea fiduciæ ſecat

latus

latus CD: Tunc enim neceſſario latus BC, produci debet, vt ſecari poſsit. Item ſæpe numero vmbra verſa ſuperat latus CD, quando videlicet filum perpendiculi, aut linea fiduciæ interſecat latus BC: Tunc enim neceſſario latus DC, productum verſus C, ſecabitur, vt perſpicuum eſt. Ne ergo cogamur vel latus BC, vel CD, producere, aſſumenda eſt vmbra quidem verſa, quando recta latus BC, excedit: recta autem, quando verſa ſuo latere CD, maior eſt.

Gnomon medio loco proportionalis eſt inter vmbrã rectam, & verſam.

6. Est autem perpetuo latus quadrati, quod Gnomonem appellant, medio loco proportionale inter vmbrã rectam ac verſam. Secet namque in quadrato pendulo filum perpendiculi, vel in ſtabili linea fiduciæ, latus vmbræ BC, in E, & latus vmbræ DC, productũ in F. Erunt igitur triangula ABE, ADF, æquiangula, cum anguli B, D. recti ſint,[a] & tam alterni BAE, DFA, quam BEA, DAF, æquales.[b] Quamobrem erit vt BE, vmbra abſciſſa ad gnomonem BA, ita gnomon AD, ad vmbram abſciſſam DF: hoc eſt gnomon BA, vel AD, medio loco eſt proportionalis inter duas vmbras BE, DF, quarum vna recta eſt, & altera verſa.



[a] 29. primi.
[b] 4. ſexti.

Reductio vmbra rectæ ad verſam, & contra.

7. Hinc facilis eſt reductio vnius vmbræ ad aliam, quod non raro vſu venit. Nam ſi gnomon complectens partes 1000. (in tot namq; partes latus quadrati diuiſum concipere lubet) in ſe multiplicetur, & productus numerus quadratus 1000000. lateris AB, per alterutram vmbram diuidatur, indicabit Quotiens partes alterius vmbræ: hoc eſt, ſi fiat,

Vt alterutra vmbra ad gnomonem ita gnomon ad alteram vmbram:

hoc eſt, ſi quadratus numerus lateris quadrati, vel gnomonis, videlicet 1000000. per alterutram vmbram diuidatur. Verbi gratia ſi ponatur BE, vmbra recta partium 700. diuidaturque numerus quadratus 1000000. lateris AB, per 700. producetur vmbra verſa DF, partium 1428 $\frac{4}{7}$. Sic etiam, ſi BE, ſtatuatur vmbra verſa partium 700. reperietur vmbra recta DF, partium 1428 $\frac{4}{7}$. Quod ſi vna vmbra ſit 400. erit altera 2500. & ſic de cæteris. Sed iam ad vſum vtriuſque quadrati accedamus.

ALTITVDINEM Solis, vel ſtellæ cuiuſuis per quadratum Geometricum obſeruare.

PROBLEMA I.

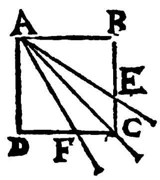
Altitudo Solis, vel ſtellæ, quo pacto per quadratum cognoſcatur.

1. Præparetvr baſis plana Horizonti æquidiſtans, vt ſupra illam Quadratum ſtabile erectum, ſit ad Horizontem perpendiculare. Eleuetur deinde pendulum quadratum, cen[illegible] A, ad Solem, vel ſtellam verſo, ita vt eius planum per centrum Solis, aut ſtellæ tranſeat, donec radius Solis per duo foramina pinnacidiorum tranſire deprehendatur: vel radius viſualis per eadem

foramina

foramina pinnacidiorum ſtellam videat. Idemque fiat cum quadrato ſtabili, collocando nimirum eius latus AD, vel CD, ſupra baſem præparatam, ipſumq; circumducendo, ita vt eius planum per centrum Solis aut ſtellæ incedat; ac denique eleuando dioptram, donec radius Solis per foramina pinnacidiorũ tranſeat, vel radius viſualis per eadem foramina ſtellam conſpiciat. Quo peracto, conſideretur ſumma diligentia angulus, quem filum perpendiculi, vel linea fiduciæ in dioptra cum proximo latere quadrati conſtituit, inueſtigando magna cum cura, & diligentia per ea, quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. tradidimus, quot partes milleſimæ ex vmbra ſiue recta, ſiue verſa abſciſſæ ſint à filo perpendiculi, vel linea fiduciæ. Ille enim angulus, ſi quidem vmbra recta interſecetur, (quæ in quadrato ſtabili vel ſupremum locum, vel infimum occupat: In pendulo vero cum latere pinnacidiorum coniungitur, vt ſupra diximus) dabit, vt Num. 2. demonſtrabimus, complementum altitudinis Solis aut ſtellæ: Si vero vmbram verſam filum, aut dioptra interſecet, ipſemet angulus altitudinem exhibebit. Quantitatem porro huius anguli ita cognoſcemus.

Quando angulus, quem filum cum proximo quadrati latere facit, offerat altitudinem ſolis; & quando complementum altitudinis.



Sit quadratum ſiue pendulum ſiue ſtabile (eadem enim eſt in vtroque ratio) A B C D, abſciſſaque ſit vmbra recta B E, quæ in partibus milleſimis lateris B C, reperietur, vt cap. 2. Num. 14. lib. 1. docuimus, etiamſi latus ipſum ſit ſolum in 10. vel 100. partes diuiſum: quæ quidem vmbra B E, ſtatuatur verbi gratia, eſſe partium 850. Quia ergo duo latera AB, BE, trianguli rectanguli ABE, nota ſunt, cum AB, ſit 1000. & BE, 850. [a] ſi fiat,

[a] 8. triang. rectil.

Vt latus quadrati A B, 1000.	*ad ſinum totum 100000.*	*Ita latus, vel vmbra BE, 850.*	*ad Tangentem anguli BAE,*

(quod quidem factum erit, ſi ad latus B E, hoc eſt, ad 850. duæ cifræ apponantur) reperietur Tangens anguli B A E, 85000. quæ in tabula Tangentium non reperitur; ſed proxime minor eſt 84956. cui reſpondent gradus 40. min. 21. Et quia differentia inter Tangentem inuentam 85000. & 84956. in tabula ſumptam, eſt 44. Differentia autẽ inter duas Tangentes proximas 84956. & 85006. eſt 50. cui debetur 1. minutum, ſiue Sec. 60. propterea quòd poſteriori Tãgenti 85006. reſpondet vnum minutum amplius, quàm Tangenti priori 84956. reperiemus per regulam trium, quot ſecunda differentiæ 44. congruant; ſi dicamus. Si differentia 50. poſcit, ſec. 60. quot ſecunda poſcit differentia 44? inueniemuſque ſec. 52 $\frac{4}{5}$. hoc eſt, ſec. 53. fere. Angulus ergo BAE, continent grad. 40. Min. 21. ſec. 53. paulo minus. Complementum igitur, nimirum grad. 49. Min. 38. ſec. 7. fere, oſtendet altitudinem Solis, vel ſtellæ. Et ſi vmbra D F, eſt verſa partium quoque 850. erit ipſemet angulus DAF, inuentus grad. 40. Min. 21. ſec. 53. altitudo Solis, vel ſtellæ. Atque hoc modo ſi diligenter partes vmbræ explorabimus reſpectu lateris BC, vel CD, 1000. quemadmodum lib. 1. cap. 2. Numer. 14. traditum eſt, inuenietur ſemper altitudo Solis, aut ſtellæ in grad. Min. & ſec. Sed quia moleſtũ eſt, ac laborioſum, per differentiãs Tangentium Secunda inquirere, ſatis erit Tangentem anguli inuentam in tabula quærere, & ſi quidem reperta fuerit, accipere gradus, & minuta reſpondentia; ſi vero non fuerit inuenta, ſumere Tangentem, vel minorem, vel maiorem quæ nimirum minus ab inuenta differat, &c. Hac ratione ſumenda erit in noſtro exemplo Tangens 85006. cui reſpondent grad. 40. Min. 22. complementum autem erit grad.

49, Min.

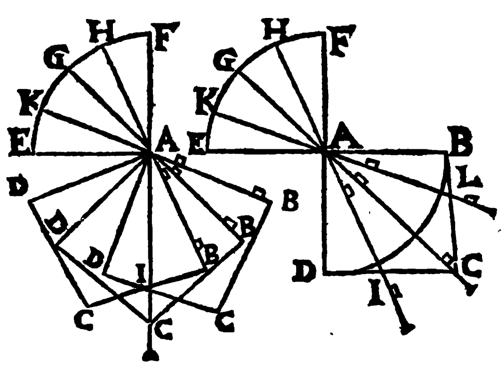
49. Min38. veluti prius. ſolum deſunt ſec.7. quæ nullius ſunt momenti. Vt autem ſtudioſos moleſtia hac ſupputandi liberem, conſtruxi ſequentem tabulam pro ſingulis partibus milleſimis vtriuſque vmbræ: In qua ſi centenæ in vertice, & reliquæ vnitates in latere ſumantur, illico in angulo communi reperientur gradus, ac Min. pro angulo quæſito: qui videlicet altitudinem Solis aut ſtellæ indicabit, ſi partes milleſimæ ad vmbram verſam ſpectent: ſi autem partes ad vmbram rectam pertinent Complementum eius anguli altitudinem Solis ſtellæue oſtendet, vt paulo infra demonſtrabimus. Componetur autẽ tabula hęc, ſi ſingulis partibus milleſimis vmbræ apponantur ad dextram quinque cifræ, & ex toto illo numero abijciantur tres cifræ: quod idem eſt, ac ſi apponantur tãtum duæ cifræ, vt Tangentes angulorum habeantur, Ita factum eſſe vides ſupra: Nam ad partes vmbræ 850. adiectæ ſunt duæ cifræ, vt Tangens fieret 85000. Hac enim ratione fit multiplicatio vmbræ abſciſſæ per ſinum totum 100000. & diuiſio per 1000. vt in *Arithmetica* noſtra practica ſcripſimus. Quod ſi quatuor cifræ partibus milleſimis apponantur, habentur eadem ratione Tangẽtes, poſito ſinu toto 10000000.

Vſus tabulæ gnomonicæ ſequentis.

Compoſitio tabulæ gnomonicæ facillima.

2. VERVM demonſtremus prius, angulum, quem filum perpendiculi, vel linea fiduciæ ſecans vmbram rectam cum proximo latere facit, in vtroque Quadrato eſſe complementum altitudinis Solis, ſeu ſtellæ; illum vero, quem filum aut fiduciæ linea vmbram verſam ſecans efficit, exhibere ipſam altitudinem. Sit ergo primum quadratum pendulum ABCD, & Quadrans circuli Verticalis per ſtellam ducti AEF, ita vt AE, Horizonti æquidiſtet: ſintq; tres altitudines ſtellæ, EG, grad.45. EH, maior, & EK, minor. Quando ergo latus pinnacidiorum AB, cum radio GA, coincidit, erit angulus altitudinis ſemirectus GAE, [a] qui æqualis eſt ſuo complemento FAG, propter æquales arcus EG, FG, [b] hoc eſt, an-

[a] *27. tertij.*
[b] *15. primi.*



Filum perpendiculi ſecans vmbram rectam facit angulum cõplementi altitudinis; ſecans vero vmbram verſam angulum conſtituit ipſius altitudinis.

gulo quem filum cum latere AB, facit. Cum ergo diameter quadrati [c] ſecet angulos eius rectos bifariam, in ſemirectos nimirum, tranſibit filum per angulum C: Ac proinde tam CAB, quam CAD, æqualis tunc erit angulo altitudinis EAG. Quando autem pinnacidiorum latus cum radio HA, coincidit, erit angulus altitudinis EAH, ſemir[illegible]o maior, & angulus complementi FAH, ſemirecto minor, [d] cui æqualis eſt angulus IAB: Ac propterea filum vmbram rectam interſecabit,

[c] *ſchol. 34. primi.*
[d] *15. primi.*

terſecabit, facietque angulum complementi altitudinis IAB, ſemirecto minorẽ. Quando denique latus AB, idem efficitur cum radio KA, erit angulus altitudinis EAK, ſemirecto minor, & angulus complementi FAK, ſemirecto maior,[a] cui æqualis eſt angulus IAB: ac proinde filum vmbram verſam abrumpet, conſtituetque angulum altitudinis IAD, ſemirecto minorem. Idem prorſus cernitur in quadrato ſtabili ABCD, in quo vmbræ rectæ latus eſt infimum CD, cum centrum A, ſupremum occupet locum, vt ſuprà in conſtructione Quadrati Num. 4. dictum eſt. Vbi rurſus perſpicitur, quando altitudo EG, eſt grad. 45. radium GA, cadere in angulum oppoſitum C, ac proinde tam angulum CAB, quam CAD, æqualem eſſe angulo altitudinis, nimirum ſemirectum. Quando autem altitudo EH, maior eſt, quam grad. 45. angulum IAD, quem linea fiduciæ AI, vmbram rectam auferens DI, cum latere AD, facit,[b] æqualem eſſe angulo FAH, qui complementum eſt anguli altitudinis EAH. Quando denique altitudo EK, minor eſt, quam grad. 45. angulum IAB, quem linea fiduciæ AI, vmbram verſam BI, aſcindens cum latere AB, conſtituit,[c] æqualem eſſe angulo ipſi altitudinis EAK: quæ omnia demonſtranda erant. Sed ecce tibi tabulam, de qua dixi. cõtinentem gradus, ac minuta angulorum, quos filum perpendiculi, vel linea fiduciæ in omnibus partibus milleſimis vtriuſq; vmbræ cum proximo latere quadrati efficit. In qua vides, angulum ſub parte 800. in vertice ſumpta, & è regione partis 50. continere gradus 40. Min. 22. fere, vt ſupra diximus: ac tantus erit angulus altitudinis, ſi partes 850. ſpectent ad vmbram verſam: eius verò complementum grad. 49. Min. 38. fere altitudinem exhibebit, ſi dictæ partes ex vmbra recta abſciſſæ fuerint. Tabula porro hæc dici poteſt Gnomonica, quod in quadrato ſtabili dicti anguli in tabula comprehenſi efficiantur à gnomone AD, vel AB, cum linea fiduciæ, vt patet.

[a] *15. primi.*

[b] *15. primi.*

[c] *15. primi.*

Tabula Gnomonica cur ſic dicatur.

SEQVITVR TABVLA Gnomonica.

Tabula

Tabula Gnomonica.

	0		100		200		300		400		500		600		700	
	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M
0	0	0	5	43	11	19	16	42	21	48	26	34	30	58	35	0
1	0	3	5	46	11	22	16	45	21	51	26	37	31	0	35	2
2	0	7	5	49	11	25	16	48	21	54	26	39	31	3	35	4
3	0	10	5	53	11	29	16	51	21	57	26	42	31	5	35	6
4	0	14	5	56	11	32	16	55	22	0	26	45	31	8	35	9
5	0	17	6	0	11	35	16	58	22	3	26	48	31	10	35	11
6	0	21	6	3	11	38	17	1	22	6	26	50	31	13	35	13
7	0	24	6	6	11	42	17	4	22	9	26	53	31	15	35	16
8	0	28	6	10	11	45	17	7	22	12	26	56	31	18	35	18
9	0	31	6	13	11	48	17	10	22	15	26	59	31	20	35	20
10	0	34	6	17	11	52	17	13	22	18	27	1	31	23	35	22
11	0	38	6	20	11	55	17	17	22	21	27	4	31	26	53	25
12	0	41	6	23	11	58	17	20	22	24	27	7	31	29	35	27
13	0	45	6	27	12	1	17	23	22	26	27	9	31	31	35	29
14	0	48	6	30	12	5	17	26	22	29	27	12	31	34	35	32
15	0	52	6	34	12	8	17	29	22	32	27	15	31	36	35	34
16	0	55	6	37	12	11	17	32	22	35	27	18	31	38	35	36
17	0	58	6	40	12	15	17	35	22	38	27	20	31	40	35	38
18	1	2	6	44	12	18	17	38	22	41	27	23	31	43	35	41
19	1	5	6	47	12	21	17	42	22	44	27	26	31	45	35	43
20	1	9	6	51	12	24	17	45	22	47	27	28	31	48	35	45
21	1	12	6	54	12	28	17	48	22	50	27	31	31	50	35	48
22	1	16	6	57	12	31	17	51	22	53	27	34	31	53	35	50
23	1	19	7	1	12	34	17	54	22	56	27	37	31	55	35	52
24	1	22	7	4	12	38	17	57	22	59	27	39	31	58	35	54
25	1	26	7	8	12	41	18	0	23	2	27	42	32	0	35	57
26	1	29	7	11	12	44	18	3	23	4	27	45	32	3	35	59
27	1	33	7	14	12	47	18	6	23	7	27	47	32	5	36	1
28	1	36	7	18	12	51	18	10	23	10	27	50	32	8	36	3
29	1	40	7	21	12	54	18	13	23	13	27	53	32	10	36	6
30	1	43	7	24	12	57	18	16	23	16	27	55	32	13	36	8
31	1	47	7	28	13	0	18	19	23	19	27	58	32	15	36	10
32	1	50	7	31	13	4	18	22	23	22	28	1	32	18	36	12
33	1	53	7	35	13	7	18	25	23	25	28	3	32	20	36	14

Tabula Gnomonica.

	0		100		200		300		400		500		600		700	
	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M
34	1	57	7	38	13	10	18	28	23	28	28	6	32	22	36	17
35	2	0	7	41	13	13	18	31	23	31	28	9	32	25	36	19
36	2	4	7	45	13	17	18	34	23	33	28	11	32	27	36	21
37	2	7	7	48	13	20	18	37	23	36	28	14	32	30	36	23
38	2	11	7	51	13	23	18	41	23	39	28	17	32	32	36	26
39	2	14	7	55	13	27	18	44	23	42	28	19	32	35	36	28
40	2	17	7	58	13	30	18	47	23	45	28	22	32	37	36	30
41	2	21	8	2	13	33	18	50	23	48	28	25	32	40	36	32
42	2	24	8	5	13	36	18	53	23	51	28	27	32	42	36	35
43	2	28	8	8	13	40	18	56	23	54	28	30	32	44	36	37
44	2	31	8	12	13	43	18	59	23	56	28	33	32	47	36	39
45	2	35	8	15	13	46	19	2	23	59	28	35	32	49	36	41
46	2	38	8	18	13	49	19	5	24	2	28	38	32	52	36	43
47	2	41	8	22	13	52	19	8	24	5	28	41	32	54	36	46
48	2	45	8	25	13	56	19	11	24	8	28	43	32	57	36	48
49	2	48	8	28	13	59	19	14	24	11	28	46	32	59	36	50
50	2	52	8	32	14	2	19	17	24	14	28	49	33	1	36	52
51	2	55	8	35	14	5	19	20	24	17	28	51	33	4	36	54
52	2	59	8	39	14	9	19	24	24	19	28	54	33	6	36	57
53	3	2	8	42	14	12	19	27	24	22	28	57	33	9	36	59
54	3	5	8	45	14	15	19	30	24	25	28	59	33	11	37	1
55	3	9	8	49	14	18	19	33	24	28	29	2	33	13	37	3
56	3	12	8	52	14	22	19	36	24	31	29	4	33	16	37	5
57	3	16	8	55	14	25	19	39	24	34	29	7	33	18	37	8
58	3	19	8	59	14	28	19	42	24	36	29	10	33	21	37	10
59	3	23	9	2	14	31	19	45	24	39	29	12	33	23	37	12
60	3	26	9	5	14	34	19	48	24	42	29	15	33	25	37	14
61	3	29	9	9	14	38	19	51	24	45	29	18	33	28	37	16
62	3	33	9	12	14	41	19	54	24	48	29	20	33	30	37	18
63	3	36	9	15	14	44	19	57	24	51	29	23	33	33	37	21
64	3	40	9	19	14	47	20	0	24	53	29	25	33	35	37	23
65	3	43	9	22	14	51	20	3	24	56	29	28	33	37	37	25
66	3	47	9	26	14	54	20	6	24	59	29	31	33	40	37	27
67	3	50	9	29	14	57	20	9	25	2	29	33	33	42	37	29

Tabula Gnomonica.

	0		100		200		300		400		500		600		700	
	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M	G	M
68	3	53	9	32	15	0	20	12	25	5	29	36	33	45	37	31
69	3	57	9	36	15	3	20	15	25	8	29	38	33	47	37	34
70	4	0	9	39	15	7	20	18	25	10	29	41	33	49	37	36
71	4	4	9	42	15	10	20	21	25	13	29	44	33	52	37	38
72	4	7	9	46	15	13	20	24	25	16	29	46	33	54	37	40
73	4	11	9	49	15	16	20	27	25	19	29	49	33	56	37	42
74	4	14	9	52	15	19	20	30	25	22	29	51	33	59	37	44
75	4	17	9	56	15	23	20	33	25	24	29	54	34	1	37	47
76	4	21	9	59	15	26	20	36	25	27	29	57	34	4	37	49
77	4	24	10	2	15	29	20	39	25	30	29	59	34	6	37	51
78	4	28	10	6	15	32	20	42	25	33	30	2	34	8	37	53
79	4	31	10	9	15	35	20	45	25	36	30	4	34	11	37	55
80	4	34	10	12	15	39	20	48	25	38	30	7	34	13	37	57
81	4	38	10	16	15	42	20	51	25	41	30	9	34	15	37	59
82	4	41	10	19	15	45	20	54	25	44	30	12	34	18	38	2
83	4	45	10	22	15	48	20	57	25	47	30	15	34	20	38	4
84	4	48	10	26	15	51	21	0	25	50	30	17	34	22	38	6
85	4	52	10	29	15	54	21	3	25	52	30	20	34	25	38	8
86	4	55	10	32	15	58	21	6	25	55	30	22	34	27	38	10
87	4	58	10	36	16	1	21	9	25	58	30	25	34	29	38	12
88	5	2	10	39	16	4	21	12	26	1	30	27	34	32	38	14
89	5	5	10	42	16	7	21	15	26	4	30	30	34	34	38	16
90	5	9	10	45	16	10	21	18	26	6	30	32	34	36	38	19
91	5	12	10	49	16	14	21	21	26	9	30	35	34	39	38	21
92	5	15	10	52	16	17	21	24	26	12	30	38	34	41	38	23
93	5	19	10	55	16	20	21	27	26	15	30	40	34	43	38	25
94	5	22	10	59	16	23	21	30	26	17	30	43	34	46	38	27
95	5	26	11	2	16	26	21	33	26	20	30	45	34	48	38	29
96	5	29	11	5	16	29	21	36	26	23	30	48	34	50	38	31
97	5	32	11	9	16	32	21	39	26	26	30	50	34	53	38	33
98	5	36	11	12	16	36	21	42	26	28	30	53	34	55	38	35
99	5	39	11	15	16	39	21	45	26	31	30	55	34	57	38	37
100	5	43	11	19	16	42	21	48	26	34	30	58	34	0	38	40

Tabula Gnomonica.

	800		900			800		900			800		900	
	G	M	G	M		G	M	G	M		G	M	G	M
0	38	40	41	59	34	39	50	43	3	68	40	57	44	4
1	38	42	42	1	35	39	52	43	5	69	40	59	44	6
2	38	44	42	3	36	39	54	43	6	70	41	1	44	8
3	38	46	42	5	37	39	56	43	8	71	41	3	44	9
4	38	48	42	7	38	39	58	43	10	72	41	5	44	11
5	38	50	42	9	39	40	0	43	12	73	41	7	44	13
6	38	52	42	11	40	40	2	43	14	74	41	9	44	15
7	38	54	42	12	41	40	4	43	16	75	41	11	44	16
8	38	56	42	14	42	40	6	43	17	76	41	13	44	18
9	38	58	42	16	43	40	8	43	19	77	41	15	44	20
10	39	0	42	18	44	40	10	43	21	78	41	17	44	22
11	39	3	42	20	45	40	12	43	23	79	41	19	44	24
12	39	5	42	22	46	40	14	43	25	80	41	21	44	25
13	39	7	42	24	47	40	16	43	26	81	41	23	44	27
14	39	9	42	26	48	40	18	43	28	82	41	25	44	29
15	39	11	42	28	49	40	20	43	30	83	41	27	44	31
16	39	13	42	29	50	40	22	43	32	84	41	29	44	32
17	39	15	42	31	51	40	24	43	34	85	41	31	44	34
18	39	17	42	33	52	40	26	43	35	86	41	32	44	36
19	39	19	42	35	53	40	28	43	37	87	41	34	44	37
20	39	21	42	37	54	40	30	43	39	88	41	36	44	39
21	39	23	42	39	55	40	32	43	41	89	41	38	44	41
22	39	25	42	41	56	40	34	43	43	90	41	40	44	43
23	39	27	42	42	57	40	36	43	44	91	41	42	44	44
24	39	29	42	44	58	40	38	43	46	92	41	44	44	46
25	39	31	42	46	59	40	40	43	48	93	41	46	44	48
26	39	33	42	48	60	40	42	43	50	94	41	48	44	50
27	39	35	42	50	61	40	44	43	52	95	41	50	44	51
28	39	37	42	52	62	40	46	43	53	96	41	52	44	53
29	39	40	42	54	63	40	48	43	55	97	41	54	44	55
30	39	42	42	55	64	40	50	43	57	98	41	55	44	57
31	39	44	42	57	65	40	52	43	59	99	41	57	44	58
32	39	46	42	59	66	40	54	44	1	100	41	59	45	0
33	39	48	43	1	67	40	56	44	2					

3. Similem tabulam gnomonicam compoſuit quoque Georgius Purbachius in ſuo quadrato Geometrico, poſito latere partium 1200. eamque ad ſecunda extendit: quod etiam fecit Io. Antonius Maginus, conſtituto quadrati latere partium 1000. quod quidem ſerius animaduerti. Incidi enim caſu quodam in eam, cum hanc penè meam abſolueram. alioquin in hoc ſupputandi labore ſuperſediſſem, tabulamque Magini huc tranſtuliſſem. Itaque ſi quis in altitudinibus aſtrorũ deſideret etiam ſecunda, petere ea debebit ex Magini tabula: quæ ſanè fideliter, & accuratè ab eo ſupputata eſt, vel certè per calculum eadem elicere, vt ſupra Num. 1. docuimus in hoc probl. Sed meo iudicio contenti eſſe poſſumus hac noſtra, quæ ad Minuta ſolum vltra gradus progreditur. In qua, ſi eam cum illa Magini conferre quis volet, deprehendet, in noſtra Minutis graduum additum eſſe ſemper vnum minutum, quando in ea reperiuntur plura ſecunda, quam 30. Sed vt verum fatear, neque noſtra, neque illa Magini omnino neceſſaria eſt, cum ipſæmet partes milleſimę lateris quadrati, ſi apponantur duæ cifræ, ſint tangentes altitudinum reſpectu ſinus totius 100000. & eædem, ſi addantur quatuor cifræ, Tangẽtes eaſdẽ, poſito ſinu toto 10000000 exhibeant: ac proinde ex tabula Tangentium altitudines excerpi poſſint cuicunque parti milleſimæ congruentes, ſi prius ei adiungantur duæ, aut quatuor cifræ, vt ſupra ad finem Num. 1. oſtendimus. Quia tamen moleſtia nõn caret, per Tangentes hac ratione formatas ex tabula Tangentium angulos altitudinum eruere, quod rarò admodum Tangentes illę in tabula præciſè reperiantur, ac propterea pro illis accipiendæ ſint vel proximè minores, vel maiores, illæ videlicet, quæ paucioribus vnitatibus ab inuentis differunt: non abs re fuerit, vel tabulam hanc noſtram Gnomonicam, vel illam Magini, ſi ſecunda etiam deſiderentur, adſciſcere.

Tabulã gnomonicam non eſſe abſolutè neceſſariam.

Quo pacto partes milleſimæ lateris Quadrati efferant tangẽtes poſito ſinu toto 100000. vel 10000000.

4. Qvamvis autem tabula Gnonomica per ſolas partes milleſimas integras progrediatur; tamen ſi quando ex doctrina cap. 2. Num. 14. lib. 1. tradita vltra milleſimas integras ſuperſit adhuc aliqua particula, non magnus error in altitudinibus aſtrorum obſeruandis committi poteſt. Cum enim anguli in tabula creſcant ordine per tria duntaxat minuta, vel duo, vel vnum, non fiet error niſi vnius aut alterius minuti, etiamſi fractio illa milleſimæ partis negligatur. Quod ſi errorem hunc, licet minimum, vitare cupis, conſidera fractionem milleſimæ, an ſit tertia pars, an ſemiſsis, an verò duæ tertię partes. quod iudicio ſenſus facilè cognoſces ex particula illa, quæ vltra partes decimas circino percurſas ſupereſt. Nam vbi anguli in tabula per tria Minuta augentur, addendum erit vnum minutum, vel duo, prout particula illa reliqua fuerit $\frac{1}{3}$. vel $\frac{2}{3}$. Idem faciendum erit ſi dicta particula fuerit maior, quam $\frac{1}{3}$. minor tamen, quam ſemiſsis. Tunc enim addendum erit etiam vnum Minutum. Item quando particula illa maior fuerit, quam ſemiſsis, addi poſſunt duo minuta. At quando anguli tabulæ augentur per duo Minuta, addendum erit vnum minutum pro ſemiſſe vnius partis milleſimæ.

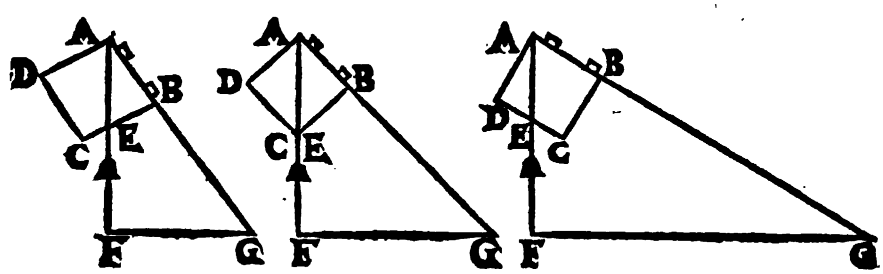
Non magnus error in altitudinibus cõmittitur, etiãſi per integras milleſimas tabula progrediatur; & quo pacto error hic corrigendus ſit.

DISTANTIAM inter te, & ſignum quodcunque in plano Horizontis poſitum per Quadratum Geometricum inueſtigare.

PROBLE-

PROBLEMA II.

1. Sit diſtantia metienda FG. Hoc per quadratum pendulum ſic fiet. Erigatur ex F, altitudo quæpiam nota F A, Horizonti ad angulos rectos, ſiue ea ſit ſtatura menſoris ab oculo ad planum, ſiue maior quædam altitudo. Inſpiciatur extremũ G, per radium AG, ab oculo A, per foramina pinnacidiorum incedentem, filo perpendiculari liberè pendente, & inſtrumentum radente, punctum-



que E, notetur, vbi filum latus quadrati interſecat, quod fiet vel in latere B C, vmbræ rectæ, vel in angulo C, vel in latere DC, vmbræ verſæ. Cadente namque filo in vmbram rectam, vel in punctum C, vt in 1. & 2. figura, fiet triangulum ABE, triangulo AFG, æquiangulum, cum anguli B, F, ſint recti, & angulus A, communis. [a] Si igitur fiat,

a 4. ſexti.

Vt latus A B, partium 1000.	*ad vmbram rectam abſciſſam BE,*	*Ita altitudo nota AF,*	*ad F G, diſtantiam,*

euadet nota diſtantia quæſita F G, in partibus altitudinis AF. Cadente autem puncto E, in vmbram verſam, vt in 3. figura, abſcindetur rurſus triangulum ADE, triangulo AFG, æquiangulum, cum anguli D, F, recti ſint, [b] & alterni AED, FAG, æquales. [c] Ergo ſi fiat.

b 29. primi.
c 4. ſexti.

Vt vmbra verſa abſciſſa DE,	*ad latus DA, partium 1000.*	*Ita altitudo nota AF.*	*ad FG, diſtantiam,*

Quando altitudo maior eſt, quam diſtantia, & quando æqualis, & quando minor.

nota quoque efficietur diſtantia quæſita F G, in partibus altitudinis AF. Ex quo illud intelligere poteris, quando punctum E, interſectionis fili cum latere quadrati cadit in vmbram rectam, altitudinem AF, maiorem eſſe diſtantia F G: quando in punctum C, æqualem; quando denique in vmbram verſam, minorem.

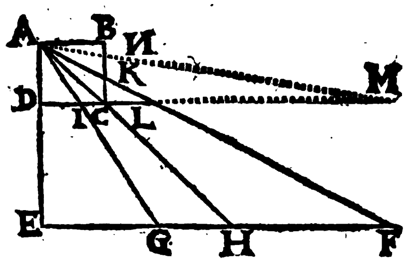
2. Qvadrato ſtabili ita eandem diſtantiam explorabimus. Erigatur in extremo diſtantiæ E, altitudo quædam perpendicularis notarum partium, & quadratum ita accommodetur, vt centrum A, ſuperiorem locum occupet, & vmbra recta DC, Horizonti æquidiſtet. Directa igitur dioptra ad ſignum propoſitum, notetur diligenter vmbra abſciſſa: quæ ſi recta fuerit, nimirum D I, erit altitudo AE, maior, quam diſtantia EG, [d] triangulumque A D I, triangulo AEG, ſimile erit. [e] Si gitur fiat.

d coroll. 4. ſexti.
e 4. ſexti.

Vt latus quadrati AD, 1000.	*ad partes vmbræ rectæ DI:*	*Ita altitudo AE, cognita*	*ad E G, diſtantiam,*

reperietur diſtantia quæſita EG, in partibus altitudinis aſſumptæ AE.

Si au-



SI autem dioptra per C, tranſierit, erit altitudo AE, diſtantiæ quęſitæ EH, æqualis: [a] cum ſit vt AD, ad DC, æqualem, ita AE, ad EH. [a] *4. ſexti.*

SI denique vmbra abſciſſa fuerit verſa, vt BK, erit altitudo AE, minor, quam diſtantia EF, quod plerunq; in diſtantiis metiendis accidere ſolet; eritq; triangulum ABK, triangulo AEF, æquiangulum, cum anguli B, E, recti ſint, [b] & alterni BAK, AFE, æquales. [c] Quare ſi fiat, [b] *29. primi.* [c] *4. ſexti.*

Vt partes vmbra verſa BK,	*ad latus quadrati AB, 1000.*	*Ita altitudo nota AE,*	*ad EF, diſtantiam,*

producetur quæſita diſtantia EF, in partibus altitudinis erectæ AE.

3. QVANDO diſtantia non valdè magna eſt, vel extremum eius punctum facilè videri poteſt ſatis erit, ſi quadratum ſupra planum Horizontis conſtituatur, ita vt vmbrę verſę latus BC, ad punctum illud recta vergat. Vt ſi diſtantia horizontalis DM, metienda ſit, eique imponatur Quadratum erectum, mouenda eſt dioptra, donec linea fiduciæ in extremum M, dirigatur. Qua ratione ſemper vmbra verſa BC, abſcindetur. Nam ſi linea fiduciæ per C, tranſiret, aut vmbram rectam CD, interſecaret, eſſet diſtantia vel æqualis lateri CD, vel minor: ac proinde dimenſione non indigeret. Quoniam igitur rurſus triangulum NBA, triangulo ADM, ęquiangulum eſt, propter rectos angulos B, D, [d] & alternos æquales BAN, AMD; [e] Si fiat, [d] *29. primi.*

Vt partes vmbra verſa BN,	*ad latus quadrati AB, 1000.*	*Ita latus quadrati AD, 1000.*	*ad DM, diſtantiam,*

[e] *4. ſexti.*

cognita erit diſtantia DM, in partibus milleſimis lateris quadrati AD.

4. SOLENT nonnulli Scriptores non inquirere diſtantiam propoſitam in partibus altitudinis aſſumptę AE, vel in partibus milleſimis lateris quadrati AD; ſed ſolum inueſtigant, quoties altitudo electa AE, vel latus quadrati AD, in diſtantia propoſita contineatur: quod idem eſt, ac ſi altitudo, aut latus vmbræ ſtatuatur 1. Atq; ita diuidunt vel partes vmbrę rectę abſciſſas per totum latus partium 1000. vel totum latus vmbræ verſæ per partes vmbrę verſę abſciſſas. Nam Quotiens numerus indicat, quoties altitudo AC, vel latus Quadrati in propoſita diſtantia comprehendatur: cum ſit,

Vt totum latus AD, partium 1000.	*ad partes vmbra recta DI,*	*ita altitudo AE, vel latus AD, vt 1.*	*ad diſtantiam EG, vel DI.*

Item.

Vt partes vmbra verſa BN,	*ad totum latus AB, 1000.*	*Ita altitudo AE, vel latus AD, vt 1.*	*ad diſtantiam EF, vel DM,*

Hinc enim fit, vt cum ſecundum pręceptum regulę trium tertius numerus in ſecundum ſit ducendus, productuſq; numerus per primum diuidendus, ſatis ſit ſi ſecundus per primum diuidatur: quandoquidem vnitas in tertio loco poſita, ſi multiplicet ſecundum numerum, eundem ſecundum numerum procreat, &c.

HAC ratione, ſi duæ partes milleſimę abſcindantur ex vmbra verſa, continebitur

nebitur altitudo A E, vel latus AD, in diſtantia ſecundum hunc numerum 500. quòd 1000. diuiſa per 2. dent Quotientem 500. At vmbra verſa trium milleſimarum dabunt Quotientem $333\frac{1}{3}$. qui à priori differt hoc numero, $166\frac{2}{3}$. Ex quo intelligi licet, quando vmbra verſa abſciſſa valde parua eſt, magnum poſſe errorem committi in diſtantia inueſtiganda. Cum enim partes milleſimæ ſint perexiguæ, facilè decipi poſſumus, vt nimirum putemus, abſciſſas eſſe tres milleſimas, cum fortaſsis ſolum duæ abſciſſæ ſint: ac proinde error committi poterit $166\frac{2}{3}$. altitudinem AE, vel laterum A D, qui error contemnendus non eſt. At quando partes vmbræ verſæ plures milleſimas continent, non tantus error committitur, etiamſi vnam milleſimam pro altera accipiamus. Nam ſi verbi gratia putemus, abſciſſas eſſe partes $\frac{30}{1000}$. ex vmbra verſa, cum verè abſciſſæ ſint $\frac{31}{1000}$. error fieri poterit ſolum in 1. altitudine A E, vel latere AD, & $\frac{7}{93}$. cum $\frac{30}{1000}$. dent Quotientem $33\frac{1}{3}$. at $\frac{31}{1000}$. Quotientem offerant $32\frac{8}{31}$. Itaque magis probo, vt Quadratum in altiori loco ſtatuatur, quam in plano Horizontis, quia ibi plures partes vmbræ verſę abſcinduntur, quam hic, vt conſtat in diſtantiis æqualibus E F, D M. Vides ergo magnam eſſe adhibendam diligentiam, vt accuratè partes milleſimæ reperiantur per ea, quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. ſcripſimus.

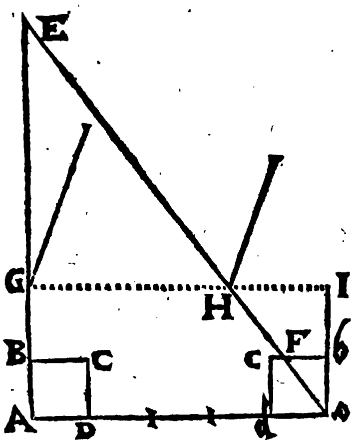
IAM verò, ſi quadratum conſtructum ſit ad certam aliquam menſuram, hoc eſt, vt latus contineat vel 1. paſſum, vel 1. cubitũ, vel 2. pedes, aut palmos, aut 3. aut 4. &c. res erit expeditiſsima, ſi ſemel tantum latus particularum 1000. ducatur in menſuras, quibus latus æquiualet. Ita enim in longitudinibus exquirendis, ſi quadratum ſupra planum, in quo eſt longitudo, ſtatuatur, (vt fit in omnibus hypotenuſis, ſiue diſtantiis à loco menſoris vſque ad aliquod punctum menſore ſublimus, depreſsiuſue, quemadmodum patuit in proxima figura, quando longitudo D M, inquiſita eſt, patebitque in ſcholio problematis 7. & in ſcholio problem. 9. Item in problem. 15. Num. 5. & in problem. 26. Num. 3. & in problem. 27. Num. 3. nec non in problem. 37. & 38. Num. 3. & denique in problem. 43. & 44. & in aliis locis) diuidendus ſolum eſt numerus productus per partes vmbræ verſæ (quæ ſemper abſcinditur) notatas. Quotiens enim dabit longitudinem quæſitám in data menſura. Verbi gratia, ſi in vno latere comprehendantur 3. pedes, multiplicabimus latus 1000. per 3. efficiemuſque 3000. Itaque ſi in inueſtiganda longitudine quapiam abſciſſæ ſint partes 200. ex vmbra verſa, partiemur 3000. per 200. Nam Quotiens 15. dabit 15. pedes pro quæſita longitudine. a Nam cum in proxima figura ſit, vt vmbra verſa NB, 200. ad latus BA, 1000. Ita latus AD, 3. pedum ad DM, multiplicandum eſt latus 1000. per 3. pedes, & productus numerus 3000. per 200. diuidendus. Eademque de cæteris ratio eſt. Sic ſi latus contineret $\frac{1}{2}$ cubiti, diuidendus eſſet numerus 500. ex $\frac{1}{2}$. in 1000. procreatus per vmbram verſam. Pari ratione ſi latus complecteretur 10. palmos, diuidendus eſſet numerus 10000. genitus ex 10. in 1000. per vmbram verſam: vt in Quotiente prodeant palmi in longitudine contenti, &c. quod non indiligenter notandum eſt.

a 4. ſexti

ALITER.

5. QVANDO diſtantia metienda magna eſt, & adeſt bona planities campi, vti poterimus Quadrato ſtabili commodiſsimè hoc modo. Sit diſtantia oblata A E.

ta A E. Erigatur quadratum ad Horizontem ad rectos angulos, circumducaturque, donec per eius planum oculus in A, conſtitutus ſignum E, perſpiciat, atque linea notetur A G. Demiſſo deinde Quadrato vſque ad Horizontis planum, ita vt latus AB, recta tendat ad ſignum E, hoc eſt, à recta notata A G, non recedat, protendatur linea recta per latus A D, in qua accipiantur quotcunque partes lateri A D, æquales: vel quotcunque aliæ menſuræ æquales, vt paſſus, vel cubiti, vſque ad punctum a, in quo rurſus erigatur quadratum, (In hoc ſecundo quadrato aſſcripſimus literas minuſculas, ne literæ vnius quadrati cum literis alterius confundantur, quod in ſequentibus etiam obſeruabimus.) vertaturque, donec per eius planum idem ſignum E, appareat per rectam a H. Poſt hæc quadratum Horizonti incumbat, latuſque a d, rectæ A a congruat, & dioptra circumducatur, donec eius linea fiduciæ rectæ a H, præciſe ſit ſuppoſita, notenturque partes milleſimæ in portione vmbræ verſæ b F, quam diligentiſſimè. Abſcindetur autem ſemper vmbra verſa, propterea quod diſtantia AE, proponitur magna, ſaltem maior, quam A a: alioquin menſurari poſſet ſine quadrato, quemadmodum & A a. Quibus peractis, erunt triangula a b F, a A E, æquiangula, cum angulos habeant rectos [a] b, A, & alternos æquales b a F, A E a. [b] Si ergo fiat, a 29. primi. b 4. ſexti.



Vt vmbra b F, ad latus b a, 1000, Ita a A, nota ad A E, diſtantiam,

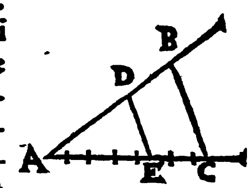
inuenietur diſtantia A E, in partibus rectæ A a. Vel ſi diuidatur latus b a, 1000. per partes milleſimas vmbræ B F, procreabitur numerus, ſecundum quem recta A a, in diſtantia eadem A E, continetur: poſita nimirum recta A a, vt 1. vt Num. 4. oſtendimus.

6. QVOD ſi ad manum non habeamus Quadratum, obtinebimus eandem diſtantiam beneficio baculi, vel arundinis hoc artificio. Figatur baculus, vel arundo in G, ad rectos angulos plano Horizontis, quod per filum aliquod cum perpendiculo facile fiet. Deinde recede per quotlibet paſſus vſque ad A, ita vt viſus per baculum incedens feratur in ſignũ E. Poſt hæc ducatur linea A a, ad AE, perpẽdicularis, in qua numera quotlibet etiam paſſus vſq; ad a. Ducta tandem GI, ad A E, quoque perpendiculari, & ipſi A a, æquali, figatur rurſum baculus ad angulos rectos in tali puncto rectæ GI, nimirum in H, vt oculus iterum ex a, per baculum incedens feratur in ſignum E: inquiranturque exquiſitiſſime paſſus vna cum fragmentis vnius paſſus in H I, contenti. His enim peractis, quoniam rurſus triangula H I a, a A E, æquiangula ſunt, ob angulos rectos I, A, & alternos æquales I a H, A E a, [c] ſi fiat, c 4. ſexti.

Vt H I, nota ad I a, notam Ita a A, nota ad A E, diſtantiam,

efficietur nota diſtantia A E, in partibus rectarum G A, A a, a I. Vel ſi diuidatur a I, nota per IH, notam, reperiemus, quoties A a, in diſtantia AE, contineatur, ſi nimirum recta A a, ponatur vt 1.

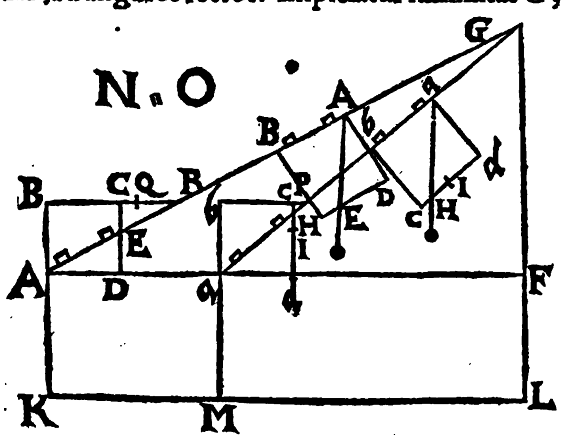
7. IAM verò abſq; numerorum auxilio problema abſoluemus, ſi attentè ea conſiderentur, quæ lib. 2. problem. 1. Num. 7. ſcripſimus. Nam ſi fiat angulus quicunque BAC, & pro primo exemplo Num. 1. huius problem. ſumatur AD, æqualis lateri quadrati AB, vel ſi eſſet nimis magnum, æqualis ſemiſsi, vel tertiæ parti, aut quartæ, &c. eiuſdem lateris. Deinde DB, æqualis vmbræ abſciſſę BE, (quæ ſumma cura per circinum in quadrato accipienda eſt) vel eius ſemiſsi, vel tertiæ parti, aut quartæ &c. vt nimirum AD, DB, ſint æquè ſub-multiplices lateris AB, & vmbræ BE, ſi eis æquales non ſunt. Poſt hęc ex inſtrumento partium ſumatur AE, tot particularum, quot palmi, aut pedes in altitudine AF, continentur. Si enim iunctæ rectę DE, parallela agatur BC, continebit diſtantia FG, tot palmos, aut pedes, quot particulę inſtrumenti partium in interuallo EC, comprehenduntur. Vt ſi altitudo AF, ſit pedum 5. erit diſtantia FG, pedum 3. & ſic de cęteris. Atque hoc modo procedendum erit in aliis exemplis omnibus, conſiderando videlicet attentè primas tres magnitudines Regulæ trium, &c. quod ſemel monuiſſe ſatis eſt.



DISTANTIAM in plano per duas ſtationes in eodem plano factas per Quadratum Geometricum metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo aliqua perpendicularis, etiamſi infimum eius extremum non cernatur.

PROBLEMA III.

1. DISTANTIA inueſtiganda ſit AF. Intelligatur planum Horizontis KL; erecta altitudo GL: ſtatura menſoris AK, vel alia quædam menſura cognita. Supra aliquam baſem Horizonti æquidiſtantem collocetur quadratum ſtabile, ita vt eius latus AD, cogitatione productum occurrat altitudini erectæ in F, ad angulos rectos. Inſpiciatur ſummitas G, per dioptram, ſecetque eius linea fiduciæ vmbram verſam CD, in E, quod ſemper continget, quando diſtantia AF, maior eſt altitudine FG. a quod tunc angulus A, minor fiat angulo G, ac proinde ſemirecto minor, quem cum AD, in A, faceret radius per G, emiſſus. Deinde accede magis, vel recede per longitudinem notam Aa, & collocato quadrato ſupra eandem baſem, ſecet iterum dioptra ad punctum G, directa vmbram verſam cd, in H: eritq; vmbra verſa dH, in propinquiori ſtatione maior, quam vmbra verſa DE, in ſtatione remotiore, b quod angulus a, maior ſit angulo A. Auferatur dI, ipſi DE, æqualis, vt HI, differentia ſit vmbrarum verſarum



a 18. primi.

b 16. ſexti.

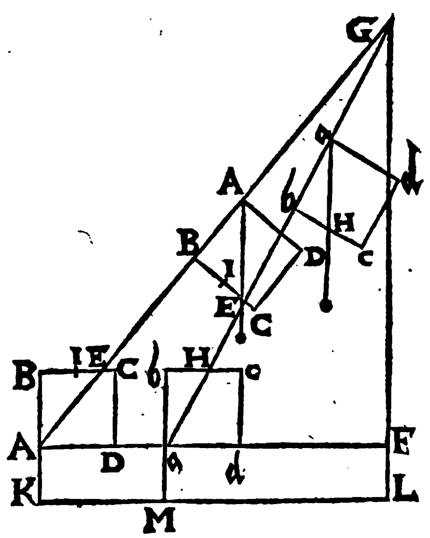
ſarum. [a] Et quia eſt, vt AD, ad DE, ita AF, ad FG: [b] erit rectangulo ſub A D, FG, [a] *4. ſexti.*
æquale rectangulum ſub D E, AF. Eadem ratione erit rectangulo ſub a d, F G. [b] *16. ſexti.*
rectangulum ſub dH, aF, æquale: propterea quod etiam eſt [c] vt a d, ad dH, ita [c] *4. ſexti.*
aF, ad F G. Cum ergo rectangulum ſub AD, FG, æquale ſit rectangulo ſub a d, F G, quod rectæ A D, a d, æquales ſint: erit quoque rectangulum ſub dH, aF, rectangulo ſub DE, AF, hoc eſt, ſub dI, AF, æquale; [d] ideoque erit, vt dH, prima [d] *16. ſexti.*
ad d I, ſecundam, ita AF, tertia ad AF, quartam: Et permutando, vt tota dH, ad totam AF, ita ablata d I, ad ablatam aF. [e] Igitur erit quoque reliqua H I, ad reli- [e] *19. quinti.*
quam Aa, vt tota d H, ad totam A F. Quocirca ſi fiat,

Vt H I, differentia vmbrarum verſarum,	*ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita dH, vmbra verſa propinquioris ſtationis, ſiue maior,*	*ad A F, diſtantiã*

producetur A F, diſtantia nota in partibus differentiæ ſtationum Aa, notæ.

2. EADEM prorſus ratio eſt in quadrato pendulo. Nam filum perpendiculi abſcindit quoque triangula ADE, adH, triangulis AFG, aFG, æquiangula: propterea, quod tam anguli D, F, recti ſunt, [f] & angulus F, hoc eſt, alternus B A E, [f] *29. primi.*
angulo AGF, externus interno æqualis; quam anguli d, F, recti, & angulus H, id eſt, alternus baH, angulo a G F, externus interno æqualis. Reliqua demonſtrabuntur, vt prius. ſunt enim vmbræ verſæ in pendulo quadrato vmbris in ſtabili æquales. Nam cum duo anguli D, E, in triangulo ADE, quadrati penduli æquales ſint duobus angulis D, E, in triangulo ADE, quadrati ſtabilis, quod ea triangula ſint, vt oſtendimus, æquiangula: ſint autem & latera AD, AD æqualia; [g] erunt & rectæ D E, D E, hoc eſt, vmbræ verſæ, æquales. Eademque ratione verſæ [g] *26. primi.*
vmbræ d H, d H, æquales erunt, &c.

3. SI in vtraq; ſtatione vmbra recta abſcindatur à linea fiduciæ, vel à filo perpendiculi, vt in E, & H, quod quidem ſemper continget, quando diſtantia A F, minor eſt altitudine FG, [h] quod tunc angulus A, maior fiat angulo G, ac proinde ſemirecto maior, quem cum AD, conſtitueret radius per C, emiſſus. Eritque [h] *18. primi.*



vmbra recta BE, in remotiore ſtatione maior, quã vmbra recta bH, in ſtatione propinquiore, [i] quòd angulus FaG, maior ſit angulo F A G; ac proinde baH, minor angulo BAE. Auferatur BI, ipſi bH, æqualis, vt I E, differentia ſit vmbrarum rectarum. Et quia triangula ABE, AFG, æquiangula ſunt, propter angulos rectos B, F, [k] & alternos æquales B A E, A G F: [l] erit vt A B, ad B E, ita F G, ad A F, & permutando, vt AB, ad F G, ita BE, ad A F. Eadem ratione, quia triãgula a b H, a F G, æquiãgula ſunt, propter rectos angulos b, F, [m] & alternos æquales b a H, a G F, [n] erit vt a b, ad b H, ita F G, ad a F: Et permutando vt a b, ad FG, ita bH, ad AF. Cum ergo ſit, vt AB, ad F G, ita a b, ad FG, propter rectas æquales AB, a b. [o] erit quoque vt BE, tota ad A F,

[i] *16. primi.*
[k] *29. primi.*
[l] *4. ſexti.*
[m] *29. primi.*
[n] *4. ſexti.*
[o] *11. quinti.*

[a] 19. quinti.

totam ita BI, ablata ipſi b H, æqualis, ad ablatum a F. [a] Igitur erit & reliqua I E, ad reliquam A a, vt tota B E, ad totam AF. Quapropter ſi fiat.

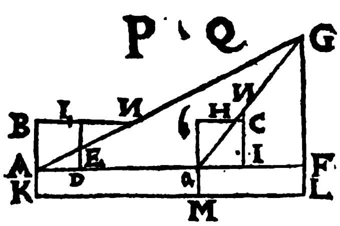
Vt I E, differentia vmbrarum rectarum,	*ad A a, differentiam ſtationum:*	*Ita B E, vmbra recta remotioris ſtationis, ſiue maior*	*ad AF, diſtantiam,*

procreabitur AF, diſtantia nota in partibus differentiæ ſtationum A a, notæ.

[b] 29. primi.

4. Eadem omnino in quadrato pendulo eſt ratio. Nam filum perpendiculi abſcindit quoque triangula ABE, ab H, triangulis A F G, aFG, æquiangula; quod tam anguli B, F, recti ſint, [b] & angulus BAE angulo AGF, externus interno æqualis, quam anguli b, F, recti, & angulus b a H, angulo aGF, æqualis, externus interno. Reliqua demonſtrabuntur, vt in ſtabili quadrato. Sunt enim vmbræ rectæ in quadrato pendulo vmbris rectis in ſtabili æquales. Nam cum duo anguli B, E, in triangulo A B E, quadrati penduli, æquales ſint duobus angulis B, E, in triangulo A B E, quadrati ſtabilis; quod hæc triangula ſint, vt oſtenſum eſt, æquiangula, vtpote æquiangula triangulo A G F; [c] erunt & rectæ B E, B E, hoc eſt, vmbræ rectæ æquales. Eademque ratione vmbræ rectæ b H, b H, æquales erunt &c.

[c] 26. primi.



Ad dexterum angulum ſuperiorem prioris quadrati pone C. ad dexterum inferiorem poſterioris d.

5. Si denique in remotiore ſtatione ſecetur vmbra verſa C D, in E, & recta b c, in H, in ſtatione propinquiore, reducenda erit alterutra earum ad alteram, vt habeantur ſimiles vmbræ, per ea, quæ in quadrati conſtructione Nu. 7. ad initium huius libri tradidimus, diuidendo nimirum quadratum lateris A B, per vmbram, quæ reduci debet, &c. Nam ſi fiat vt I N, differentia vmbrarum ſiue rectarum, ſiue verſarum, ad A a, differentiam ſtationum: Ita B N, maior vmbra recta vel d N, vmbra verſa maior ad aliud, gignetur diſtantia A F, vt demonſtratum eſt Numero 3. & 1.

6. Qvod ſi quando in vna ſtatione linea fiduciæ tranſierit per C, aſſumi poterit vel latus vmbræ rectæ BC, vel verſæ C D, prout in altera ſtatione abſciſſa erit vmbra recta, vel verſa; vt nimirum vmbræ ſint ſimiles.

COROLLARIVM I.

Eundem eſſe modum operandi in vtroque quadrato.

Colligitvr ex demonſtratis, eundem eſſe operandi modum in vtroq; quadrato: quandoquidem eædem vmbræ in quadrato pendulo, quæ in ſtabili, abſcinduntur, vt oſtendimus: Itaque præcepta, quæ in vno præſcribuntur, in altero quoque obſeruanda ſunt.

COROLLARIVM II.

Eundem eſſe operandi modum per vmbras verſas, & per rectas.

Patet etiam ex dictis, operationem non variari, ſiue per vmbras verſas, ſiue per rectas inſtituatur: quandoquidem ſemper eſt, vt differentia vmbrarum ad differentiam ſtationum, ita vmbra maior, ad diſtantiam, quæ inueſtiganda proponitur, vt demonſtratum eſt.

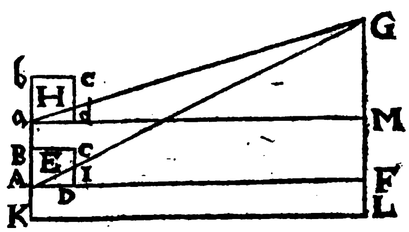
Cæte-

CÆTERVM in ſcholio problematis 7. præſcribemus rationē, qua eandem diſtantiam A F, metiri licebit per vnicam ſtationem.

DISTANTIAM eandem per duas ſtationes in aliqua altitudine erecta factas, ope quadrati perſcrutari.

PROBLEMA IV.

1. QVANDO in plano commode fieri nequeunt duæ ſtationes, erigatur haſta aliqua K b, in qua fiant duæ ſtationes oculi menſoris in A, a: Vel in duabus feneſtris alicuius turris, quarum vna ſuperſtet alteri ad perpendiculum: abſcindaturque primum latus vmbræ verſæ in vtraque ſtatione in E, H, Eritque inferioris ſtationis vmbra verſa D E, maior, quam vmbra verſa d H, ſtationis ſuperioris, quod angulus A, maior ſit angulus A, maior ſit angulo a; quippe cũ A G F, minor ſit, quam a G M; & anguli F, M, recti. Sumatur D I, ipſi d H, æqualis; [a] Et quoniam eſt, vt A D, ad D E, ita A F, ad F G: erit permutando, vt A D, ad A F, ita D E, ad F G. Eademque ratione erit, vt a d, ad a M, ita d H, ad M G. Cum ergo eadem ſit proportio A D, ad A F, quę a d, ad a M, propter ęqualitatem linearum AD, a d, & AF, a M; [b] Erit vt D E, tota ad totam F G, ita d H, hoc eſt D I, ablata ad ablatam M G. [c] Igitur erit quoque reliqua I E, ad reliquam F M, hoc eſt, ad reliquam A a, vt tota D E, ad totam F G, hoc eſt, vt A D, ad A F; cum oſtenſum ſit eſſe A D, ad A F, vt DE, ad FG. Quocirca ſi fiat,

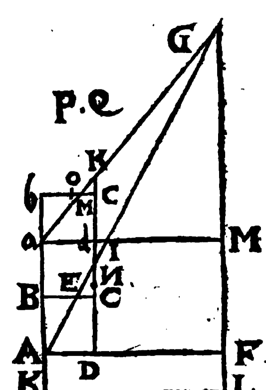


[a] 4. ſexti.
[b] 11. quinti.
[c] 19. quinti.

Vt IE, differentia vmbrarum verſarum	*ad A a, differentiam ſtationum,*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad A F, diſtantiam,*

manifeſta colligetur diſtantia AF, in partibus differentię ſtationum Aa.

2. SI in vtraque ſtatione latus vmbrę rectę interſecetur in E, H, reducenda eſt vtraque vmbra recta B E, b H, ad verſam, per ea, quę tradita ſunt ad initium huius libri in conſtructione quadrati Numero 7. diuidendo videlicet quadratum numerum lateris quadrati per vtramque vmbram rectam abſciſſam ſigillatim. Nam ſi producantur latera D C, d c, vmbrę verſę vſque ad radios A G, a G, ad puncta I, K, erit iterum, vt demonſtrauimus Numero 1. vt I N, differentia vmbrarum verſarum ad A a, differentiam ſtationũ



ita AD, latus quadrati ad A F, diſtantiam. Ergo vt Num. 1. oſtenſum eſt, inuenietur diſtantia AF, in partibus differentiæ ſtationum Aa.

ALITER

Sine reductione vmbrarum rectarum ad verſas hoc alio modo eandem diſtantiam AF, eliciemus. Ex OH, differentia vmbrarum rectarum in latus a b, fiat
[a] 4. ſexti. P: & ex b H, vmbra recta maiore in minorem B E, fiat Q. [a] Et quia eſt, vt I D, ad
[b] 17. ſexti. D A, ita AB, ad BE; [b] erit rectangulum ſub ID, B E, æquale quadrato ex A D, vel AB. Eodemque modo rectangulum ſub K d, b H, quadrato ex a d, vel a b, hoc eſt, eidem quadrato ex AD, vel AB, æquale erit: ac proinde rectangula ſub I D,
[c] 16. ſexti. B E: & ſub K d, b H, æqualia inter ſe erunt. [c] Igitur erit, vt I D, ad K d, ita b H, ad BE, & permutando vt I D, ad b H, ita K d, ad B E, hoc eſt, vt I D, tota ad totam
[d] 19. quinti. b H, ita K d, hoc eſt, ita D N, ablata ad B E, hoc eſt, ad b O, ablatam: [d] Ideoque erit & reliqua I N, ad reliquam O H, vt tota I D, ad totam b H; & permutando I N, ad ID, vt OH, ad b H. Quia vero proportio I N, ad D A, (poſita media ID,) componitur ex proportionibus I N, ad I D, & I D, ad D A: Eſt autem, vt pro-
[e] 4. ſexti. xime monſtratum eſt, vt I N, ad I D, ita O H, ad b H; [e] & vt I D, ad D A, ita A B, ad B E: componetur quoque proportio IN, ad DA, ex proportionibus OH, ad
[f] 23. ſexti. b H, & A B, ad B E. [f] Sed proportio etiam producti P, ad productum Q. componitur ex eiſdem proportionibus, nimirum ex lateribus. Igitur eadem eſt proportio P, ad Q. q̃ IN, ad D A. Cum ergo, vt in 1. modo huius Num. 2. oſtendimus, ſit I N, ad A a, vt AD, ad A F, hoc eſt, permutando vt I N, ad DA, ita A a, ad A F: Erit quoque P, ad Q. vt A a, ad A F. Quapropter ſi fiat,

Vt P, numerus, qui fit ex O H, differentia vmbrarum rectarum in a b, latus quadrati,	*ad Q, numerum, qui fit ex vmbra recta b H, maiore in minorem B E,*	*Ita A a, differentia ſtationum*	*ad A F, diſtantiam,*

producetur eadem diſtantia quæſita A F, in partibus differentiæ ſtationum A a.

ALITER.

[g] 4. ſexti. [g] Qvoniam eſt, vt b H, ad a b, ita a M, ad M G: ſi fiat,

Vt b H, vmbra recta,	*ad d b, latus quadrati 1000.*	*Ita a M, quatenus 1.*	*ad M G,*

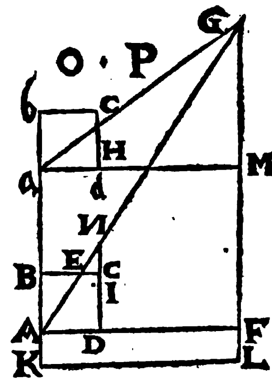
hoc eſt, (quia 1. multiplicans latus quadrati 1000. producit idem latus 1000.) ſi quadrati latus 1000. a b, diuidatur per vmbram rectam b H, exibit Quotiens M G, indicans, quoties a M, quatenus 1. in M G, comprehendatur. Eodem pacto, ſi fiat,

Vt B E, vmbra recta	*ad A B, latus quadrati 1000.*	*Ita A F, quatenus 1.*	*ad F G,*

hoc eſt, ſi quadrati latus 1000. AB, diuidatur per vmbram rectam B E, fiet Quotiens F G, ſignificans, quoties A F, quatenus 1. contineatur in F G. Si igitur ex poſteriore hoc Quotiente F G, prior ille Quotiens M G, detrahatur, reliqua fiet F M, vel A a, differentia ſtationum cognita in partibus, quarum A F, eſt 1. Quocirca ſi fiat,

Vt

Vt A a, differentia Quotientum qui fiunt, ſi latus quadrati per vtramque vmbram rectam diuidatur,	*ad A a, differentiam ſtationum notam in menſura aliqua:*	*ita A F, vt 1.*	*ad AF, diſtantiam,*



hoc eſt, ſi differentia ſtationum diuidatur per differentiam Quotientum, efficietur nota diſtantia AF, in partibus differentiæ ſtationum A a, &c.

3. SI denique in ſtatione inferiori latus vmbræ rectæ ſecetur in E, & in ſuperiori ſtatione latus vmbræ verſæ in H, reducenda quoque erit vmbra recta ad verſam, vt diximus, & producendum latus D C, vmbræ verſæ vſque ad punctum N, ſumendaque D I, ipſi d H, æqualis. Nam vt Num. 1. oſtendimus, ſi fiat,

Vt N I, differentia vmbrarum verſarum	*ad A a, differentiam ſtationum:*	*Ita A D, latus quadrati*	*ad A F, diſtantiam,*

cognita rurſus erit diſtantia A F, in partibus differentiæ ſtationum A a.

ALITER.

SINE reductione vmbræ rectæ ad verſam ita quoque agemus. Numerus qui fit ex recta vmbra B E, in vmbram verſam d H, auferatur ex 1000000. quadrato lateris 1000. reſiduumque ſit, O. Item ex vmbra recta B E, in latus quadrati 1000. fiat P. Et quoniam, vt initio huius libro in conſtructione quadrati Numer. 6. oſtendimus, latus quadrati medio loco proportionale eſt inter vmbras B E, D N: [a] Erit rectangulum ſub B E, D N, quadrato lateris æquale. [b] Cũ ergo rectangulum ſub B E, D N, æquale ſit rectangulis ſub D E, D I, & ſub B E, N I: ſi rectangulum ſub B E, D I, auferatur ex rectangulo ſub B E, DN, id eſt, ex 1000000. quadrato lateris AD, reliquum fiet rectangulum ſub B E, N I; ac proinde cum D I, ipſi d H, ſi æqualis, fiet rectangulum ſub B E, D I, ex vmbra B E, in vmbram d H; atque idcirco reliquum rectangulum ſub B E, N I, (quod videlicet relinquitur, ſi rectangulum ſub B E, D I, ex quadrato lateris detrahatur, vt dictum eſt,) numero O, æquale erit. Eſt autem ex conſtructione rectangulum quoque ſub B E, vmbra recta, & latere A D, numero P, æquale. Igitur cum numerus B E, multiplicans N I, A D, producat O, P, [c] erit O, ad P, vt N I, ad AD. Sed vt Numero 1. huius problematis demonſtrauimus, vt NI, differentia vmbrarum verſarum ad A a, differentiam ſtationum, ita eſt AD, latus quadrati ad AF, & permutando vt N I, ad AD, ita A a, ad AF. Igitur erit quoque O, ad P, vt A a, ad A F. Quamobrem, ſi fiat,

[a] *16. ſexti.*
[b] *1. ſecundum.*
[c] *17. ſept.*

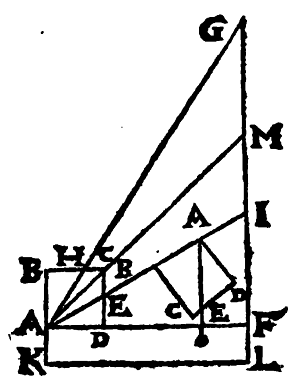
Vt O, numerus, qui relinquitur ſi numerus genitus ex vmbra recta in verſam ex quadrato lateris detrahatur,	*ad numerum P, qui ex vmbra recta BE, in latus AD, producitur:*	*Ita A a, differentia ſtationum*	*Ad AF, diſtantiam,*

procreabitur diſtantia quæſita AF, in partibus differentiæ ſtationum A a,

4. Hic etiam ſi forte in vna ſtatione linea fiduciæ, aut filum perpendiculi, tranſierit per punctum, C, aſſumendum erit vel latus vmbræ rectæ, vel verſæ, vt Num. 6. præcedentis problematis dictum eſt.

ALTITVDINEM cuiuslibet rei erectæ per eius diſtantiam ab oculo menſoris, beneficio quadrati conijcere.

PROBLEMA V.



1. Sit altitudo conijcienda G L, vel M L, vel I L, ad Horizontem perpendicularis. Statura menſoris, vel aliqua alia menſura nota ſit F L, vel A K, pareturque planum Horizonti parallelum A F, in quo quadratum erigatur, cuius latus A D, intelligatur productum occurrens altitudini in F. Inſpecto cacumine I, ſecet primum dioptra vel filum perpendiculi latus C D, vmbræ verſæ in E. quod accidet, quando diſtantia A F, maior eſt, altitudine F I, vt problemate 2. Num. 1. oſtendimus. Quoniam igitur triangulum ADE, triangulo AFI, æquiangulum eſt, vt ibidem monſtratum eſt; [a] erit vt AD, ad DE, ita AF, ad FI. Quãobrem ſi fiat,

a 4. ſexti.

Vt latus quadrati 1000.	*Ad vmbram verſam DE:*	*Ita diſtantia A F, vel data, vel inuenta per probl. 3. aut 4.*	*Ad FI*

patefacta erit altitudo F I, in partibus diſtantiæ A F, quæ ſi data non eſt, exquirenda erit vel per problema 3. vel 4. Et ſi ad F I, adijcietur menſura, vel ſtatura menſoris F L, tota altitudo propoſita IL, nota fiet.

2. Deinde linea fiduciæ tranſeat per punctum C. quod fiet, quando diſtantia AF, altitudini FM, æqualis eſt; [b] quod tunc angulus CAD, ſemirectus ſit, ac proinde & reliquus M, in triangulo F A M. [c] Ideoque latera AF, FM, æqualia ſint. Quanta ergo eſt diſtantia AF, quæ vel data eſt, vel inuenienda per problema 3. vel 4. tanta erit altitudo F M, cui addita F L, nota patefaciet totam altitudinem M L.

b ſchol. 34. primi.
c 6. primi.

3. Poſtremo interſecetur vmbræ rectæ latus in H. quod eueniet, quando di-

do diſtantia A F, minor eſt altitudine F G: eritque triangulum A B H, triangulo A F G, æquiangulum, vt problemate 3. Num. 3. demonſtrauimus. Igitur erit, vt B H, ad A B, ita A F, ad F G: ac proinde, ſi fiat,

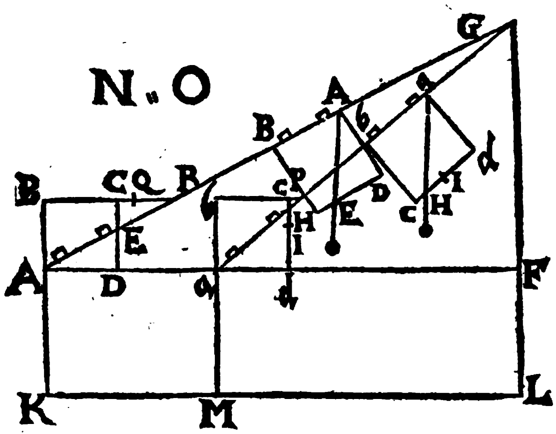
Vt vmbra recta B H,	*ad AB, latus quadrati 1000.*	*Ita diſtantia AF, vel data, vel inuenta per probl. 3. aut 4.*	*ad F G,*

nota euadet F G, cui ſi addetur menſura vel ſtatura menſoris F L, efficietur nota tota altitudo G L, propoſita.

ALTITVDINEM eandem, etiamſi eius diſtantia ab oculo menſoris neque data ſit, neq; inuenta, per duas ſtationes in plano factas patefacere auxilio quadrati.

PROBLEMA VI.

1. PROPOSITA ſit altitudo metienda F G, ſecluſa menſoris ſtatura F L. Fi-



ant duæ ſtationes, vt in problemate 3. cuius figura 1. hic repetatur, ſeceturque primum vmbra verſa in vtraque ſtatione in punctis E, H. Et quia propter ſimilitudinem triangulorum A D E, A F G, * eſt vt D E, ad A D, ita F G, ad A F: ſi fiat,

Vt D E, vmbra verſa abſciſſa	*ad AD, latus quadrati 1000.*	*Ita FG, quatenus 1.*	*ad A F.*

hoc eſt, (cum 1. multiplicans latus quadrati 1000. producat idem latus 1000.) ſi quadrati latus 1 0 0 0. diuidatur per vmbram verſam D E, prodibit Quotiens A F, indicans, quoties F G, in A F, contineatur. Eodem pacto ſi fiat,

Vt vmbra verſa d H,	*ad a d, latus quadrati 1000.*	*Ita F G, quatenus 1.*	*ad a F,*

hoc eſt, ſi quadrati latus 1 0 0 0. diuidatur per vmbram verſam d H, gignetur Quotiens a F, monſtrans, quoties F G, in a F, contineatur. Si igitur poſterior hic Quotiens a F, ex priori Quotiente a F, detrahatur, relinquetur differentia A a, cognita in partibus, quarum F G, eſt 1. Si ergo fiat,

Vt A a, differentia Quotientum. diuiſo latere Quadrati per vtramque vmbram verſam,	*ad A a, differentiam ſtationum.*	*Ita F G, vt 1.*	*ad FG,*

producetur altitudo F G, in partibus differentiæ ſtationum A a, nota, & adiecta menſoris ſtatura F L, tota altitudo GL, nota fiet.

ALITER.

EX differentia H I, vmbrarum verſarum in latus quadrati gignatur numerus N: & ex vmbra verſa D E, in verſam d H, fiat O. Productis autem lateribus BC, bc, vſque ad R, P, in radijs, abſcindatur B Q, ipſi b P, æqualis. Et quia, vt problemate 3. Num. 3. demonſtratum eſt, ita eſt QR, differentia vmbrarum rectarum ad A a, differentiam ſtationum, vt vmbra recta maior BR, ad AF, diſtantiam: [a] Vt autem B R, ad B A, ita eſt A F, ad F G: & permutando, vt B R, ad A F, ita B A, ad FG; erit quoque QR, ad A a, vt BA, ad F G, & permutando QR, ad B A, vt A a, ad FG. Dico iam, vt eſt QR, ad AB, ita eſſe numerum N, ad numerum O. [b] Cum enim ſit, vt DE, ad D A, ita AB, ad BR; [c] erit rectangulum ſub DE, B R, rectangulo ſub D A, A B, hoc eſt quadrato lateris æquale. Eademque ratione erit rectangulum ſub d H, b P, eidem quadrato lateris æquale; ideoque rectangulum ſub DE, BR, rectangulo ſub d H, b P, æquale erit. [d] Igitur erit, vt D E, ad D H, ita b P, ad B R: & conuertendo, vt d H, ad D E, ita B R, ad b P, vel ad B Q: & permutando vt tota d H, ad totam BR, ita DE, vel d I, ablata ad b P, vel ad BQ, ablatam. [e] Igitur & reliqua HI, ad reliquam QR, erit, vt tota dH, ad totam BR, vel vt ablata dI, ad ablatam BQ: & permutando, vt H I, ad d I, ita QR, ad B Q, vel ad b P. [f] Proportio autem numeri N, ad numerum O, componitur ex proportionibus HI, ad d I, vel ad DE, & lateris a d, ad d H: propterea quod N, factus eſt ex HI, differentia vmbrarum verſarum in latus quadrati a d; At vero O, ex vmbra verſa D E, in verſam d H, ex conſtructione. Cum ergo ſit, vt paulo ante oſtendimus, quemadmodum H I, ad d I, ita QR, ad b P, [g] Itē vt latus a d, ad DH, ita bP, ad b a, componetur quoque proportio N, ad O, ex proportionibus QR, ad bP, & b P, ad b a. Sed ex his eiſdem componitur proportio QR, ad ba. Igitur eadem eſt proportio N, ad O, quæ QR, ad b a, vel B A. quod oſtendere volebamus eſt autem vt QR, ad BA, ita A a, differentia ſtationum ad altitudinem F G, vt ſupra oſtendimus prope initium huius demonſtrationis. Igitur ſi fiat,

[a] 4. ſexti.
[b] 4. ſexti.
[c] 16. ſexti.
[d] 16. ſexti.
[e] 19. quinti.
[f] 23. ſexti.
[g] 4. ſexti.

Vt N, numerus, qui fit ex HI, differentia vmbrarum verſarum in latus quadrati 1000.	*ad numerum O, factum ex vmbra verſa DE, in verſam dH.*	*Ita A a, differentia ſtationum*	*ad FG altitudinem.*

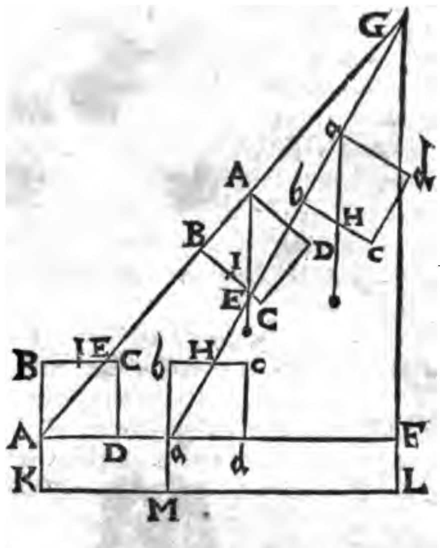
deprehenſa erit altitudo F G, in partibus differentiæ ſtationum A a, &c.

ALITER

REDVCATVR vtraque vmbra verſa ad rectam, vt ad initium huius libri in quadrati conſtructione Num. 7. docuimus. Nam per has vmbras rectas altitudinem FG, nanciſcemur, vti Num. 2. in ſequenti tradetur.

2. SECETVR deinde vtraque vmbra recta in E, H, vt in 2. figura problematis 3. quæ hic repetatur. Et quoniam ob ſimilem triangulorum ABE, A F G, [a] erit, vt

[a] eſt, vt BE, ad AB, ita AF, ad GF; erit permutando, vt BE, ad AF, ita AB, ad FG. Eademque ratione erit vt b H, ad a F, ita a b, ad FG; ac proinde erit, vt tota BE, ad totam AF, ita ablata b H, vel B I, ad ablatam a F, cum vtraque proportio ſit, quæ AB, vel a b, ad FG. a 4. ſexti.



Igitur erit quoque reliqua IE, ad reliquam A a, vt tota BE, ad totam AF, hoc eſt, vt AB, ad FG, cum duæ hæ proportiones eædem inter ſe ſint, vt paulò ante demonſtrauimus. Quocirca ſi fiat,

Vt IE, differentia vmbrarum rectarum	*Ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita AB, quadrati latus 1000.*	*ad FG,*

profiliet nota altitudo FG, & adiuncta menſoris ſtatura FL, tota altitudo GL, quæſita nota efficietur.

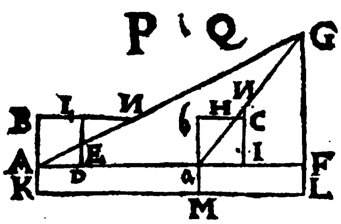
ALITER.

DIVIDE quadrati latus 1000. per vtramque vmbram rectam, & minorem Quotientem duc in differentiam ſtationum, numerumque productum partire per differentiam Quotientum. Si namque hic vltimus Quotiens ducatur in Quotientem maiorem ex prioribus duobus Quotientibus, producetur altitudo quæſita in partibus differentiæ ſtationum. Quod ita perſpicuum fiet.

SIT vmbra recta minor b H. 50. verbi gratia, & maior B E, 125. at differentia ſtationum Aa, ſit 16. paſſuum. [b] Et quia eſt, vt b H, ad a b, ita a F, quatenus 1. ad F G; ſi a b, 1000. diuidatur per b H, 50. indicabit Quotiens 20. rectam a F, in F G, contineri vicies. b 4. ſexti.

SIC etiam, [c] quia eſt, vt BE, ad AB, ita AF, quatenus 1, ad FG; ſi AB, 1000. diuidatur per BE, 125. monſtrabit Quotiens 8. rectam AF, in FG, contineri octies. Quia itaque A a, 16. paſſuum vna cum a F, continetur in FG, octies, fit vt Aa, 16. paſſuum octies ſumpta, vna cum a F, octies quoque ſumpta, faciat 128. paſſus, & a F, octies ſumptam, nimirum numerum ipſi F G, æqualem. Eſt autem c 4. ſexti.

vicies ſumpta eidem FG, æqualis. Igitur 128. paſſus, vna cum a F, octies ſumpta æquiualent ipſi a F, vicies ſumptæ. Si ergo vtrobique auferatur a F, octies ſumpta, reliqui erunt 128. paſſus æquales ipſi a F, duodecies ſumptæ. Quare ſi 128. diuiduntur per 12. prodibunt 10 $\frac{2}{3}$. paſſus pro recta, a F, cum hic Quotiens in 12. ductus producat 128. Cum igitur a F, contineatur vicies in FG: ſi a F, 10 $\frac{2}{3}$. paſſuum ducatur in 20. procreabitur altitudo FG, 213 $\frac{1}{3}$. paſſuum. Vides ergo minorem Quotientem 8. in differentiam ſtationum paſſuum 16. ductam eſſe, vt gignerentur 128. & hunc numerum diuiſum eſſe per 12. differentiam Quotientum, vt prodirent paſſus 10 $\frac{2}{3}$. pro recta a F: ac tandem hunc Quotientem 10 $\frac{2}{3}$. ductum eſſe in 20. Quotientem maiorem, vt produceretur altitudo FG, paſſuum 213 $\frac{1}{3}$. vt in regula præcepimus. Quam altitudinem etiam reperies per præcedentem viam, ſi nimirum fiat, vt 75. differentia vmbrarum rectarum, ad differentiam ſtationum, nimirum ad 16. paſſus. ita quadrati latus 1000. ad aliud. Nam 16. ducta in 1000. & productus numerus 16000. diuiſus per 75. facit Quotientem 213 $\frac{1}{3}$. veluti prius.



3. DENIQVE in remotiore ſtatione interſecetur vmbra verſa in E, & in propinquiore vmbra recta in H, vt in 3. figura problem. 3. Reducta vmbra verſa ad rectam, vt in Quadrati conſtructione Num. 7. principio huius lib. ſcripſimus: ſi fiat, vt IN, differentia vmbrarum rectarum ad A a, differentiam ſtationum, ita AB, latus Quadrati 1000. ad aliud. procreabitur altitudo FG, quemadmodum Num. 2. oſtendimus.

4. SI fortè in vna ſtatione tranſiret linea fiduciæ, aut filum perpendiculi per punctum C, aſſumendum eſſet in primo caſu latus CD, vmbræ verſæ in duobus autem aliis caſibus latus BC, vmbræ rectæ.

ALITER.

Sine reductione vmbræ verſæ ad rectam ita agendum erit. Numerus, qui fit ex vmbra verſa DE, in vmbram rectam bH, auferatur ex 1000000. quadrato lateris 1000. reſiduumque ſit P. Item ex vmbra verſa DE, in latus 1000. fiat Q.

a 4. ſexti. [a] Et quoniam ob triangulorum ſimilitudinem eſt, vt BN, ad BA, ita AF, ad FG: Et permutando, vt BN, ad AF, ita BA, ad FG. Sed vt BN, vmbra recta maior ad AF, diſtantiam, ita eſt IN, differentia vmbrarum rectarum ad A a, differentiam ſtationum, vt Num. 5. in problem. 3. dictum eſt. Igitur erit quoque IN, ad Aa, ſicuti AB, ad FG: Et permutando IN, ad AB, vt Aa, ad FG. Dico iam ita eſſe

b 4. ſexti. P, ad Q, vt IN, ad AB. [b] Quoniam enim eſt, vt DE, ad AD, ita AB, vel AD, ad

c 17. ſexti. BN: [c] erit rectangulum ſub DE, BN, æquale quadrato numero 1000000. lateris

d 1. ſecundi. AB, 1000. [d] Eſt autem rectangulum ſub DE, BN, æquale rectangulis ſub DE, BI, & ſub DE, IN. Igitur ſi productum ex vmbra verſa DE, in BI, hoc eſt, in vmbram rectam b H, dematur ex rectangulo ſub DE, BN, hoc eſt, ex quadrato 1000000. remanebit rectangulum ſub DE, IN. Ac propterea P, fiet ex DE, in IN. Fit autem Q, ex eadem vmbra verſa DE, in latus AB, 1000. Igitur cum DE,

e 17. ſexti. multiplicans IN, & AB; producat P, Q, [e] erit P, ad Q, ſicut IN, ad AB; hoc eſt, ſicut Aa, ad FG. Quocirca ſi fiat.

Vt P, numerus, qui relinquitur, ſi productus ex vmbra verſa D E, in vmbrã rectam b H, ex quadrato 1000000. detrahatur.	*ad Q. numerum, qui fit ex vmbra verſa D E, in latus A B, 1000.*	*Ita Aa, differentia ſtationum.*	*ad F G, altitudinem,*

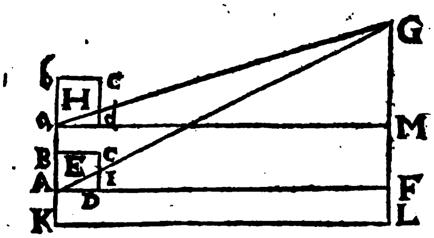
producetur altitudo F G, nota in partibus differentię ſtationum A a: cui ſi adiicietur ſtatura menſoris F L, tota altitudo GL, nota efficietur.

In ſcholio porro ſequentis problematis idem hoc problema per vnicam ſtationem abſoluemus.

ALTITVDINEM eandem, quando diſtantia ab oculo menſoris neque data eſt, neque inuenta, neque è directo altitudinis duæ ſtationes fieri poſſunt, per duas ſtationes in aliqua haſta erecta factas, indagare per Quadratum.

PROBLEMA VII.

1. Cvm in plano duæ ſtationes fieri commodè nequeunt, erigatur haſta aliqua K b, ad Horizontem recta, niſi fortè adſit aliquod ædificium erectum, ibique fiant duæ ſtationes in A, & a, vt in problemate 4. Cadat autem primum dioptra, vel filum perpendiculi in vtraque ſtatione in vmbram verſam, vt in 1. figura problematis 4. quę hic repetita eſt.



[a] Et quoniã propter triangulorũ ſimilitudinẽ eſt, vt A D, ad D E, ita A F, ad F G; erit permutando vt A D, ad A F, ita D E, ad F G. Eademque ratione erit vt, a d, ad a M, ita d H, ad M G. Cum ergo eadem ſit proportio A D, ad A F, quæ a d, ad a M, propter ęqualitatem rectarum A D, a d, & A F, a M; [b] erit vt tota D E, ad totam F G, ita d H, hoc eſt, ita D I, ablata ad ablatam M G. [c] Igitur erit quoque reliqua I E, ad reliquam F M, hoc eſt, ad D d, vt tota D E, ad totam F G. Quocirca ſi fiat,

[a] *4. ſexti.* [b] *11. quinti.* [c] *19. quinti.*

Vt I E, differentia vmbrarum verſarum	*ad D d, differentiam ſtationum:*	*Ita D E, maior vmbra verſa*	*ad F G, altitudinem.*

euadet cognita altitudo F G, in partibus differentiæ ſtationum D d. Appoſita autem ſtatura menſoris F L, tota altitudo G L, quæſita cognita erit.

2. Abscindat deinde dioptra in vtraque ſtatione vmbram rectam, vt in 2. figura problematis 4. quæ poſita eſt in paginá 103. [d] Et quia propter triangulorum ſimilitudinem eſt vt b H, ad a b, ita a M, ad M G: [e] erit rectangulum ſub b H, M G, æquale rectangulo ſub a b, a M. Eadem ratione erit rectangulum ſub B E, F G, æquale rectangulo ſub A B, A F, [f] quod eadem quoque ſit proportio B E, ad A B, quæ A F, ad F G. Cum ergo rectangulum ſub a b, a M, rectangulo ſub A B, A F, æquale ſit, ob æqualitatem rectarum a b, A B, & a M, A F, erit etiam rectangulum ſub b H, M G, rectangulo ſub BE, F G, æquale,

[d] *4. ſexti.* [e] *16. ſexti.* [f] *4. ſexti.*

a 17. ſexti. b 19. ſexti.

[a] Quare erit vt tota BH, ad totam FG, ita BE, vel bO, ablata ad ablatam MG; [b] Ac propterea erit quoque reliqua O H, ad reliquam F M, ſiue ad A a, vt tota b H, ad totam FG. Quamobrem ſi fiat,

Vt O H, differentia vmbrarum rectarum	*ad A a, differentiam ſtationum:*	*Ita b H, maior vmbra recta*	*ad F G, altitudinem,*

altitudo F G, prodibit cognita, quę cum ſtatura menſoris F L, totam altitudinem LG, efficiet notam. Vbi vides eundem prorſus eſſe operandi modum in vmbris rectis, & in verſis.

3. POSTREMO in ſtatione inferiori reſecetur vmbra recta BE, & verſa d H, in ſuperiori ſtatione, vt in 3. figura problematis 4. quæ poſita eſt in pagina 105. Reducta ergo vmbra recta ad verſam, vt ad initium huius libri in conſtructione Quadrati Num. 7. declarauimus: ſi fiat, vt IN, differentia vmbrarum verſarum ad A a, differentiã ſtationum, ita DN, vmbra verſa maior ad aliud, procreabitur F G, altitudo in partibus differentiæ ſtationum A a, quemadmodum Num. 1. demonſtrauimus. Quod ſi malueris reducere vmbram verſam ad rectam, eandem altitudinem reperies per duas vmbras rectas, ceu Num. 2. monſtrauimus.

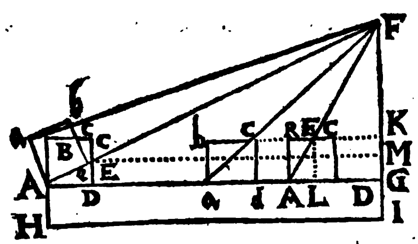
4. QVANDO fortaſſe in altera ſtationum linea fiduciæ tranſiret per punctum C, in arbitrio tuo erit, vel totum latus vmbræ verſæ, vel rectæ aſſumere.

SCHOLIVM.

1. EANDEM altitudinem, eiuſque diſtantiam ab oculo menſoris, vna cum hypotenuſa ab oculo ad faſtigium altitudinis extenſa, venari licebit ope quadrati ſtabilis per vnicam ſtationem, etiamſi ſolum faſtigium rei erectæ cernatur: adeò vt ſcholium hoc omnia præſtet, quæ in problemate 3. 4. 5. 6. & 7. per plures ſtationes inueſtigauimus, ac proinde diligenter perdiſcendum.

Quo pacto præcedentia 5. problemata, ope quadrati ſtabilis per vnicam ſtationem abſoluantur.

SIT enim altitudo metienda IF; ſtatura menſoris I G, vel H A. Paretur planum Horizonti æquidiſtans per A, tranſiens, in quo Quadratum firmari poſſit, aut collocari. Primum ergo inueſtiganda eſt hypotenuſa A F, hoc modo. Inclinetur quadratum, ita vt centrum dioptræ occupet ſuperiorem locum lateris a A, cuius inferius punctum ſtatuatur in A, oculo menſoris. Et totum quadratum tamdiu eleuetur, aut deprimatur, donec latus A e, recta in cacumen F, vergat. Manente ſic Quadrato, menſor oculum transferat ad a, & per dioptram inſpiciat cacumen F, notenturque partes vmbræ verſæ abſciſſæ b c. [c] Deinde fiat,



Vt c b, vmbra verſa	*ad latus a b, 1000.*	*Ita latus a A, notum in data menſura, quod nunc ponamus continere 3. pedes,*	*ad A F,*

Nam inuentus numerus dabit hypotenuſam A F, cognitam in partibus lateris a A. Verbi gratia, ſi c b, contineat 50. partes vmbræ verſę, & a A, tribus pedibus ſit æqualis: ſi fiat vt 50. ad 1000. ita 3. ad aliud, reperietur A F, complecti 60. pe-

60.pedes. Si verò a A, ponatur 1000. comperietur eadem AF, particularum 200000. qualium 1000. in a A, comprehenduntur.

2. POST hæc deprimatur Quadratum, ita vt latus AD, Horizonti æquidiſtet, centrumque dioptræ ſit in A. quo poſito, videbitur cacumen F, per inuentam hypotenuſam AF, quæ primum ſecet vmbram verſam CD, in E, vt in primo quadrato, inquiraturque portio dioptræ AE, in partibus laterum AD, DE, [a] quod fiet vel ex vtroque latere AD, DE, cognito: [b] Vel ex cognito per problema 1. ex vmbra DE, angulo DAE, ex latere DE, noto: [c] Vel denique ſi ex ſumma quadratorum ex AD, DE, deſcriptorum radix quadrata extrahatur. Inuenta portione AE, in partibus milleſimis lateris AD, ductaque EM, ipſi AG, parallela, [d] ſi fiat,

[a] 6. Triang. rectil.
[b] 5. Triang. rectil.
[c] 47. primi.
[d] 2. ſexti & componendo.

Vt AE, inuenta in partibus milleſimis lateris AD,	*ad AF, in iiſdem partibus inuentam,*	*Ita GM, in iiſdem partibus cognita, cum æqualis ſit ipſi DE,*	*ad GF,*

nota efficietur GF, in partibus milleſimis lateris AD. Quod ſi rurſus fiat,

Vt latus AD, 1000.	*ad 3. pedes, quos ponimus in AD, contineri:*	*Ita GF, in milleſimis partibus lateris AD, inuenta,*	*ad GF,*

reperietur eadem GF, in menſura pedum. Et ſi adiiciatur, ſtatura menſoris GI, nota in eadem menſura, cognita fiet tota altitudo IF, in menſura pedum.

Vbi vides, nos eadem opera inueniſſe quoque diſtantiam AF, ab oculo A, ad cacumen vſque F.

3. SECET deinde hypotenuſa aF, inuenta (inuenietur autem vt Num. 7. dictum eſt) vtrumque latus vmbræ in C, vt in 2. quadrato. [e] Si igitur fiat,

[e] 2. ſexti. & componendo.

Vt portio dioptra ac, inuenta in partibus ad, lateris, 1000. vt Num. 2. diximus.	*ad aF, hypotenuſam in iiſdem partibus inuentam:*	*Ita GK, 1000.*	*ad GF,*

prodibit GF, nota in partibus milleſimis lateris dc: Et ſi rurſus fiat,

Vt latus dc, 1000.	*ad 3. pedes, quibus æquale ponimus latus dc,*	*Ita GK, 1000. cum æquale ſit ipſi dc,*	*ad GF,*

inuenta erit eadem GF, in menſura pedum. Et ſi addatur ſtatura menſoris GI, nota in eadem menſura, cognoſcetur tota altitudo IF, in menſura pedum.

4. TERTIO ſecet hypotenuſa inuenta AF, (quæ inuenietur vt Num. 7. docuimus) vmbram rectam in E, vt in tertio quadrato. [f] Si ergo fiat,

[f] 2. ſexti. & componendo.

Vt portio dioptra AE, inuenta, vt Num. 2. docuimus.	*ad AF, hypotenuſam inuentam,*	*Ita GK, 1000.*	*ad GF,*

exibit GF, nota in partibus milleſimis lateris DC. Et ſi iterum fiat,

Vt latus DC, 1000.	*ad 3. pedes in DC, contentos*	*Ita GK, 1000. cum ſit æqualis ipſi DC,*	*ad GF,*

cognita erit eadem GF, in menſura pedum, &c.

ATQVE hac eadem ratione omnes aliæ lineæ inuentæ in partibus milleſimis lateris Quadrati reuocabuntur ad quamcunque aliam menſuram, vt ad pedes, vel cubitos, &c.

ª 2. ſexti. & componendo.

5. DISTANTIA autem AG, vel HI, cognita euadet, ª ſi fiat,

Vt portio dioptra A E, in primo Quadrato, vel ac, in 2. Quadrato,	*ad hypotenuſam AF, vel aF,*	*Ita latus AD, in 1. Quadrato vel ad, in 2. Quadrato*	*ad AG, in 1. quadrato vel ad a G, in ſecundo.*

VEL

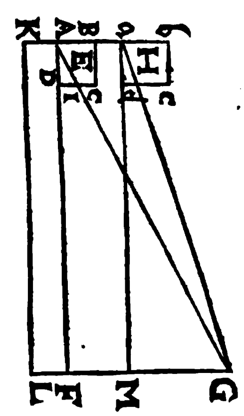
Ducta EL, lateri AB, parallela in tertio quadrato,

Vt A E, portio dioptra,	*ad hypotenuſam AF,*	*Ita vmbra recta B E, ipſi AL, æqualis,*	*ad AG.*

VIDES igitur, in hac ratione dimetiendę altitudinis, ac diſtantię, etiam inaceſsibilis, opus non eſſe duabus ſtationibus ſiue in plano, ſiue in haſta aliqua erecta faciendis; Quod non parum moleſtiæ plerunque afferre ſolet: ſed ſolum inueſtigandam eſſe prius hypotenuſam per quadratum ſtabile inclinatum: Deinde portionem dioptræ inter eius centrum, & latus Quadrati, quod interſecat: quæ inuentio difficilis non eſt, vt patuit, cum menſor nunquam locum mutare cogatur.

ALTITVDINEM turris aut montis, ex eius ſummitate per Quadratum dimetiri, quando in plano ſummitatis Horizonti æquidiſtante duæ ſtationes fieri poſſunt, & ſignum aliquod in Horizonte cernitur.

PROBLEMA VIII.



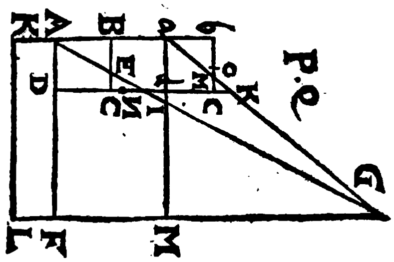
1. SIT altitudo DFMd, in cuius ſummitate, nimirum in plano Dd, duę ſtationes fieri poſsint, ex quibus ſignum aliquod in Horizonte, videlicet G, videri poſsit. (Nos ne nouam cogeremur deſcribere figuram, repetiuimus primam problematis 4. inuerſo tamen ordine poſitam, ita vt literæ rectum ſitum non habeant; Et quamuis ſignum G, non cernatur ex A, propter planum Dd, eadem tamen erit ratio, ſi aliud ſignum longius diſtans eligatur, quod ex A, inſpici poſsit.) Collocetur inſtrumentum in vtraque ſtatione, vt latus vmbrę rectæ DC, vergat deorſum. Et primum vtraque vmbra recta ſecetur in E, H, (In hac enim inuerſione latus DC, vmbræ rectę, & BC, verſę deputatur, vt in conſtructione Quadrati Num. 4. initio huius libri declaratum eſt,) atque vmbræ dH, in propinquiore ſtatione, quæ ſemper minor eſt, æqualis abſcindatur DI. Itaque ſi fiat,

Vt I E, differentia vmbrarum rectarum	*ad Aa, differentiam ſtationum*	*Ita A D, latus quadrati 1000.*	*ad A F,*

cognita erit recta AF, ex qua ſi dematur latus quadrati AD, notum in partibus diffe-

differentiæ ſtationum, nota relinquetur altitudo D F, vel d M, quæſita. Inueniri autem hac ratione rectam AF, demonſtratum eſt in problemate 4. Num. 1.

2. QVOD ſi in vtraque ſtatione latus vmbræ verſæ ſecetur in F, H, vt in 2. figura problematis 4. hic repetita, inuerſa tamen, habebimus tres vias inueſtigandi altitudinem A F, ex qua ſi tollatur latus quadrati A D, manifeſta relinquetur quæſita altitudo DF, vel d M. Nam reducta vtraque vmbra verſa ad rectam, ſi fiat,



Vt I N, differentia vmbrarum rectarum,	*ad A a, differentiam ſtationum:*	*Ita A D, latus quadrati 1000.*	*ad A F,*

Vel ſine reductione.

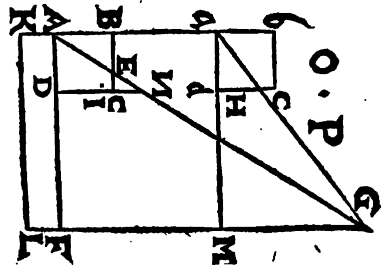
Vt P, numerus, qui fit ex O H, differentia vmbrarum verſarum in a b, latus quadrati,	*ad numerum, qui fit ex vmbra verſa b H, maiore in minorem B E,*	*Ita A a, differentia ſtationum*	*ad A F,*

Vel

Vt A N, differentia Quotientum, qui fiunt, ſi latus quadrati per vtramque vmbram verſam diuidatur,	*ad A a, differentiam ſtationum notam in menſura aliqua*	*Ita A F, vt 1.*	*ad A F,*

procreabitur ſemper altitudo AF, ab oculo inſpectoris A, numerata: quemadmodum in problemate 4. Num. 2. demonſtratum eſt.

3. SI denique in vna ſtatione ſecetur latus vmbræ verſæ in E, & in altera latus vmbræ rectæ in H, vt in 3. figura problematis 4. hic inuerſo ordine repetita: ſi vt in eodem problemate 4. Num. 3. demonſtrauimus, reducatur vmbra verſa ad rectam, & fiat,



Vt NI, differentia vmbrarum rectarum.	*ad Aa, differentiam ſtationum:*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AF,*

Vel ſine reductione.

Vt O numerus, qui relinquitur, ſi numerus genitus ex vmbra verſa in rectam ex quadrato lateris dematur,	*ad numerum P, qui ex vmbra verſa BE, in latus AD, producitur:*	*Ita Aa, differẽtia ſtationum.*	*ad AF,*

producetur AF, altitudò in partibus differentiæ ſtationum Aa, &c.

4. IAM verò ſi diſtantia FG, à turri ad ſignum G, in Horizonte viſum nota fuerit, facilius per vnicam ſtationem in A, factam altitudinem coniiciemus. Nam
a 4. ſexti. ſi vmbra recta DC, ſecetur in E, vt in 1. figura: a Fiat autem.

Vt vmbra recta DE,	*ad latus AD:*	*Ita diſtantia cognita FG,*	*ad AF,*

b 4. ſexti. Vel quando vmbra verſa BC, ſecetur in E, vt in 2. figura; b ſi fiat.

Vt latus AB,	*ad vmbram verſam BE,*	*Ita diſtantia cognita FG,*	*ad AF.*

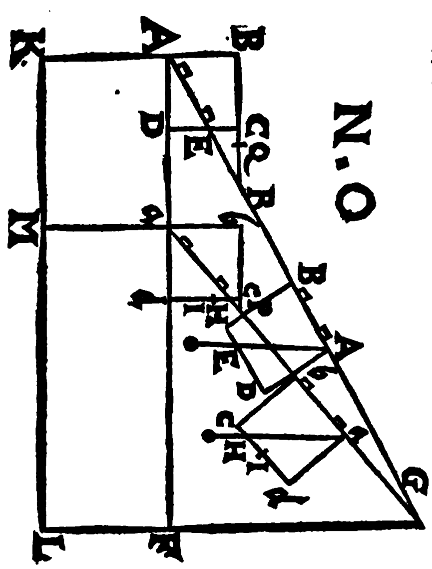
efficietur nota recta AF, in partibus diſtantiæ FG, à qua ſi dematur latus quadrati AD, notum in eiſdem partibus diſtantiæ FG, nota relinquetur altitudo DF.

c 6. primi. QVOD ſi dioptra per C, tranſeat, c erit diſtantia FG, altitudini AF, æqualis. Dempto ergo latere quadrati AD, altitudo turris DF, cognita fiet.

Hoc idem problema in ſcholio ſequentis problematis abſoluemus per vnicam ſtationem.

ALTITVDINEM turris vel montis ex eius ſummitate per duas ſtationes in haſta aliqua erecta factas, inueſtigare per quadratum, quando ſignum aliquod in Horizonte videri poteſt.

PROBLEMA IX.



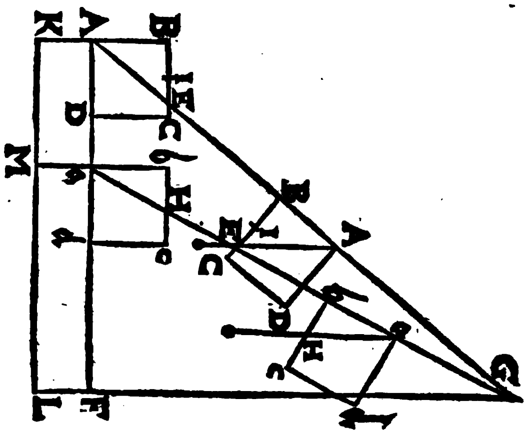
1. QVANDO in ſummitate non eſt planities tanta, vt in ea duæ ſtationes poſsint fieri, erigatur haſta aliqua in qua duæ ſtationes fiant. Vt ſi altitudo inueſtiganda ſit d F, erigatur haſta d A, & centro dioptræ applicato ad haſtam primum in a, deinde in A, inſpiciatur ſignum aliquod G, in Horizonte per radios a G, A G, ſeceturque primum vtraque vmbra recta in HE, vt in prima figura problematis 3. quam hic inuerſo ordine repetiuimus. Nam vt in præcedenti problemate diximus, in hac inuerſione D C, fit latus vmbræ rectæ, & B C, verſæ. Si ergo, vt in problemate 1. demonſtrauimus Num. 1. fiat,

Vt HI,

Vt H I, differentia vmbrarum rectarum, | *ad A a, differentiam ſtationum;* | *Ita d H, vmbra recta maior* | *ad AF,*

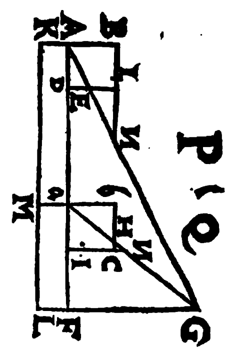
nota fiet tota recta AF, ex qua ſi dematur portio haſtæ A d, quod duo quadrata occupant, cognita fiet reliqua altitudo d F.

2. Si vero in vtraque ſtatione vmbra verſa à radijs interſecetur, vt in 2. figura problematis 3. hic repetita ordine inuerſo, & fiat,



vt I E, differentia vmbrarum verſarum, | *ad A a, differentiam ſtationum:* | *Ita B E, vmbra verſa maior* | *ad AF,*

prodibit recta A F, ex qua ſi detrahatur portio haſtæ A d, à principio primi quadrati ad finem ſecundi, reliqua d F, altitudo fiet quoque nota: veluti in problemate 3. Num. 3. oſtendimus.



Ad ſiniſtrum angulum inferiorem, inferioris quadrati, pone d

3. At ſi in vna ſtatione ſecetur latus vmbræ rectæ, & in altera latus vmbræ verſæ, vt in 3. figura problematis 3. quæ inuerſa huc translata eſt, reducenda erit vel recta vmbra ad verſam, vel verſa ad rectam. Nam vt in problemate 3. Num. 5. oſtendimus, ſi fiat,

Vt I N, differentia vmbrarum ſiue verſarum, ſiue rectarum, | *ad A a, differentiam ſtationum:* | *Ita B N, maior vmbra verſa, vel d N, maior vmbra recta,* | *ad AF,*

efficietur nota recta A F, ex qua ſi dematur portio haſtæ A d, nota relinquetur altitudo d F.

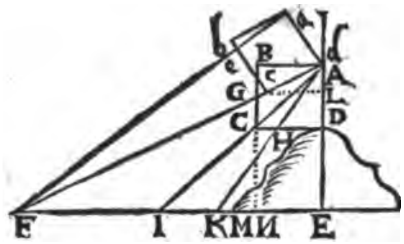
4. Qvod ſi turris eſſet A F, & ex duabus feneſtris d, D, obſeruatio fieret, deprehenderetur eodem modo altitudo turris A F, vt patet.

SCHOLIVM.

1. Qvod præcedentia duo problemata per duas ſtationes ſiue in plano ſummitatis turris, vel montis, ſiue in haſta aliqua erecta factas docuerunt, poſſu-

mus per vnicam ſtationem quoque efficere, & ſimul diſtantiam à perpendiculo montis, vel à turre vſque ad ſignum in Horizonte propoſitum inuenire.

Altitudinem montis, vel turris ex eius vertice per vnicam ſtationem, vna cũ diſtãtia à turre, vel perpendiculo montis ad ſignum in Horizonte propoſitum metiri.



Sit enim montis alicuius, aut turris altitudo D E, & ſignum in Horizonte viſum F. Erigatur ex D, haſta aliqua D A, & ſumpta D A, æquali lateri quadrati ſtabilis, accommodetur quadratum a b c d, in A, ita vt centrum dioptræ a, ſit ſuperius, & latus inferius recta ad ſignum F, vergat. Poſito deinde oculo in a, dirigatur dioptra verſus F, notenturque partes in vmbra verſa b e. Nam ſi fiat,

Vt b e, vmbra verſa	*ad latus b a, 1000.*	*Ita latus a d, 1000.*	*ad A F,*

reperietur hypotenuſa A F, in partibus lateris a d. Accommodetur rurſus quadratum A B C D, vt centrum dioptræ A, ſit ſuperius, & latus C D, Horizonti æquidiſtet, hoc eſt, latus AD, haſtæ erectæ congruat. Quo poſito, videbitur ſignũ F, per inuentam hypotenuſam A F, quæ primum ſecet latus vmbræ verſæ B C, in G; inquiraturque portio dioptræ AG, vt in ſchol. problem. 7. Num. 2. docuimus. [a] Nam ſi fiat,

[a] 4. ſexti. & componendo.

Vt portio dioptræ A G, inuenta	*ad inuentam hypotenuſam A F,*	*Ita AL, vmbra verſa BG, æqualis (ducta GL, parallela ipſi EF,)*	*ad AE,*

comperta erit AE, in partibus hypotenuſæ AF. Et ſi dematur latus quadrati AD, in ijſdem partibus notum, reliqua fiet D E, altitudo montis, aut turris. Quòd ſi rurſus fiat,

Vt portio dioptræ AG, inuenta	*ad inuentam hypotenuſam AF,*	*Ita EM, (producta BC, vſque ad M,) lateri CD, æqualis,*	*ad EF,*

exibit nota diſtantia EF, in ijſdem partibus hypotenuſæ A F.

Vbi vides eadem opera inueniri diſtantiam ab oculo A, vſque ad ſignum F, in Horizonte.

Non erit autem difficile ipſam DE, vel EF, ſi inuenta fuerit in partibus milleſimis lateris AD, vel CD, in alia menſura, vt in pedibus, efficere notam; ſi fiat,

Vt AD, latus 1000.	*ad AD, notam in pedibus, verbi gratia in 3. vel in ſeſquiſſe vnius cubiti:*	*Ita DE, vel EF, inuenta in milleſimis partibus,*	*ad aliud*

Atque hac eadem ratione omnes aliæ lineæ inuentæ in milleſimis partibus lateris quadrati, reducentur ad aliam menſuram vel pedum, vel cubitorum, &c. Quod etiam in ſcholio problem. 7. monuimus.

2. Secet deinde hypotenuſa AI, (quæ reperietur vt AF, inuenta eſt) quadratum

dratum in C: inueſtigeturque portio dioptræ AC, vt in ſchol. problem. 7. Num. 2. tradidimus. [a] Deinde fiat, [a] *2. ſexti. & componendo.*

Vt portio dioptræ AC, inuenta	*ad inuentam hypotenuſam AI,*	*Ita AD, latus 1000.*	*ad AE,*

Nam numerus productus dabit AE, in partibus hypotenuſæ AI. Atque totidem partes complectetur diſtantia EI; [b] quod AE, EI, æquales ſint, ob angulos ſemirectos EAI, EIA, æquales. [b] *6. primi.*

3. POSTREMO hypotenuſa AK, inuenta eo modo, quo AF, cognita eſt, ſecet latus CD, vmbræ rectæ in H, reperiaturque portio dioptræ AH, vt in ſchol. problem. 7. Num. 2. docuimus. [c] Nam ſi fiat. [c] *2. ſexti. & componendo.*

Vt portio dioptræ AH, inuenta	*ad inuentam hypotenuſam AK:*	*Ita AD, latus quadrati*	*ad AE,*

cognoſcetur AE, in partibus hypotenuſæ AK, &c. Et ſi rurſus fiat, ducta prius HN, ipſi AE, parallela,

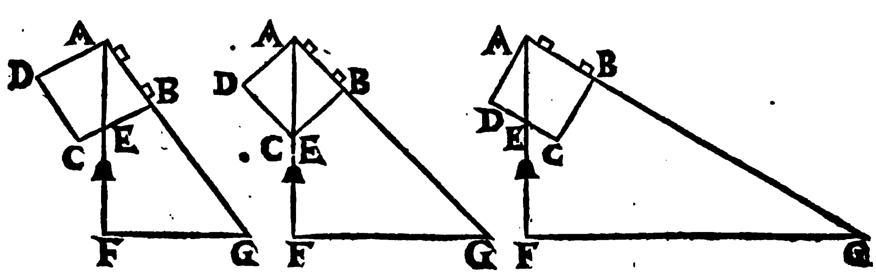
Vt portio dioptræ AH, inuenta	*Ad inuentam hypotenuſam AK,*	*Ita EN, vmbra recta DH, æqualis*	*ad EK,*

nota quoque reddetur diſtantia EK, in iiſdem partibus hypotenuſæ AK, &c. Quod ſi ex vertice D, appareret radix montis, inueniretur eodem modo diſtantia à radice vſque ad E, quæ ablata ex diſtantia FE, inuenta notam quoque relinquet diſtantiam ab F, vſque ad radicem montis, quæ nonnunquam poſſet deſiderari.

EX ſummitate turris, vel aliqua eius feneſtra, diſtantiam à baſe turris ad ſignum propoſitum in Horizonte per quadratum cognoſcere.

PROBLEMA X.

1. SIT turris aliqua AF, & diſtantia metienda FG. Si igitur altitudo turris cognita eſt, aut eius portio inter feneſtram A, & baſem F; inſpiciatur ſignum G, per pinnacidia quadrati penduli. Et ſi quidem filum perpendiculi interſecet latus vmbræ rectæ in E, vel per punctum C, tranſeat, Fiat autem



Vt latus AB, partium 1000.	*ad vmbram rectam BE,*	*Ita AF, altitudo turris nota*	*ad FG.*

cognita

cognita erit diſtantia F G, quæſita in partibus turris notæ.

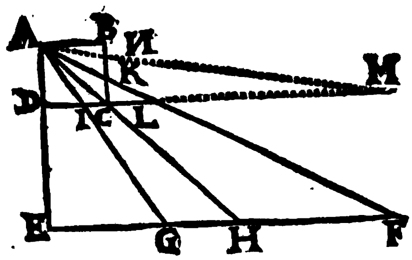
Si autem vmbra verſa ſecetur in E, & fiat,

Vt vmbra verſa D E,	*ad latus D A, partium 1000.*	*Ita A F, altitudo turris cognita*	*ad F G,*

efficietur quoque nota eadem diſtantia F G, in partibus turris cognitæ.

2. Per quadratum ſtabile eandem quoque diſtantiam adipiſceris. Sit enim rurſus turris quæpiam D E, & diſtantia metienda E G, vel E H, vel E F. Si igitur dioptra ſecet latus vmbræ rectæ in I. Et fiat,

Vt latus quadrati AD, 1000.	*ad vmbram rectam D I:*	*Ita altitudo A E, ex turre & latere quadrati A D, conflata.*	*ad E G,*



prodibit diſtantia quæſita E G.

Si autem dioptra per C. tranſeat, erit diſtantia E H, altitudini A E, notæ æqualis.

Si denique vmbra verſa interſecetur in K; fiat autem,

Vt vmbra verſa BK,	*ad latus quadrati 1000.*	*Ita altitudo nota A E,*	*ad E F,*

inuenietur diſtantia EF, in partibus altitudinis A E,

Hæc enim omnia in 2. problem. Num. 1. & 2. demonſtrata ſunt.

3. Qvod ſi altitudo turris cognita non ſit, inueſtiganda ea primum erit per problema 8. vel 9. vel potius per ſcholium problem. 9. aut certe, ſi commode fieri poſsit, per chordam aliquam cum appenſo perpendiculo demiſſam exploranda. Deinde procedendum erit, vt Num 1. & 2. dictum eſt.

Vervm ſine cognitione turris idem aſſequemur ea ratione, qua in problem. 6. vel 7. altitudinem propoſitam indagauimus, etiamſi diſtantia vſque ad altitudinem ſit ignota. Nam ſi in 6. problemate turris ſit d f, diſtantia autem metienda F G, efficiemus illud, ſi in haſta aliqua erecta d A, fiant duæ ſtationes oculi, in a A. Solum quod ibi dictum eſt de vmbra verſa, hic de recta intelligatur, & contra.

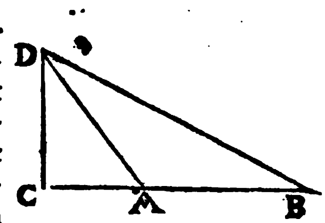
Pari ratione, ſi in 7. problemate turris ſit d F, & diſtantia metienda F G, inueniemus eam, ſi in plano ſummitatis turris fiant duæ ſtationes oculi in A, a. Solum quod ibi dicitur de vmbra verſa, hic etiam de recta intelligatur. Nam ſi figuræ problem. 6. & 7. hoc eſt, figuræ problem. 3. & 4. inuertantur, vt altitudines fiant A F, A F, latus quadrati D C, ad vmbram rectam, & B C, ad verſam pertinebit, vt initio huius libri in conſtructione quadrati Num. 4. explicauimus.

Sed hanc diſtantiam longè facilius in ſcholio præcedentis problematis inuenimus per vnicam ſtationem, vt patuit in diſtantia EF, &c.

EX

EX ALTITVDINIS alicuius faſtigio, etiamſi altitudo ſit menſoris ſtatura, diſtantiam inter duo ſigna in plano, cui altitudo inſiſtit, ſi ea diſtantia è directo menſoris iaceat, & vtrumque eius extremum cerni poſſit, per quadratum comprehendere.

PROBLEMA XI.

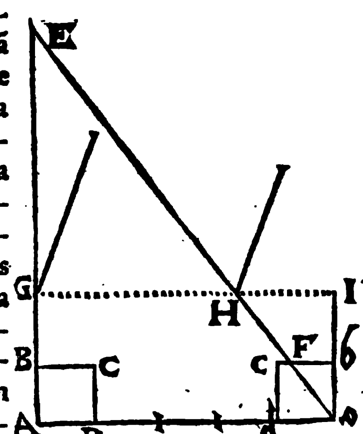


1. SIT diſtantia metienda AB, è directo altitudinis C D, in qua oculus menſoris exiſtat in D, faſtigio. Per problema antecedens inueſtigetur ex vertice D, tam diſtantia CB, quam CA. Minor enim hæc ex illa maiore detracta notam relinquet diſtantiam A B, inter ſigna A, & B, in partibus altitudinis C D, in quibus videlicet diſtantiæ etiam CB, CA, inuentæ ſunt.

2. SI altitudo CD, ſit ſtatura menſoris, reperietur eodem modo diſtantia AB, ſi oculus menſoris in D, vtrumque extremum A, B, cernere poſsit, vt liquet.

LONGITVDINEM in Horizonte extenſam metiri per Quadratũ, quando menſor in vno eius extremo exiſtens alterum extremum videre non poteſt, propter tumorem aliquem interiectum, neque altitudo in promptu eſt, ſed ſolum ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularem recedere poteſt ad locum, è quo alterum extremũ appareat.

PROBLEMA XII.



1. SIT longitudo metienda AE, cuius extremum E, ex A, menſor videre non poſsit, neq; adſit altitudo, ſed tamen ſi ad dextram, vel ſiniſtrã recedat per lineam perpendicularem A a, vſque ad a, illud videre poſsit. Quadratum ſtabile ita erigatur, vt eius planum longitudini A E, congruat. Debet namque conſtare, quænam recta ad extrema A, E, pertineat, hoc eſt, rectam conſtituat, cum data longitudine. Deinde collocato quadrato in Horizontis plano, ita vt latus AB, a longitudine non recedat, extendatur recta per latus A D, vſq; ad a, vnde extremum, E, appareat, ſitque ſpatium A a, per aliquam menſuram notum. Erectum autem in a, quadratum circumducatur, donec per eius planum extremum E, cernatur. Poſt hæc idem quadratum in Horizonte collocetur, latuſque a d, perpendiculari A a, congruat: Et dioptra

circumuoluatur, donec eius linea fiduciæ rectæ a H, per quam extremum E, inſpectum fuit, reſpondeat, noteturque vmbra verſa b F, abſciſſa. Eruntque triangula a b F, a A E, æquiangula, propter rectos angulos b, A, & alternos b a F, A E a, æquales.[a] Quamobrem ſi fiat,

[a] *4. ſexti.*

Vt vmbra verſa b F,	*ad quadrati latus a b, 1000.*	*ita ſpatium A a, notum,*	*ad A e,*

cognita erit longitudo AE, in partibus ſpatij A a.

Si forte dioptra latus d c, vmbræ rectæ interſecet, (quod raro continget, cũ plerunque AE, maior, ſit, quam A a,) [b] erit tunc.

[b] *4. ſexti.*

Vt latus a d, 1000.	*ad vmbram rectam abſciſſam:*	*Ita ſpatium A a,*	*ad longitudinem,*

vt perſpicuum eſt, ſi ducatur ex a, recta ſecans latus d c, &c.

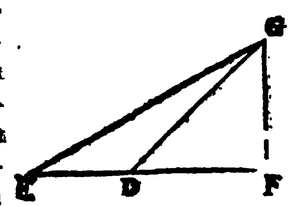
Si denique dioptra fortaſsis per c, tranſiret,[c] eſſet ſpatium A a, longitudini quæſitæ æquale; propterea quod tunc fieret angulus ſemirectus d a c, ideoque & recta a c, ſi duceretur, faceret cum AE, angulum ſemirectum, atque adeo angulo d a c, æqualem.

[c] *6. primi.*

2. Eadem diſtantia longitudoue AE, cognoſcetur, ſi tam in G, quam in H, baculus, ſeu arundo ad angulos rectos figatur, ita vt ex A, a, radij per arundinem incedentes ad E, ferantur, ſpatiumque A a, cognitum ſit: vt in 2. probl. Num. 6. traditum eſt.

LONGITVDINEM in Horizonte è directo menſoris iacentem cognoſcere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neque è loco menſoris eam dimetiri, neque vlla adſit altitudo, dummodo ad dextram vel ſiniſtram per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire poſſit menſor, ex quo vtrumque extremum appareat.

PROBLEMA XIII.

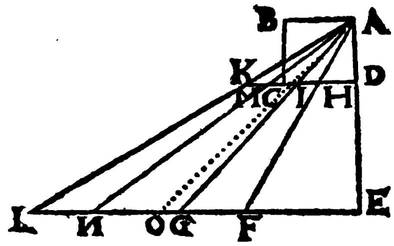


1. Longitvdo metienda ſit ED, è directo menſoris in F, exiſtentis, ita vt neque ad eam accedere liceat, neque eam è loco F, metiri, neque vlla adſit altitudo: Sed ſolum per lineam perpendicularem F G, ad locum G, vnde vtrumque extremum D, E, videatur, poſsit accedere. Per problema præcedens inquiratur ex G, tam longitudo F E, quam F D. Hæc enim ex illa detracta notam relinquet propoſitam longitudinem DE.

ALTITVDINEM montis, vel turris ex eius faſtigio, quando è directo menſoris interuallum aliquod inter duo ſigna, vel etiam inter ſignum quodpiam ac turrim cognitum eſt, per quadratum conijcere.

PROBLEMA XIV.

1. Sɪᴛ mons, aut turris DE, ſitque primum è directo menſoris in faſtigio D, exiſtentis interuallum F G, notum. Accommodetur quadratum ſtabile in ſummitate D, ita vt latus A D, perpendiculare ſit ad Horizontem, & C D, Horizonti parallelum. Inſpecto igitur per dioptram vtroq; termino F, G, ſecetur vmbra recta in H, I. [a] Quoniam igitur eſt, vt I H, ad H D, ita G F, ad F E: [b] Item ob triangulorum ſimilitudinem, vt HD, ad DA, ita FE, ad EA; erit ex æquo, vt IH, ad DA, ita GF, ad E A. Igitur ſi fiat,



[a] *ſchol. 4. ſexti.*
[b] *4. ſexti.*

Vt I H, differentia vmbrarum rectarum	*ad D A, latus quadrati*	*Ita interuallum GF, cognitum*	*ad E A*

exibit nota recta E A: Et ſi dematur latus quadrati DA, (quod fieri debet notum in partibus interualli G F,) reliqua fiet nota altitudo D E, in partibus interualli GF.

2. Sɪᴛ tota deinde diſtantia EG, nota. Inſpiciendum ergo ſolum eſt extremum G. [c] Nam ſi fiat,

[c] *4. ſexti.*

Vt I D, vmbra recta	*ad D A, latus quadrati*	*Ita diſtantia nota G E,*	*ad E A,*

efficietur rurſus nota recta EA, &c.

3. Qᴠᴀɴᴅᴏ vmbra verſa B C, interſecatur, vt ſi ſpatium notum ſit LN, reducenda eſt vtraque vmbra verſa ad rectas D K, D M. Nam rurſus erit, vt K M, differentia vmbrarum rectarum ad latus D A, ita ſpatium notum L N, ad E A.

Sɪᴄ etiam quando vnus radius vmbram rectam, & alter verſam interſecat, vt in ſpatio LG, contingit, reuocanda erit vmbra verſa ad rectam DK, vt iterum ſit K I, differentia vmbrarum rectarum ad D A, latus, vt ſpatium notum L G, ad EA.

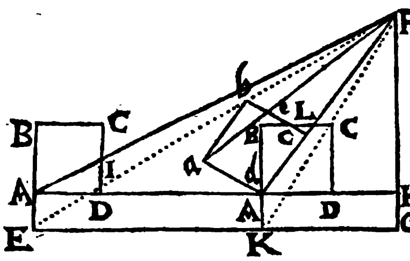
4. Sɪ denique radius per C, tranſiret, ſumendum eſſet totum latus CD, pro vmbra recta, at vmbra verſa, ſi qua eſſet, ad rectam reducenda.

DISTANTIAM ab oculo, vel pede menſoris (vbicunque exiſtat) ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum per quadratum exquirere.

PROBLEMA XV.

1. Exᴘʟᴏʀᴀɴᴅᴀ ſit diſtantia puncti F, in muro aliquo ſiue perpendiculari ad Horizontem, ſiue inclinato, vel etiam in tecto quopiam ab oculo A, vel à pede E, poſita ſtatura menſoris AE. Et ſit primum altius punctum F, quam oculus A. Concipiatur ex F, demiſſa perpendicularis FG, & ad hanc ducta ab oculo A, alia perpendicularis A H. Collocato ergo ita quadrato, vt latus A D, Horizonti æquidiſtet, inſpiciatur punctum F, radiuſque A F, vel dioptra auferat

vmbram verſam D I. Per problema 3. vel 4. vel potius per ſcholium problem.



7. inueſtigetur diſtantia AH, etiamſi punctum H, non appareat: diligenterque inquiratur, quot partes milleſimæ lateris A D, in ſegmento dioptræ A I, comprehendantur. quod multis modis, vt in ſchol. probl. 7. Num. 2. docuimus, exequemur hoc modo. Primum quoniam duo latera A D, DI, in rectangulo triangulo ADI, data ſunt, [a] ignorari non poterit baſis in partibus laterum. Deinde quia per probl. 1. ex vmbra D I, notus fit angulus DAI, [b] cognoſcetur rurſus baſis A I. Tertio [c] quia quadrata AD, DI, quadrato AI, æqualia ſunt; ſi ex aggregato eorũ radix quadrata eruatur, exhibebit ea radix baſem AI, notam. His peractis, [d] ſi fiat,

[a] *6. triang. rectil.*
[b] *5. triang. rectil.*
[c] *47. primi.*
[d] *4. ſexti.*

Vt latus AD, 1000	*ad portionem dioptræ A I, nuper inuentam:*	*ita diſtantia A H, nuper etiam inuenta*	*ad A F,*

cognita erit diſtantia A F, quæſita in partibus inuentæ diſtantiæ A H.

Distantia autem E F, à pede ad datũ punctum F, ita reperiemus. Quoniam in triangulo AEF, duo latera AF, AE, cognita ſunt, cum illud proxime ſit inuentum, & hoc ſtaturæ menſoris æquale ſit; comprehenduntq; angulum notum EAF, vt pote conflatum ex recto EAH, & DAI, qui per problema 1. inuentus eſt ex vmbra verſa D I: [e] notum efficietur latus quoque E F, quod quæritur.

[e] *12. trian. rectil.*

2. Qvod ſi vmbra recta ſecetur in L, vt in altero quadrato, vbi iterum menſoris ſtatura eſt A K: Inuenta portione dioptræ A L, in partibus milleſimis lateris quadrati ex angulo BAL, &c. necnon diſtantia AH, ex problem. 3. vel 4. vel ex ſcholio probl. 7. [f] Si fiat,

[f] *4. ſexti.*

Vt B L, vmbra recta	*ad L A, portionem dioptræ inuentam:*	*Ita diſtantia A H, inuenta*	*ad A F,*

prodibit rurſus nota diſtantia A F, in partibus diſtantiæ inuentæ A H.

Non aliter procedes ſi dioptra per C, tranſeat: [g] Cum tunc etiam ſit, vt A D, latus ad partem dioptræ A C, inuentam, vt prius, ita diſtantia inuenta A H, ad diſtantiam quæſitam A F.

[g] *4. ſexti.*

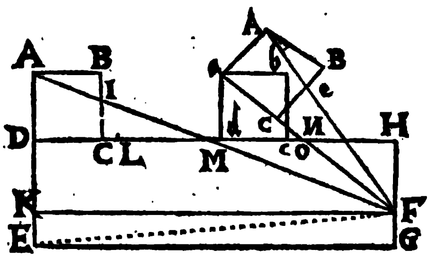
Distantia autem KF, à pede K, vſque ad F, [h] inuenietur, vt prius, ex duobus lateribus notis AF, A K, & angulo ab ipſis comprehenſo F A K; qui nimirum conflatur ex recto A, & D A L, complemento anguli B A L, quem per problema 1. cognitum efficit vmbra recta B L.

[h] *12. trian. rectil.*

3. Sed ſit iam punctum F, oculo A, depreſsius, & ſtatura menſoris ſit A E. Concipiatur ex F, duci F K, Horizonti parallela, vel ad A E, perpendicularis. Item per F, recta GH, ipſi AE, parallela. Accommodato autem quadrato, vt latus AD, rectum ſit ad Horizontem, & D C, Horizonti æquidiſtans, cogitetur DC, latus productum vſque ad H, punctum perpendicularis G H. Primum itaque reperiatur altitudo A K, per problema 8. vel 9. duabus ſtationibus factis in recta D H, vel in haſta D A, protracta, vel certe per ſcholium problem. 9. Quamuis enim ſtatura menſoris AE, cognita ſit, ignoratur tamẽ, quanta ſit eius

pars

pars AK, quam parallela FK, per imaginationem ducta abſcindit: ita vt omnino neceſſarium ſit altitudinem AK, inquirere. quod per 8. problema facilè exequemur, ſi in vtraque ſtatione vmbra verſa ſecetur in I,N, (quod plerunque hic continget (& vtraque abſciſſa BI, bN, ad rectas DM, dO, reuocetur: Nam ſi fiat,



Vt LM, differentia vmbrarum rectarum	*ad Dd, differentiam ſtationum:*	*ita AD, latus*	*ad AK,*

inuenta erit altitudo AK, oculo poſito in eius ſummitate A; vt in dicto problem. 8. Num. 2. diximus, &c. Quæ tamen altitudo AK, facilius per ſcholium problem. 9. reperiri poteſt.

ITAQVE quia vmbra BI, per 1. problema patefacit angulum BAI, hoc eſt, alternum AFK, ſibi æqualem, nec non & eius complementum FAK; erunt in triangulo rectangulo AKF, duo anguli acuti cogniti, vna cum latere AK, proximè inuento; [a] Itaque ſi fiat, a 5. Triang. rectil.

Vt ſinus totus	*ad latus AK, inuentum:*	*ita AF, ſecans anguli FAK,*	*ad AF,*

cognita fiet AF, in partibus lateris inuenti AK. Vel inuenta parte dioptræ AI, in partibus milleſimis lateris quadrati, vt ſupra dictum eſt prope initium huius problematis, [b] ſi fiat, b 4. ſexti.

Vt BI, vmbra verſa	*ad IA, partem dioptræ inuentæ:*	*ita KA, altitudo inuenta*	*ad AF,*

nota rurſus efficietur diſtantia AF, in partibus rectæ AK, inuentæ.

PORRO diſtantiam EF, à pede menſoris ad punctum F, [c] inueniemus, vt ſupra: propterea quod in triangulo AEF, duo latera AE, AF, nota ſunt, cum illud ſit ſtatura menſoris, hoc autem ſit proximè inuentum, angulumque continent notum FAK, vt paulò ante diximus c 12. triang. rectil.

4. NON aliter vtraque diſtantia cognoſcetur, ſi punctum F, in Horizonte ſit poſitum, qui Horizon per FK, intelligatur tranſire, ita vt ſtatura menſoris, vel aliqua alia altitudo nota, ſit AK. Nam cognita portione dioptrę AI, vt ſupra traditum eſt; [d] Si fiat, a 4. ſexti.

Vt BI, vmbra abſciſſa	*ad IA, portionem dioptræ inuentam:*	*ita AK, altitudo, vel ſtatura menſoris*	*ad AF,*

nota euadet diſtantia A F, in partibus ſtaturæ menſoris, vel altitudinis notæ AK.

a 4. ſexti. [a] Rurſus ſi fiat.

Vt B I, vmbra abſciſſa	*ad A B, latus quadrati 1000.*	*ita A K, altitudo, vel ſtatura menſoris*	*ad K F,*

cognita etiam fiet diſtantia K F, à pede menſoris vſque ad punctum F, in partibus eiuſdem ſtaturæ menſoris, vel altitudinis notæ A K. Vbi vides, vtramque diſtantiam cognoſci per vnicam ſtationem, quando punctum datum eſt in Horizonte.

5. SED vbicunque punctum F, exiſtat ſiue in Horizonte, ſiue in ſublimi, vel infra oculum, inueniemus nihilominus vtramque diſtantiam per vnicam ſtationem, hoc modo. Quando punctum F, eſt in ſublimi, vt in prima figura, accomdetur quadratum ita, vt dioptræ centrum a, ſit ſuperius, & latus d c, verſus punctum F, dirigatur. Inſpecto enim per dioptram puncto F, notetur vmbra
b 4. ſexti. verſa e b, [b] Et fiat,

Vt vmbra verſa e b,	*ad latus b a;*	*ita latus a d,*	*ad A F,*

Nam numerus productus notam faciet diſtantiam A F, in partibus lateris quadrati. Non aliter diſtantiam K F, à pede menſoris elicies, ſi eodem pacto quadratum ad punctum K, applicabis, vt conſtat.

QVANDO autem punctum F, depreſſius eſt oculo, vt in 2. figura, erigendus eſt baculus a d, minor, quam ſtatura menſoris, & in a, applicandum quadratum, vt rurſus centrum dioptræ A, ſit ſuperius, & latus a c, ad punctum F, vergat. Nam viſo puncto F, ex A, per dioptram, notataque vmbra verſa eB, ſi fiat,

Vt vmbra verſa e B,	*ad latus B A:*	*Ita latus A a,*	*ad a F,*

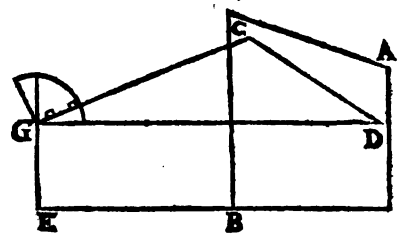
exibit diſtantia a F, nota in partibus lateris A a. Diſtantia porrò E F, à pede menſoris coniicietur, ſi quadratum in E, applicetur, vt in prima figura dictum eſt. Quando denique punctum F, eſt in Horizonte, inuenietur vtraque diſtantia, vt Num. 4. tradidimus.

INTERVALLVM inter duo ſigna, vel puncta in quolibet plano ſiue recto ad Horizontem, ſiue inclinato, per quadratum metiri.

PROBLEMA XVI.

1. IN quolibet plano eleuato AB, inquirendum ſit interuallum CD, ex plano BF. Poſito oculo in G, vt ſtatura menſoris ſit G E, inueſtigetur per præcedens problema, vtraque diſtantia G C, G D, in partibus ſtaturæ menſoris G E. Deinde applicato quadrato ſtabili ad oculum G, ita vt eius planum per puncta C, D, tranſeat, atque vnum eius latus ad punctum D, recta vergat, (quod fiet, ſi poſita linea fiduciæ dioptræ ſupra illud latus, punctum D, per foramina pinnaci-

nacidiorum conſpiciatur) vertatur dioptra, donec per eam punctum quoque C, appareat, & vmbra abſciſſa notetur, per quam ex problem. 1. anguli C G D, magnitudo addiſcatur. Quod ſi alterum latus quadrati vltra rectam G C, exiſtat, erit angulus CGD, acutus: ſi verò citra rectam GC, extiterit, dictus angulus erit obtuſus: quem cognoſcemus, ſi ad rectum adiiciemus reliquum angulum, inter alterum illud latus, & rectam GC; quem quidem inueſtigabimus, vt



de acuto C G D, diximus, ſi nimirum in recta CD, mente notemus punctum, in quod alterum illud latus productum incideret. Nam ſi tunc latus illud rectæ G C, congruat, & dioptra ad punctum notatum vergat, indicabit vmbra inter latus illud, & lineam fiduciæ angulum prædictum reliquum, vt in problemate 1. dictum eſt. Si denique alterum illud latus præciſè rectæ GC, congruat, angulus CGD, rectus erit. His peractis, quia in triangulo CGD, latera GC, GD, nota continent angulum G, etiam cognitum; [a] cognoſcetur quoque tertium latus CD, quod quæritur. a 12. triang. rectil.

2. VERVM inuentis diſtantiis GC, G D, in aliqua menſura, vna cum angulo G, facilius, licet non tam certò, interuallum CD, cognoſcemus hoc pacto. Deſcripto angulo G, ſeorſum ſumatur in GC, portio quotlibet partium lateris quadrati, verbi gratia 500. id eſt, ſemiſsis lateris. Et fiat, vt diſtantia inuenta G C, ad diſtantiam inuentam GD, ita partes acceptæ 500. ad aliud. Nam Quotiens dabit numerum quartum proportionalem earundem partium lateris quadrati; quibus ſi capiatur in G D, portio æqualis, [b] erit interuallum inter extrema puncta dictarum portionum, æquidiſtans interuallo CD; vt conſtat, ſi illæ portiones in rectas GC, GD, in figura transferrentur; propterea q, in illis extremis punctis rectæ GC, GD, ſectæ eſſent proportionaliter. Quare ſi illud interuallum circino menſuretur in eiſdem partibus lateris quadrati, continebit interuallum CD, totidem particulas rectæ G C, in 500. partes æquales diuiſæ, quot in illo interuallo comprehenduntur ex particulis lateris quadrati: cum ſit vt portio particularum 500. ad interuallum illud, ita G C, diuiſa in partes æquales 500. ad CD. Quæ particulæ reducentur ad menſuram, in qua inuentæ ſunt GC, GD: ſi fiat, vt GC, quatenus 500. ad menſuras in G C, inuentas, ita C D, inuenta in particulis rectæ GC, in 500. partes diuiſæ, ad aliud. b 2. ſext.

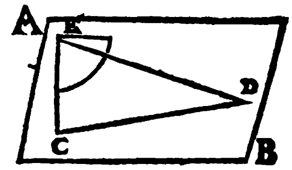
QVIA verò vix per circinum accurate reperiri poteſt interuallum illud inter extremitates proportionalium, magis exquiſitè, licet laborioſius, interuallum propoſitum cognoſcetur per 12. triang. rectilineorum.

INTERVALLVM tranſuerſum in Horizonte, cuius vtrumque extremum videri poteſt, per quadratum metiri.

PROBLE-

PROBLEMA XVII.

1. In Plano Horizontis AB, iaceat interuallum C D, in tranſuerſum, pes autem menſoris in E, ita vt longitudo CD, in vtramque partem producta per E, non tranſeat. Nam quando recta CD, è directo menſoris iacet, inueſtigabitur ea, per problema 11. Itaque vt tranſuerſum interuallum CD, cognoſcatur, inquirenda erit primum vtriuſque extremi puncti C, D, diſtantia à pede menſoris E, vt Num. 4. problematis 15. traditum eſt, per vnicam ſtationem. Deinde angulus CED, explorandus, quod fiet, ſi vnum latus quadrati rectæ EC, congruat, & dioptra rectæ ED. Nam vmbra abſciſſa inter latus illud, ac dioptram oſtendet quantitatem anguli CED, vt in problemate 1. dictũ eſt: qui quidem acutus erit, ſi alterũ latus vltra rectam ED, exiſtet: rectus verò ſi præciſè rectę ED, congruet: obtuſus denique, ſi citra rectam ED, cadet; quem cognoſcemus, ſi recto angulo adiiciemus reliquum acutum, qui deprehendetur, vt in pręcedenti problemate docuimus. Quoniam ergo triangulum habemus CED, cuius duo latera EC, ED, cognita ſunt, vna cum angulo comprehenſo E: *a* cognitum quoque erit tertium latus CD, in partibus rectarum EC, ED.



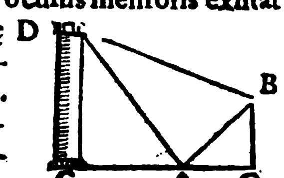
a 12. triang. rectil.

Eadem recta CD, cognita erit, ſi in rectis EC, ED, ſeorſum deſcriptis cum angulo E, inuento ſumantur partes ipſis EC, ED, proportionales, &c. vt Num. 2. pręcedentis problematis factum eſt.

DISTANTIAM alicuius ſigni in Horizonte poſiti à ſummitate turris, vel muri alicuius, licet ad ipſum ſignum acceſſus non pateat, per quadratum eruere, vbicunque menſor exiſtat.

PROBLEMA XVIII.

1. In Horizontis plano punctum A, diſtet à ſummitate D, alicuius altitudinis per rectam AD, quam ſic venabimur. Vbicunque oculus menſoris exiſtat, nimirum in B, indagentur per problema 15. diſtantię punctorum A, D, ab oculo menſoris B. Deinde angulus exploretur ABD, vt in problemate 16. docuimus. Nam ſic habebimus triangulum ABD, cuius duo latera nota ſunt BA, BD, vna cum angulo B. *b* Igitur tertium quoque latus AD, cognitum erit.



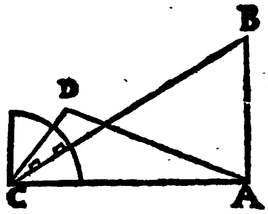
b 12. triang. rectil,

Quod etiam inuenietur, vt Num. 2. problem. 16. docuimus, ſi in rectis BA, BD, cum angulo B, ſeorſum ductis ſumentur partes ipſis BA, BD, proportionales, &c.

ALTITVDINEM inacceſſibilem, cuius baſis non videatur; & ad quam per nullum ſpatium ſecundum rectam lineam accedere poſſit menſor, aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dextram,

tram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis cernatur, per quadratum explorare.

PROBLEMA XIX.



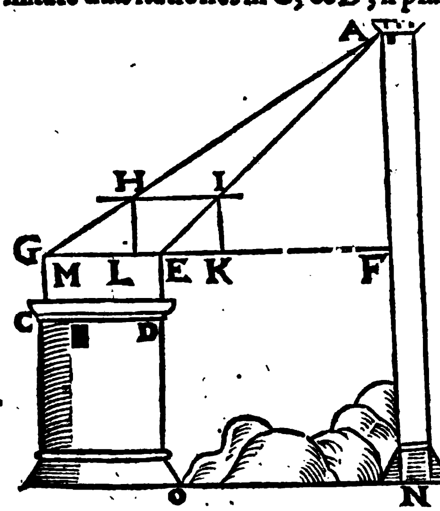
1. ALTITVDO metienda ſit AB, inacceſsibilis, ad quam ex C, loco menſoris non liceat accedere, aut ab ea recedere ſecundum lineam rectam, ſed ſolum in tranſuerſum vſque ad D, vnde baſem A, videre poſsimus. Per problema 17. inueſtigetur ex D, interuallum tranſuerſum A C. Nam per 5. problema, quando iam diſtantia CA, manifeſta eſt, altitudo AB, reddetur nota, quam quærimus, in partibus diſtantiæ inuentæ C A.

CÆTERVM ex ſcholio problem. 7. facilius per vnicam ſtationem in C, factam inueſtigabitur & altitudo AB, & diſtantia AC, vna cum hypotenuſa BC.

ALTITVDINEM maiorem ex minori cognita, etiamſi ſolum maioris altitudinis vertex cernatur, per quadratum efficere notam.

PROBLEMA XX.

1. MAIOR altitudo A N, metienda proponatur ex minori aliqua turri C O, cognita, ex qua ſolum cacumen A, non autem baſis N, appareat. Fiant in ſummitate duæ ſtationes in C, & D, ſi planum ſummitatis id permittat, ſtaturaque menſoris ſit CG, vel DE, & ad AN, intelligatur ducta perpendicularis GEF. Per 6. problema reperietur altitudo A F, ad quam ſi adiicietur altitudo minor DO, vna cum menſoris ſtatura C G, hoc eſt, recta F N, cognita fiet tota altitudo maior AN.

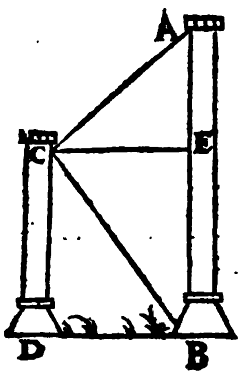


2. QVOD ſi in ſummitate tanta planities non ſit, vt duæ ſtationes fieri poſſint, erigenda eſt haſta aliqua ad Horizontem recta, niſi forte adſit ædificium quodpiam erectum, ibiq; faciendæ duæ ſtationes. Nam tunc per problema 7. inuenietur altitudo inter cacumen maioris altitudinis, & rectam, quæ ab inferiori ſtatione Horizonti ducitur parallela. Cui ſi apponitur altitudo minor ab inferiore ſtatione vſque ad eius baſem, conflabitur tota altitudo maior. Vt in figuris problematis 4. ſi maior altitudo ſit G L, & minor A K, fiantq; duæ ſtationes in A, a, inferior vna, & altera ſuperior, reperietur per 7. problema altitudo G F, cui ſi addetur minor altitudo A K, ab inferiori ſtatione vſque ad baſem, componetur tota altitudo maior G L.

PORRO facilius ex ſcholio problem. 7. altitudinem AF, eruemus, ſi in G, bis quadratum accommodetur, vt in eo ſcholio diximus. Vt ſi in figura eius ſcholij maior altitudo foret IF, & minor cognita AH, inueniretur GF, vt ibi oſtenſum eſt, &c.

ALTITVDINEM maiorem ex minori incognita, ſi tamen baſis maioris cerni poſſit, per quadratum venari.

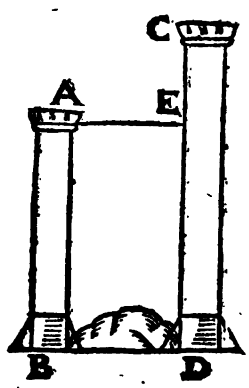
PROBLEMA XXI.



1. IN figura problematis 17. lib. 2. addiſcatur altitudo AE, vel per problema 6. vel 7. aut potius per ſcholium problem. 7. ſi C, ſit ſummitas minoris altitudinis CD. Deinde quia baſis B, maioris altitudinis ponitur poſſe videri ex C, inquiratur etiam altitudo minor CD, per problema 8. aut 9, vel potius per ſcholiũ probl. 9. ſi C, fuerit ſummitas minoris altitudinis CD. Hæc enim adiecta ad inuentam altitudinem AE, conficiet totam maiorem altitudinem AB, notam, quæ deſideratur.

ALTITVDINEM minorem ex maiori cognita, licet baſis minoris cerni non poſſit, per quadratum ſcrutari.

PROBLEMA XXII.



1. MINOR altitudo AB, ex maiore CD, cognita proponatur dimetienda. Intelligatur ducta recta AE, Horizonti BD, æquidiſtans, vt ED, fiat minori altitudini AB, æqualis. Si igitur ex ſummitate C, per problema 8. vel 9. aut potius per ſcholium problem. 9. exploretur altitudo CE, inſpecto nimirum cacumine A, ac ſi eſſet ſignum aliquod in Horizonte AE, ex C, viſum: atque hæc altitudo inuenta CE, ex maiore altitudine CD, quę cognita ponitur, detrahatur, reliqua fiet minor altitudo AB, quam inquirimus.

ALTITVDINEM minorem ex maiori incognita, dummodo baſis minoris appareat, per quadratum elicere.

PROBLE-

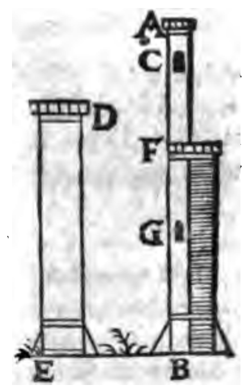
PROBLEMA XXIII.

1. FIGVRA præcedentis problematis repetatur. Et quia baſis B, minoris altitudinis, tanquam ſignum quodpiam in Horizonte poſitum, videri poteſt, ex hypotheſi, nota efficietur per problema 8. aut 9. vel potius per ſcholium problem. 9. maior altitudo CD. Quare, vt in præcedenti problemate dictum eſt, minor altitudo AB, ex maiore CD, proximè inuenta cognoſcetur; quod eſt propoſitum.

PORTIONEM altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadratum percipere.

PROBLEMA XXIV.

1. SIT portio AC, maioris altitudinis AB, exquirenda ex minore altitudine DE; Item portio GF, altitudinis minoris FB, ex maiori altitudine DE. Si altitudo DE, minor eſt reliqua portione CB, maioris altitudinis, inueſtiganda erit per problema 20. vel 21. vtraque altitudo maior AB, CB, ex minori DE, prout videlicet DE, cognita fuerit, aut incognita. Nam CB, ablata ex AB, notam relinquet propoſitam portionem AC. Si verò DE, maior eſt reliqua portione FB, ſi nimirum maioris altitudinis portio AF, metienda proponatur: inueſtiganda quidem erit maior altitudo AB, ex minore DE, per problema 20. vel 21. At vero minor altitudo FB, ex maiore DE, per problema 22. vel 23. exploranda erit, prout videlicet DE, nota fuerit, aut ignota. Nam rurſus FB, detracta ex AB, notam relinquet portionem propoſitam AF.



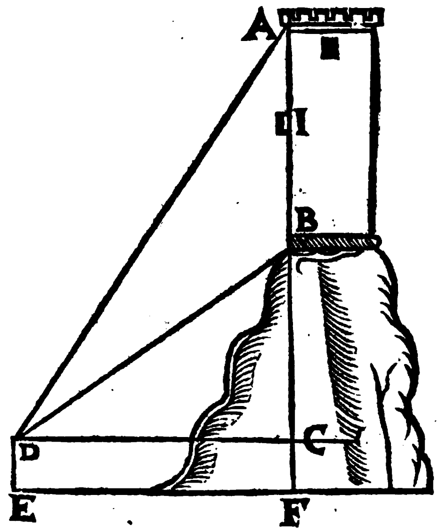
2. NON ſecus per problema 22. vel 23. indaganda erit vtraque altitudo minor FB, GB, ex maiore DE, ſi fortè illarum differentia FG, inuenienda ſit.

ALTITVDINEM, cuius baſis impoſita ſit monti, vel alteri cuipiam altitudini, & vtraque illius extremitas cerni poſſit, etiamſi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiuſdem puncti infimi diſtantia à loco menſoris cognita non ſit, per quadratum ex valle, aut ex plano Horizontis explorare.

PROBLEMA XXV.

1. HVIVSCEMODI altitudo eſt turris ſupra montem poſita, & portio alicuius ædificij inter duas feneſtras, vel duo ſigna, quorum alterum altero ſuperius eſt. Sit igitur ſupra montem BF, altitudo turris AB, propoſita. Ex aliquo loco E, in planitie, aut valle, vnde vtrumque turris extremum conſpicia-

tur, inueſtigetur per problema 6. vel 7. tam altitudo AF, quam BF, prout ſcilicet duæ ſtationes fiunt aut in plano, aut in aliqua haſta erecta. Vtraque tamen



altitudo AF, BF, faciſius inuenietur per ſcholium problem. 7. ſi in E, bis quadratum accommodetur, vt in eo ſcholio factum eſt. Vtraque altitudine inuenta, altitudo montis BF, dempta ex tota altitudine AF, notam relinquet optatam altitudinem AB.

SCHOLIVM.

Suprema media atque infima pars altitudinis quo pacto metienda ſit.

ITAQVE ſi AB, portio ſuperior totius alicuius altitudinis AF, deſideretur, indaganda erit per problem. 6. vel 7. aut potius per ſcholium probl. 7. tam tota altitudo AF, quàm eius portio BF. Earum enim differentia notam dabit ſuperiorem portionem AB, deſideratam.

SI autem media aliqua portio IB, cognoſcenda ſit, coniicienda rurſum erit per problema 6. vel 7. aut potius per ſcholium problem. 7. vtraque altitudo IF, BF, vt earum differentia IB, nota reddatur.

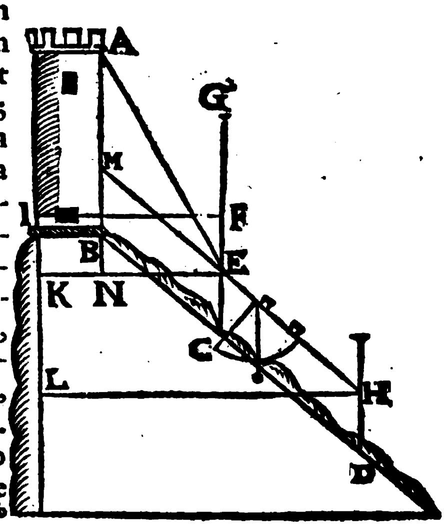
SI denique infima pars BF, proponatur inquirenda, exploranda ea erit per problema quoque 6. vel 7. aut potius per ſcholium problem. 7.

DISTANTIAM accliuem montis à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſitæ, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, propè verum, beneficio quadrati efficere cognitam.

PROBLEMA XXVI.

1. SIT turris AB, monti impoſita, in cuius aſcenſu, ſeu latere menſor conſiſtat in C, ex quo loco baſem turris videre nõ poſsit. Erigatur haſta aliqua CG, ad Horizontem, non autem ad latus montis, perpendicularis, ſitque menſoris ſtatura CE, Cogitetur ducta EK, ad altitudinem perpendicularis, aut Hori-

Horizonti æquidiſtans. Applicato autem quadrato ſtabili ad haſtam in puncto E, (ſi pendulum adhibeatur, cõſtituendus etiam erit oculus in E.) dirigatur dioptra verſus cacumen A; & per vmbram abſciſſam inueniatur angulus AEK, vt in problemate 1. tradidimus. Deinde fiat alia ſtatio ſuperior in F, in haſta, ductaq; per cogitationẽ recta FI, ad altitudinem perpendiculari, dirigatur rurſus dioptra verſus A, atque eodem modo angulus eruatur AFI. [a] Et quia angulus AFG, duobus angulis FEA, FAE, æqualis eſt, ſi auferatur AEF, complementum prioris anguli AEK, in ſtatione inferiori E, inuenti, ex AFG, complemento poſterioris anguli in ſuperiori ſtatione F, deprehenſi, reliquus fiet angulus EAF, cognitus. Quoniam igitur in trangulo AEF, duo anguli A, E, cogniti ſunt, vna cum latere EF, hoc eſt, cum differentia ſtationum, [b] nota fient reliqua latera AE, AF.



In figura due lineam ex F. ad A.

[a] *32. primi.*

2. Post hæc erigatur alius baculus DH, ad Horizontem rectus, ſumptaq; menſoris ſtatura ipſi CE, æquali, & ducta recta HL, ad altitudinem perpendiculari, applicetur ad H, quadratum, ac dioptra in punctum E, dirigatur, rurſumque per problema 1. ex vmbra abſciſſa angulus eliciatur EHL, ac radius viſualis HE, altitudini occurrere concipiatur in M, [c] qui ipſi BCD, lateri montis parallelus erit. Concipienda etenim ſunt tria puncta B, C, D, in vna recta linea iacere, ac ſi DC, producta ad baſem turris pertineret. [d] Quia vero angulus EHL, angulo MEK, internus externo æqualis eſt, ſi EHL, cognitus hoc eſt MEK, ex angulo AEN, in priori ſtatione E, obſeruato, detrahatur, notus relinquetur angulus AEM: Eſt autem & angulus EAM, cum complementum ſit anguli AEN, in priori ſtatione E, obſeruati, cognitus. Igitur & AME, reliquus duorum rectorum cognitus erit: quiquidem etiam relinquitur, ſi NMH, complementum anguli MHL, in ſtatione poſtrema H, inuenti ex duobus rectis detrahatur. Quapropter cum in triangulo AEM, omnes anguli noti ſint, vna cum latere AE, quod paulo ante inuenimus, [e] cognoſcentur quoque reliqua duo latera ME, AM: ac propterea diſtantia EM, vel CB, inuenta erit. Et ſi rectæ AM, inuentæ addatur menſoris ſtatura MB, tota turris altitudo AB, cognita erit.

[b] *10. triang. rectil.*
[c] *33. primi.*
[d] *29. primi.*
[e] *10. triang. rectil.*

Cvrandvm autem eſt magnopere, vt tria puncta B, C, D, in vna linea recta iaceant, id quod in problemate 22. lib 2. faciendum eſſe monuimus.

3. Qvod ſi baſis altitudinis ex latere montis videri poſſit, nullo ferme labore problema per vnicam ſtationem efficiemus. Nam ſi in D, ſtatuatur quadratum, ita vt centrum dioptræ ſit ſuperius, & latus infimum recta in B, feratur, dirigenda erit dioptra verſus idem punctum B. [f] Nam ſi fiat,

[f] *4. ſexti.*

Vt vmbra verſa abſciſſa	*Ad latus quadrati:*	*Ita latus quadrati*	*ad aliud,*

inuenietur diſtantia DB, in partibus lateris quadrati, vt liquido cõſtat ex ijs, quæ in problem. 15. Num, 5. ſcripſimus, patetque in 1. figura eiuſdem problematis; ſi

in ea cogitetur aſcenſus montis AF, in ſecundo quadrato, & F, baſis altitudinis monti impoſitæ.

DEINDE ſi idem quadratum in D, ita ſtatuatur, vt rurſus centrum dioptræ ſit in ſublimi, & latus infimum ad faſtigium altitudinis A, recta tendat, idemque punctum A, per dioptram inſpiciatur, reperietur eodem pacto diſtantia à D, vſque ad A; ſi fiat,

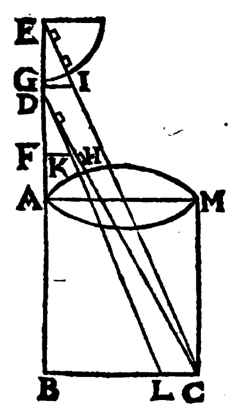
Vt vmbra verſa abſciſſa	*ad latus quadrati:*	*Ita latus quadrati*	*ad aliud.*

POSTREMO, accommodato quadrato, ita vt vnum latus rectæ D B, congruat, & dioptra in A, dirigatur, inuenietur angulus, quem rectæ DB, DA, efficiunt, vt in problem 16. Num. 1. docuimus. Si ergo hic angulus ſeorſum deſcribatur, & in rectis D B, DA, capiantur duæ portiones proportionales, vt in eodem problem. 16. Num. 2. tradidimus, reperietur altitudo A B, per interuallum inter duas illas portiones, vt ibi interuallum CD, indagauimus.

PROFVNDITATEM putei, vel ædificii cuiuſuis ad perpendiculum erecti, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadratum efficere cognitam.

PROBLEMA XXVII.

1. HOC nihil eſt aliud, niſi turrim ex eius vertice, quando in Horizonte ſignum aliquod apparet, per duas ſtationes in haſta aliqua factas metiri, vt in problem. 9. factum eſt. Quare eius problematis praxim hic breuiter repetemus. Sit puteus, ſeu ædificium erectum ABCM, cuius angulus C, in fundo, vel ſignum quodpiam C, in fundo poſitum conſpici poſſit. Erecta haſta A E, in orificio putei, vel ſummitate ædificij, fiant duæ ſtationes oculi menſoris in D, E, & applicato latere quadrati ad haſtam bis, vt modo centrum dioptræ in D, & modo in E, ſtatuatur, dirigatur dioptra verſus C. Si igitur in vtraque ſtatione dioptra vmbram rectam interſecet, quod plerumque in puteorum dimenſione fieri ſolet: Fiat autem,



Vt differentia vmbrarum rectarum	*Ad D E, differentia ſtationum.*	*Ita vmbra recta maior*	*ad EB,*

exibit recta EB, nota in partibus differentiæ ſtationum D E. Si ergo auferatur recta EA, compoſita ex differentia ſtationum DE, & portione haſtæ D A, quæ plerunque ſtaturæ menſoris eſſe ſolet æqualis, vel certè facile meſurari poteſt, nota relinquetur altitudo AB, quæſita.

2. SI vero in vtraque ſtatione vmbra verſa interſecetur, & fiat,

Vt dif-

Vt differentia vmbrarum verſarum	*ad D E, differentiam ſtationum*	*Ita vmbra verſa maior*	*ad EB,*

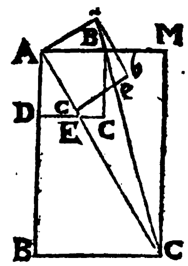
fiet rurſus nota recta E B, &c.

3. Si denique in vna ſtatione latus vmbræ rectæ ſecetur, & in altera latus vmbræ verſæ, reducenda erit vel vmbra recta ad verſam, vel verſa ad rectam. Nam ſi rurſus fiat.

Vt differentia vmbrarum ſiue verſarum, ſiue rectarum,	*ad D E, differentiam ſtationum:*	*Ita vmbra verſa vel recta maior*	*ad EB,*

iterum producetur recta E B, in partibus differentiæ ſtationum D E, &c.

Per vnicam quoque ſtationem aſſequemur altitudinem putei, quemadmodum in ſcholio probl. 9. ex montis vertice eius altitudinem menſi ſumus: ſi videlicet in A, quadratum ita ſtatuatur, vt centrum a, dioptræ ſuperius ſit, & latus infimum A C, ex A, ad punctum C, vergat, ad inueniendam diſtantiam, vel hypotenuſam A C, &c. vt in eo ſcholio factum eſt, atque hæc figura appoſita declarat. Secundo enim quadratum ita locandum eſt, vt A, centrum dioptræ ſit in A, & latus A D, lateri putei A B, adhæreat; Adeo vt per dioptram puncto C, inſpecto, radius viſualis ab hypotenuſa A C, non differat. Itaque ſi fiat.



Vt e b, vmbra verſa	*ad latus b a,*	*ita latus a A,*	*ad aliud,*

inuenietur hypotenuſa A C. Inuenta deinde portione dioptræ A E, in ſecundo quadrato, vt in ſcholio problem. 7. docuimus: [a] Si rurſus fiat, [a] *2. ſexti. & componendo.*

Vt portio dioptra A E, inuenta	*ad hypotenuſam inuentam A C:*	*ita latus A D,*	*ad aliud,*

prodibit altitudo, ſiue profunditas A B.

4. Qvod ſi latitudo orificij A M, vel fundi B C, cognita fuerit, quæ facile per aliquam menſuram cognoſci poterit facilius per vnam duntaxat ſtationem in D, factam, & per vnicam applicationem quadrati, profunditatem AB, conijciemus. Nam ſi fiat,

Vt vmbra recta, ſi ea abſciſſa fuerit,	*ad latus quadrati:*	*Ita latitudo cognita B C,*	*ad AB.*

Vel

Vt latus quadrati	*ad vmbram verſam, ſi ea fuerit abſciſſa:*	*Ita latitudo cognita BC,*	*ad AB,*

producetur AB, profunditas nota in partibus latitudinis.

Et ſi forte dioptra per punctum C, in quadrato tranſeat, erit latitudo BC, rectæ AB, æqualis.

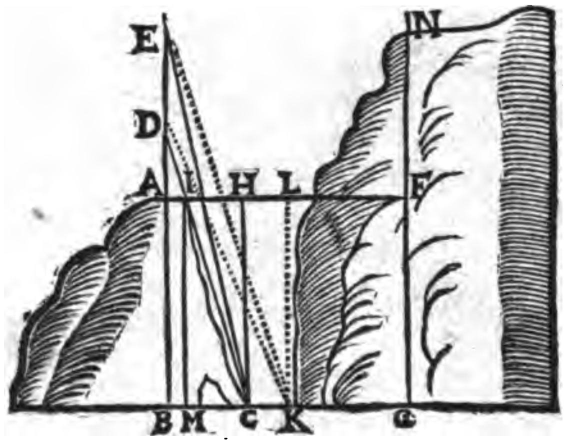
Hæ porro praxes demonſtratæ ſunt omnes in prædicto problemate 9. hac vltima Num. 4. excepta, quam in problemate 8. Num. 4. demonſtrauimus.

PROFVNDITATEM vallis, eiuſdemque deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, & eius terminus, vel aliquod in ea ſignum conſpici poſſit, per quadratum cognoſcere.

PRO-

PROBLEMA XXVIII.

1. Hoc etiam aliud nihil eſt, niſi altitudinem quampiam ex eius ſummo faſtigio per duas ſtationes in haſta aliqua erecta dimetiri, vt in problem. 9. factum eſt, & in præcedenti problemate repetitum. Sit enim vallis inter duos montes AB, NG, poſita, & terminus ipſius C, ex monte AB, conſpici poſsit, Erecta haſta AE, in qua duæ ſtationes oculi menſoris fieri poſsint in D, E, ſi reliqua conſtruantur, vt in problemate 24. lib. 2. cuius hic figuram iterauimus; inueſtigabitur recta EB, vt in 1. figura præcedentis probl. recta EB, fuit inuenta. Et ſi dematur portio haſtæ AE, altitudo montis AB, vel profunditas vallis HC, reliqua fiet nota.



2. Descensvs autem obliquus IC, ita colligetur. Per vmbram à dioptra ad C, directa abſciſſam eliciatur angulus BDC, ex 1. problemate, hoc eſt, angulus CIM,[a] qui ei æqualis eſt, externus interno; eritque proinde reliquus angulus ICM, notus, vtpote illius complementum. Quocirca cum in triangulo CIM, anguli acuti cogniti ſint, vna cum latere IM, nuper inuento;[b] baſis IC, ignorari non poterit.

[a] 29. primi.

[b] 5. triang. rectil.

Sed hæc omnia facilius per vnicam ſtationem inueſtigabuntur, ſi in D, puncto haſtæ quadratum bis applicetur, vt in præcedenti problemate Num. 2. & in ſcholio problem. 9. factum eſt in puncto A, &c.

3. Qvod ſi terminus C, non cernatur, eligatur aliquod ſignum K, in valle, quod ex ſtationibus D, & E, appareat. Ita enim per problema 9. vel potius per eius ſcholium, eadem altitudo IM, vel HC, inuenietur.

Immo ſi in plano vallis duæ ſtationes commode fieri poſsint, percipietur ex illis eadem altitudo IM, per problema 6. vel per ſcholium problem. 7. Deſcenſus verò obliquus IC, tanquam interuallũ inter duo ſigna I, & C, per problema 16. indagandus erit.

4. Eandem denique profunditatem CH, venari licebit ex altiore monte NG, ſi modo terminus C, minoris montis, vel aliquod ſignum in valle appareat ex cacumine N: non aliter, quam in problemate 22. vel 23. minorem altitudinem

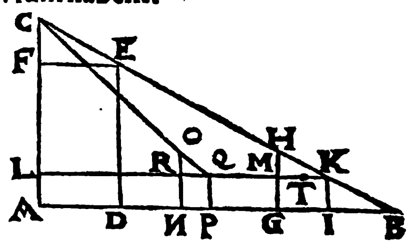
tudinem ex maiore deprehendimus. Nam hic minor altitudo inquirenda eſt CH, & maior NG, ex cuius vertice N, terminum C, videri poſſe ſtatuimus.

DISTANTIAM inter pedes menſoris, & ſignum aliquod in plano Horizontis beneficio baculi metiri, quando extremus terminus diſtantiæ videri poteſt.

PROBLEMA XXIX.

1. ABSOLVTIS dimenſionibus, quæ per quadrantem, & quadratum fieri ſolent, libet nonnullas alias rationes dimetiendi adiungere, vt illis, quando neque quadrans, neque quadratum adeſt, vti poſsimus. Ex pluribus autem modis illis ſolum ſeligemus, quo faciliorem vſum habent.

SIT ergo diſtantia metienda DB. In D, erigatur baculus DE, minor altitudine AC, ab oculo menſoris ad pedes, rectus ad Horizontem. quod fiet, ſi filum cum perpendiculo baculo adhærebit, vel lapillus ex E, demiſſus in punctum D, cadet. Deinde retrocedat menſor vſque ad A, donec radius viſualis ex C, prodiens, & per extremum E, baculi tranſiens occurrat puncto B; intelligaturque duci recta EF, ipſi AB, parallela. Quoniam igitur triangula CFE, EDB, æquiangula ſunt; quod anguli F, D, ſint recti, [a] & ECF, BED, æquales, internus, & externus, &c. [b] Si igitur fiat.



[a] *29. primi.*
[b] *4. ſexti.*

Vt CF, differentia inter baculum DE, & menſoris ſtaturam AC. *ad FE, ſpatium inter menſorem & baculum:* *Ita ED, longitudo baculi noti,* *ad DB,*

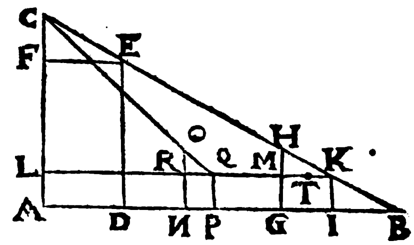
nota prodibit diſtantia quæſita DB, in partibus baculi DE, vel ſtaturæ menſoris AC. Debent enim baculus, & ſtatura menſoris per vnam eandemque menſuram eſſe cognita.

ALTITVDINEM turris, aut alterius rei per baculum indagare.

PROBLEMA XXX.

1. SIT in figura præcedentis problematis metienda altitudo AC. Figatur in terra baculus GH, rectus ad Horizontem, & aliquãtulum maior ſtatura mẽſoris ab oculo ad pedes quæ ſit IK. Deinde retrocedat menſor vſque ad I, ita vt eius oculus in K, conſtitutus faſtigium C, inſpiciat: intelligaturque ducta recta KL, Horizonti AB, parallela, ſecans baculum in M. [c] Quoniam igitur triangula KMH, KLC, ſimilia ſunt, propter parallelas MH, LC: ſi fiat,

[c] *coroll. 4. ſexti.*



Vt K M, ſpatium inter menſorem, & baculum,	*ad MH, differentiam inter baculum & ſtaturam menſoris:*	*Ita diſtantia K L, quæ nota fiat per aliquam menſuram,*	*ad L C,*

producetur recta L C, cui ſi adijcietur ſtatura menſoris A L, tota altitudo propoſita AC, cognita erit in partibus ſtaturæ menſoris, vel diſtantiæ K L.

2. QVOD ſi acceſſus non pateat ad altitudinem AC, vt diſtantiam IA, metiri poſsimus, figatur idem baculus, vel alius illi æqualis N O, accedendo videlicet propius ad altitudinem. Deinde menſor retrocedat ad P, vt eius oculus in Q, exiſtens per ſummitatem baculi O, iterum faſtigium C, videat: ſeceturque
a 4. ſexti. baculus NO, à recta KL, in R. [a] Et quia eſt, vt KM, ad MH, ita KL, ad LC: Item
b 8. quinti. vt QR, ad RO, ita QL, ad LC: [b] Eſt autem maior proportio KL, ad LC, quam QL, ad eandem LC; erit quoque maior proportio K M, ad MH, quam Q R, ad RO, ipſi MH, æqualem. (Cum enim & totæ G H, N O, & ablatæ G M, N R, æ-
c 10. quinti. quales ſint, erunt quoque reliquæ M H, R O, æquales) [c] Igitur K M, maior erit,
d 4. ſexti. quàm QR. Abſciſſa ergo KT, æquali ipſi QR, [d] quoniam eſt, vt K M, ad MH, ita KL, ad LC, erit permutando, vt KM, tota ad totam K L, ita MH, ad LC. Eadem ratione erit QR, hoc eſt, KT, ablata ex KM, ad QL, ablatā ex KL, vt RO, ad L C, hoc eſt, vt M H, ad L C. Igitur & reliqua T M, ad reliquam K Q, erit vt tota KM, ad totam KL: Vt autem K M, ad K L, ita paulo ante oſtendimus eſſe MH, ad LC. Quapropter ſi fiat.

Vt T M, differentia inter ſpatia K M, & Q R, vel K T, à menſore vſque ad baculos,	*ad K Q, differentiam ſtationum,*	*Ita MH, differentia inter baculum, & menſoris ſtaturam,*	*ad L C,*

efficietur nota L C, cui ſi addetur ſtatura menſoris AL, nota quoq; euadet propoſita altitudo AC.

3. IAM ſi prima ſtatio fiat in Q, & ſecunda in K, recedendo magis ab altitudine, non variabitur praxis & demonſtratio, vt liquet.

DISTANTIAM in plano Horizontis inter menſorem, & ſignum quoduis beneficio normæ adinuenire.

PROBLEMA XXXI.

1. PROPOSITA ſit diſtantia AB. In A, loco menſoris figatur ad angulos rectos baculus AC, paulò minor ſtatura menſoris, & per menſurā, per quam menſoris ſtatura cognita eſt, notus. Angulus deinde rectus normæ C, ſummitati baculi



culi applicetur, & eius latus CE, circa C, paulatim attollatur, deprimaturue, donec radius viſualis per latus interius normæ CE, incedens feratur in punctum extremum B, diligenterque notetur punctum F, in quod radius viſualis per alterum latus interius CD, tranſiens incidit. [a] Et quoniam AC, media eſt proportionalis inter AF, quæ in partibus baculi nota efficiatur, & diſtantiam AB: ſi fiat, [a] *coroll. 8. ſexti.*

Vt AF, inter baculum, & punctum F, cognita	*ad baculum AC:*	*Ita baculus AC,*	*ad AB,*

Hoc eſt, ſi quadratus numerus baculi per AF, diuidatur, prodibit in Quotiente diſtantia AB, nota in partibus baculi.

2. NON abs re foret, ſi duo clauiculi in vtroque latere normæ interiori affigerentur, vt radius viſualis per illos incedens rectius in B, & F, feratur.

ALTITVDINEM turris, aut alterius rei per normam inueſtigare.

PROBLEMA XXXII.

1. IN figura præcedentis problematis ſit metienda altitudo GH. Figatur rurſus in A, loco menſoris baculus AC, cuius ſummitati C, angulus rectus normæ applicetur, eiuſq; latus CE, paulatim eleuetur, deprimaturue, donec per latus interius CE, vertex altitudinis H, conſpiciatur punctumq; F, in quo alterum latus CD, incurrit, notetur. Et quoniam ducta recta CI, Horizonti parallela, triangula ACF, HCI, æquiãgula ſunt; q. anguli A, I, recti ſint, & ACF, HCI, reliqui ex rectis ACI, HCD, (ſi nimirum communis auferatur DCI,) æquales: [b] ſi fiat. [b] *4. ſexti.*

Vt baculus AC,	*ad AF, inter baculum, & punctum F, cognitam*	*Ita diſtantia CI, vel AG, quæ nota fiat per aliquam menſuram*	*ad IH,*

procreabitur IH, nota, ad quam ſi adijcietur longitudo baculi AC, vel GI, propoſita altitudo GH, cognita erit.

DISTANTIAM in plano Horizontis, quæ non ſit valde magna, alio modo facillimo dimetiri.

PROBLEMA XXXIII.

1. QVANDO planum aliquod exiguam habet longitudinem, ſed tamen menſurari nõn poteſt, ob aliquod impedimentum, cuiuſmodi ſunt latitudines



fluminum, & ſtagnorum, quorum latitudines, quas nunc pro longitudinibus accipimus, menſurari nequeunt, ob interiectã aquam, vtemur inter alia hoc etiam artificio. Prope ripam fluminis, aut ſtagni, vel alterius cujuſcunque rei metiendæ, figatur baculus AB, ad Horizontem rectus, cui in puncto B, accõ-

 modetur

modetur virgula C D, ita vt circa B, deprimi aut eleuari poſsit, donec radius viſualis per CD, tranſiens occurrat extremo E, diſtantiæ AE, metiendæ. Deinde virgula C D, manente immobili, ne angulus D B A, mutetur, vertatur baculus AC, ad rectos ſemper angulos Horizonti inſiſtens, donec radius viſualis per eandem virgulam CD, incedens occurrat plano alicui prope flumen, aut ſtagnũ, in quo nimirum menſor exiſtit, & quod menſurari poſsit, in puncto F. Quoniam ergo duo anguli A, B, trianguli ABE, duobus angulis A, B, trianguli ABF, æquales ſunt, & latus AB, commune: [a] erunt latera AE, AF, æqualia: atque idcirco, ſi AF, in plano per aliquam menſuram efficiatur nota; diſtantia quoque AE, cognita erit.

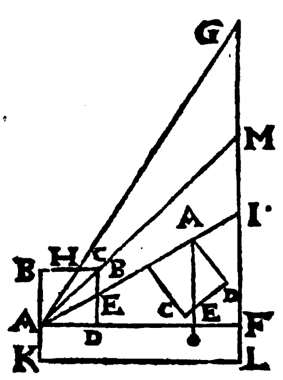
[a] *26. primi.*

2. ALII hoc ipſum efficiunt ſine baculo, hac ratione. Erigunt ſe ad angulos rectos cum Horizonte: Deinde deprimunt pileum, qui ſit aliquantulũ latus, donec radius viſualis per extremitatem pilei excurrens incidat in terminum E, diſtantiæ AE, metiendæ: Pileo vero immobili manente, vertunt ſe verſus planum aliquod menſurabile, notantque in eo punctum F, in quo radius viſualis ipſi plano occurrit. Nam rurſus longitudo AF, quæ per menſuram aliquam cognoſcenda eſt, diſtantiæ A E, propoſitæ æqualis eſt: propterea quod ſtatura menſoris fungitur tunc munere baculi A B, & pileus depreſſus vices gerit virgulæ C D, vt conſtat.

ALTITVDINEM cuiuſque rei erectæ ex eius vmbra, quam Sole lucente proiicit, ſi nota fuerit, per quadratum deprehendere.

PROBLEMA XXXIV.

1. Hoc problema à quinto non differt, niſi quòd hic vtimur radio Solis pro radio viſuali, & longitudine vmbræ, quam altitudo, Sole lucente, proiicit, pro diſtantia à menſore ad altitudinem vſque. Sit ergo altitudo FG, vel FI, vel FM, eiuſque vmbra proiecta FA. Dirigatur quadratum verſus Solem (licet hoc non fiat è directo altitudinis) & tranſeunte radio Solis per foramina pinnacidiorum, notetur quanta vmbra ſiue recta, ſiue verſa à dioptra, vel filo perpendiculi in quadrato abſcindatur. Nam ita ſeſe habebit vmbra recta H B, in quadrato ad latus A B, vt vmbra proiecta AF, ad altitudinem F G. Item ea eſt proportio lateris A D, ad vmbram verſam DE, in quadrato, quæ vmbræ proiectæ AF, ad altitudinem FI. Denique dioptra, vel filo perpendiculi per punctum C, incedente, tanta erit vmbra proiecta A F, quanta eſt altitudo F M. quæ omnia in problemate 5. demonſtrata ſunt. Igitur ſi fiat.



Vt vmbra recta HB, in quadrato abſciſſa	*ad latus AB,*	*Ita longitudo vmbræ proiecta AF,*	*ad FG,*

Vel

Vt latus AD,	*ad vmbram verſam DE, abſciſſam in quadrato*	*Ita longitudo vmbræ proiectæ AF,*	*ad FI,*

altitudo propoſita FG, vel FI, proueniet nota &c.

LONGITVDINEM vmbræ ab altitudine, Sole lucente, quando altitudo eſt cognita, ope quadrati apertam, & manifeſtam facere.

PROBLEMA XXXV.



1. Hoc etiam problema à ſecundo diuerſum non eſt: ſolum hic pro diſtantia accipimus longitudinem vmbræ, quam altitudo nota, Sole lucente, proiicit. Sit ergo altitudo AF, eiuſque vmbra proiecta FG. Dirigatur quadratum verſus Solem, vbicunque menſor extra vmbram conſtiterit, & tranſeunte radio Solari per pinnacidiorum foramina, obſeruetur vmbra ſiue recta, ſiue verſa, quam filum perpendiculi, vel dioptra abſcindit. Ita namque ſe habebit latus quadrati AB, ad vmbram eius rectam BE, abſciſſam, vt altitudo AF, ad vmbram proiectam FG. Item ſic erit vmbra verſa DE, in quadrato ad latus AD, vt altitudo AF, ad vmbram proiectam FG. Dioptra denique, vel filo perpendiculi per punctum C, tranſeunte, altitudo AF, longitudini vmbræ proiectæ FG, æqualis eſt. quæ omnia in problemate 2. demonſtrauimus. Quamobrem ſi fiat,

Vt latus AB,	*ad vmbram rectam abſciſſam BE,*	*Ita altitudo nota AF,*	*ad FG:*

Vel

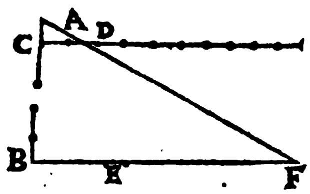
Vt vmbra verſa DE, abſciſſa in quadrato	*ad latus AD,*	*Ita altitudo nota AF,*	*ad FG,*

exibit nota longitudo vmbræ proiectæ FG, &c.

DISTANTIAM in Horizonte inter menſorem, & ſignum aliquod viſum, beneficio ſimpliciſſimi cuiuſdam inſtrumenti comperire.

PROBLEMA XXXVI.

1. Constrvatvr inſtrumentum hoc modo. Accipiatur baculus rectus AB, paulò minor, quàm menſoris ſtatura, diuidaturque in 5. partes, vel etiam plures, paucioreſue æquales, & in prima eius parte C, vel in alia quacunque, infigatur alius baculus CD, ad rectos angulos, in quo ſumantur ordine quotcunque palmi, aut pedes. In extremitate quoque baculi AB, infigatur alius baculus BE, ad angulos rectos: conſtructumque erit inſtrumentum, quo varias magnitudines licebit metiri, vt patebit: Sit enim primum metienda diſtantia BF, cuius terminum F, menſor in altero termino B, exiſtens videre poſsit ex A, etiamſi in medio ſint valles, & alia impedimenta. Conſtituatur inſtrumentum in tali ſitu, vt AB, ſit ad Horizontem perpendicularis, & BE, eidem æquidiſtans. Inſpecto extremo F, ex A, notetur ſumma cura ac diligentia punctum D, in baculo CD, per quod radius viſualis tranſit. [a] Nam cum triangula ACD, ABF, ſint ſimilia; [b] ſi fiat,



[a] coroll. 4. ſexti.
[b] 4. ſexti.

Vt AC, Ad AB, Ita CD, ad BF,

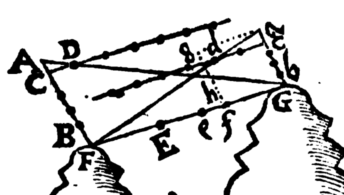
inuenta erit diſtantia BF, in partibus CD. Itaque ſi AC, eſt quinta pars, verbi gratia, baculi AB, erit quoque CD, quinta pars diſtantiæ BF. Et quia in noſtro exemplo CD, continet 2. pedes, ſi eos multiplicemus per 5. producentur 10. pedes pro diſtantia BF.

2. Cvrandvm autem erit diligenter, vt quando radius viſualis non tranſit per aliquem pedem integrum baculi CD, inueſtigetur, quot decimæ, vel centeſimæ vnius pedis in particula abſciſſa contineantur, per ea, quæ lib. 1. cap. 2. Num. 14. ſcripſimus, quod fiet, ſi in regula CD, decem pedes comprehendantur. Idemque de quacunque alia menſura intelligendum eſt, ſi ea in CD, loco pedum ſignietur.

3. Vervm hoc eadem facilitate præſtitimus ope quadrati, tum penduli, tum ſtabilis.

DISTANTIAM inter duo montium aut turrium cacumina, ope prædicti inſtrumenti coniicere.

PROBLEMA XXXVII.



1. Sint duo cacumina montium F, G. Poſito puncto B, prædicti inſtrumenti in cacumine F, minoris montis, deprimatur baculus AB, donec baculus BE, recta in cacumen G, tendat, quod per duos clauiculos in B, E, infixos, facile fiet, vt Num. 2. problem. 31. diximus. Manente in hoc ſitu inſtrumento, inſpiciatur cacumen G, ex A, obſeruetur que punctum D, interſectionis radij AG, cum baculo CD. [c] Nam cum æquiangula ſint triangula ACD, ABG, ſi fiat,

[c] coroll. 4. ſexti.

Vt AC,

Vt A C, nota in partibus A B, ad A B, notarum partium: Ita C D, nota in data menſura ad B G,

cognoſcetur diſtantia B G, in partibus C D. Vt ſi A C, eſt quinta pars ipſius A B, & C D, contineat 1. pedem, & inſuper $\frac{2}{3}$. ſi $1\frac{2}{3}$. quinquies ſumatur, efficietur diſtantia B G, pedum $8\frac{1}{3}$.

2. NON aliter diſtantia b F, ex maioris montis cacumine G, inueſtigabitur, vt figura indicat.

EODEM modo procedes, ſi puncta F, G, ſint faſtigia duarum turrium, aut ſi vnum ſit faſtigium turris, & alterum, cacumen montis, vt conſtat.

3. IDEM hoc per quadratum fiet hoc modo. Sit quadratum a b f g, ſtatuaturque angulus b, in cacumine G, & latus b f, deprimatur, ita vt recta in cacumen F, tendat, ſi productum intelligatur, obſeruetur que vmbra verſa abſciſſa g h, à radio viſuali a B. Nam quia triangula a g h, B b a, æquiangula ſunt, [a] ſi fiat. [a] *4. ſexti.*

Vt g h, vmbra verſa ad g a, latus quadrati ita latus quadrati a b, ad B b,

hoc eſt, ſi quadratus numerus lateris, nimirum 1000000. diuidatur per vmbram verſam, gignetur in Quotiente diſtantia B b.

IDEMQVE fieret, ſi angulus quadrati in B, collocaretur, infimumque latus recta à B, in cacumen G, tenderet, &c.

LONGITVDINEM aſcenſus alicuius montis, ſi eius cacumen ab oculo in radice conſtituto videatur, eiuſdem inſtrumenti beneficio cognoſcere.

PROBLEMA XXXVIII.



1. ACCOMMODETVR prædictum inſtrumentum, vt punctum B, in radice montis ſtatuatur, & baculus B E, beneficio duorum clauiculorum infixorum, vt Num. 2. problem. 31. dictum eſt, recta in cacumen F, vergat; noteturque interſectio D, radij viſualis cum baculo C D, inſpecto cacumine F, ex A. [b] Nam iterum triangula A C D, A B F. Similia erunt. [c] Quare ſi fiat, [b] *coroll. 4. ſexti.*

Vt A C, nota in partibus A B, ad A B, notarum partium: Ita C D, nota in data menſura ad B F, [c] *4. ſexti.*

cognoſcetur aſcenſus obliquus montis B, F, in partibus C D.

2. PARI ratione, ſi F, ſit faſtigium alicuius turris, inueſtigabis diſtantiam à puncto B, in terra, vel alibi poſito, vſque ad F, hoc eſt, hypotenuſam BF, vt perſpicuum eſt. Atque hoc eodem inſtrumento complures aliæ dimenſiones abſolui poterunt, quod prudens Lector facilè perſpiciet.

3. IDEM aſſequemur quadrato A B G H, ſi eius angulus B, in radice ſtatuatur, & latus B G, eleuetur ita, vt recta tendat in cacumen F. Obſeruata enim vmbra

vmbra verſa H I, quam dioptra in cacumen F, directa abſcindit, fiunt triangula
[a] 4. ſexti. AHI, FBA, æquiangula. [a] Quamobrem ſi fiat,

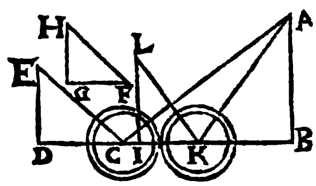
Vt H I, vmbra verſa	*ad A H, latus quadrati*	*Ita latus quadrati AB,*	*ad BF.*

id eſt, ſi quadratus numerus 1000000. lateris diuidatur per vmbram verſam, dabit Quotiens numerus longitudinem aſcenſus obliqui BF.

ALTITVDINEM, ad cuius baſem pateat acceſſus, beneficio ſpeculi plani, vna cum diſtantia ſpeculi à cacumine altitudinis deprehendere.

PROBLEMA XXXIX.

1. SIT altitudo AB, à cuius baſe B, recedatur per quotuis paſſus, aut pedes, vſque ad C, punctum, in quo ſpeculi plani centrum collocetur, & ſecundum rectam BC, retrocedatur, donec menſoris oculus in E, conſtitutus cacumen A, intueri poſſit per radium reflexum ECA, ita vt DE, ſit ſtatura menſoris ab oculo vſque ad planum. Et quoniam angulus incidentiæ D C E, æqualis eſt angulo reflexionis A C B, vt Perſpectiui docent, & anguli D, B, recti ſunt; erunt triangula DCE, BCA, æquiangula;



[b] 4. ſexti. [b] ideoque erit, vt CD, ad DE, ita CB, ad BA. Quocirca ſi fiat,

Vt C D, diſtantia menſoris à ſpeculo C,	*ad DE, ſtaturam menſoris:*	*Ita CB, diſtantia ſpeculi ab altitudine.*	*ad B A,*

producetur altitudo B A, quam quærimus, nota in partibus ſtaturæ menſoris D E.

ALITER.

2. MENSVRETVR per quadrantem angulus D C E, vel B C A, (Hoc fiet, ſi angulus rectus conſtruatur F G H, & recta F G, tot particulas æquales contineat, quot paſſus, vel pedes in CD, diſtantia continentur: Item recta G H, tot particulas eaſdem, quot paſſus aut pedes ſtatura menſoris D E, complectitur.
[c] 4. primi. Iuncta namque recta F H, [c] erit angulus F, angulo C, æqualis. quem angulum F, nullo negotio per quadrantem aliquem in gradus diuiſum cognoſcemus.) Nam ſi poſito ſinu toto C B, fiat.

Vt ſinus totus CB,	*ad B A, tangentem anguli reflexionis B C A, vel incidentiæ D C E, quem proximè inuenimus*	*Ita C B, diſtantia cognita*	*ad B A,*

prodibit altitudo B A, nota in partibus diſtantiæ CB. Et ſi rurſum fiat,

Vt ſinus totus C B,	*ad C A, ſecantem eiuſdem anguli BCA,*	*Ita C B, diſtantia cognita*	*ad C A,*

cognita etiam erit C A, diſtantia à ſpeculo C, vſque ad cacumen A, in partibus diſtantiæ C B.

ALITER.

3. PER ſolos ſinus ita progrediemur, ſi libet. [a] Fiat,

Vt ſinus anguli A, complementi anguli C, reflexionis, vel incidentiæ,	*ad CB, diſtantiam cognitam.*	*Ita ſinus anguli C, incidentiæ, vel reflexionis,*	*ad BA.*

[a] 10. triang. rectil.

Nam productus numerus dabit altitudinem BA, notam in partibus diſtantiæ CB. [b] Rurſus fiat, [b] 10. triang. rectil.

Vt ſinus anguli A, complementi anguli eiuſdem C,	*ad CB, diſtantiam cognitam:*	*Ita ſinus totus recti anguli B,*	*ad CA.*

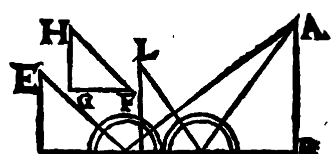
Numerus enim proueniens dabit hypotenuſam CA, in partibus diſtantiæ CB, cognitam.

ALTITVDINEM inacceſſibilem beneficio ſpeculi plani, vnà cum ſpeculi diſtantia tam à baſe, etiam non viſa, quàm à cacumine altitudinis cognoſcere.

PROBLEMA XL.

1. SIT rurſus in præcedenti figura altitudo AB, ſupra planum BD, erecta. Collocato ſpeculo plano in C, recedatur ab altitudine ad D, donec cacumen A, per radium reflexum ECA, cerni poſſit, obſerueturque per quadrantem angulus ECD, ideoque & angulus ACB, vt in problemate præcedenti Num. 2. dictum eſt. Deinde collocato ſpeculo in K, puncto, quotuis paſſibus à C, verſus altitudinem diſtante, recedatur iterum ad I, donec cacumen A, inſpiciatur rurſum per radium reflexum LKA; inquiraturque magnitudo anguli IKL, ideoque & anguli AKB, Et quoniam poſito ſinu toto AB, rectæ BK, BC, tangentes ſunt angulorum BAK, BAC, qui complementa ſunt angulorum K, C, reflexionum per quadrantem cognitorum, cognita erit KC, earum tangentium differentia. Si ergo fiat.

Vt KC, differentia tangentium, quæ complemētis angulorum incidentiæ debentur,	*ad AB, ſinum totum,*	*Ita KC, differentia poſitionum ſpeculi*	*ad AB,*



procreabitur numerus, qui altitudinem AB, notam exhibebit in partibus differentiæ poſitionum ſpeculi KC.

RVRSVS ſi fiat,

Vt KC, differentia complementorum angulorum incidentiæ in ſpeculo,	*ad CB, tangentem maiorem:*	*Ita KC, differentia poſitionum ſpeculi*	*ad CB,*

reperietur CB, maior diſtantia ſpeculi C, ab altitudine. Ex qua ſi auferatur KC, differentia poſitionum ſpeculi, nota remanebit KB, minor diſtantia ſpeculi K, ab eadem altitudine. Quæ etiam inuenietur, ſi fiat, vt KC, differentia prædictorum angulorum, qui complementa ſunt angulorum incidentiæ in ſpeculo, ad KB, tangentem minorem: Ita KC, differentia poſitionum ſpeculi ad aliud, vt perſpicuum eſt.

a 22. primi. a DEINDE quia angulus AKB, in propinquiore ſpeculi poſitione duobus angulis ACK, CAK, æqualis eſt, ſi angulus ACK, remotioris poſitionis detrahatur ex angulo AKB, poſitionis propinquioris: remanebit angulus CAK, notus. b Si igitur fiat,

b 10. triang. rectil.

Vt ſinus anguli CAK, differentia angulorum incidentiæ	*ad KC, differentiam poſitionum ſpeculi:*	*Ita ſinus anguli AKC, complementi anguli AKB, ad duos rectos in propinquiore poſitione ſpeculi*	*ad CA,*

gignetur hypotenuſa CA, remotioris poſitionis ſpeculi, in partibus differentiæ poſitionum ſpeculi KC. c Et ſi rurſus fiat,

c 10. triang. rectil.

Vt ſinus anguli CAK, differentia angulorum incidentiæ	*ad KC, differentiam poſitionum ſpeculi:*	*Ita ſinus anguli reflexionis ACK, in remotiori poſitione ſpeculi*	*ad KA,*

procreabitur quoque hypotenuſa KA, propinquioris poſitionis ſpeculi, in eiſdem partibus differentiæ poſitionum ſpeculi KC.

ALITER.

2. PER ſolos ſinus idem aſſequemur hoc modo. Inuenta hypotenuſa CA, vt proximè diximus, per ſinus. d fiat,

d 10. triang. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam inuentam CA,*	*Ita ſinus anguli ACB, remotioris poſitionis ſpeculi:*	*ad AB,*

Prodibit enim in Quotiente altitudo AB, nota in partibus hypotenuſæ inuentæ CA. e Quod ſi rurſus fiat,

e 10. triang. rectil.

Vt ſinus totus anguli recti B,	*ad hypotenuſam inuentam CA,*	*Ita ſinus anguli BAC, complementi anguli in remotiore poſitione ſpeculi*	*ad CB,*

producetur CB, maior ſpeculi diſtantia ab altitudine. Ex qua ſi ſubtrahatur KC, differentia poſitionum ſpeculi, cognita etiam relinquetur diſtantia minor KB. Quæ etiam, ſi inueſtigetur hypotenuſa KB, vt ſupra traditum eſt, reperietur: ſi fiat, vt ſinus totus anguli recti B, ad hypotenuſam inuentam KB, ita ſinus anguli BAK, complementi anguli in propinquiore poſitione ſpeculi, ad aliud, vt manifeſtum eſt.

ALTI-

ALTITVDINEM monti impoſitam, ſi modo altitudinis baſis poſſit conſpici, vel portionem ſuperiorem alicuius turris, beneficio ſpeculi plani efficere notam.

PROBLEMA XLI.

1. QVANDO ad turrim patet acceſſus, vt eius à menſore diſtantia cognoſci poſsit; ſi per probl. 39. inueſtigetur tam altitudo à ſummitate portionis propoſitæ, vſque ad baſem turris, quam altitudo ab infima parte eiuſdem portionis, vſque ad eandem turris baſem: & minor hæc altitudo ab illa maiore dematur, reliqua fiet portio, quæ inquiritur.

2. AT verò, quando altitudo monti eſt impoſita, & baſis altitudinis apparet, aut ad turrim non patet acceſſus: exquirenda erit per præcedens problema vtraque altitudo prædicta. Nam rurſus minor detracta ex maiore, reliquam faciet altitudinem, vel portionem, quæ deſideratur.

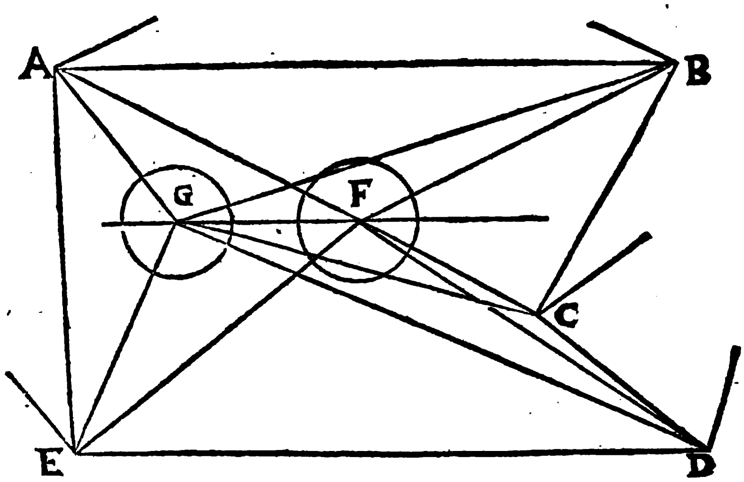
SITVM cuiuslibet campi, aut atrii, vel templi, vel etiam vrbis, aut regionis cuiuſuis in plano deſcribere, ſi è duobus locis intra ipſum ſitum aſſumptis baculi ex omnibus campi angulis erecti, vel certè ipſi anguli in ædificio, aut vrbe, vel loca regionis videri poſſint: ſimulque longitudines laterum campi, vel ædificii, nec non diſtantias inter angulos, & vtrumuis locorum aſſumptorum in data menſura cognoſcere. Quod ſi talia duo loca intra ſitum eligi nequeant, idem efficere, dummodo ſitum poſſimus circumire.

PROBLEMA XLII.

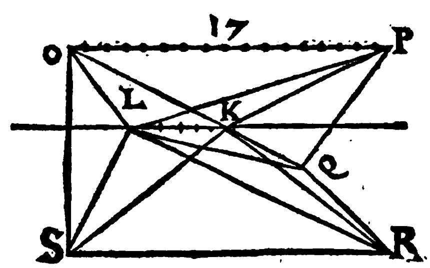
1. ETSI problema hoc vel Geographicum eſt, vel Architectonicum; tamen quia ſine dimenſione linearum abſolui non poteſt, lubet illud hoc loco paucis explicare. Sit ergo campus quinque lateribus A B, B C, C D, DE, EA, cinctus. Figantur in quinque angulis A, B, C, D, E, quinque baculi ad angulos rectos cum Horizonte, pareturque circa medium areæ planum aliquantulum altum Horizonti æquidiſtans, in quo duo puncta F, G, quantumlibet inter ſe diſtantia, verbi gratia 100. pedibus, è quibus omnes quinque baculi cerni poſsint. Per F, G, ducatur recta F G, ad vtraſque partes; continebitque ſegmentum F G, 100. pedes ex hypotheſi. Affixa deinde dioptra volubili cum pinnacidiis in vtroq; puncto F, & G, deſcriptiſque circulis duobus ex F, & G, vt per eorum circumferentias angulorum magnitudines, qui in F, G, conſtituētur, cognoſci poſsint, inſpiciantur ex F, & G, per foramina pinnacidiorum (circumducta dioptra) baculi ex angulis A, B, C, D, E, erecti, & anguli, quos linea fiduciæ cũ recta HI, facit, aut quos rectæ à linea fiduciæ deſignatę inter ſe faciunt, transferantur ordine ad puncta K, L, quomodocunq; inter ſe diſtantia in recta, KL,

Situs campi cuiuſuis, quo pacto ex duobus locis intra ipſum aſſumptis delineetur.

quæ ſeorſum in charta aliqua ſit deſcripta, productis lineis, quæ illos angulos in K, & L, efficiunt vt in 2. figura apparet. Si namque puncta, vbi dictæ lineæ ex



K, & L, prodeuntes concurrunt, lineis rectis coniungantur, deſcripta erit figura O P Q R S, ſimilis omnino figuræ campi A B C D E, Quod ſic demonſtro. Triangula AGF, OLK, ſimilia ſunt, quòd anguli AGF, AFG, angulis OLK, OKL, æquales ſint, ex conſtructione. [a] Igitur erit AG, ad GF, vt OL, ad LK. Eademque ratione, ob ſimilitudinem triangulorum FGE, KLS, erit GF, ad GE, vt LK, ad LS: ac proinde ex æquo erit AG, ad GE, vt OL, ad LS. Cum ergo & anguli A G E, O L S, circa quos latera illa ſunt proportionalia, æquales ſint, quippe cum angulo A G E, factus ſit æqualis ex conſtructione angulus O L S: [b] ſimilia erunt triangula A G E, O L S, hoc eſt, æquiangula. Pari ratione ob ſimilitudinem triangulorum F G D, K L R, [c] erit GD, ad GF, vt LR, ad LK. Item ob ſimilitudinem triangulorum FGE, KLS, erit FG, ad GE, vt KL, ad LS. Igitur erit ex æquo GD, ad GE, vt LR, ad LS: Ac proinde cum anguli DGE, RLS, ex conſtructione ſint æquales; [d] æquiangula quoque erunt triangula D G E, R L S. Non aliter oſtendemus, triangula CGD, BGC, AGB, triangulis, QLR, PLQ, OLP, eſſe æquiangula. Immo eiſdem argumentis concludemus, quamuis non ſit neceſſarium, triangula, quæ in F, ſupra latera campi conſtructa ſunt, æquiangula eſſe triangulis in K, ſupra latera figuræ O P Q R S, conſtitutis. Ex his ſequitur, figuram ABCD E, figuræ O P Q R S, æquiangulam eſſe: quippe cum earum anguli coagmentati ſint ex angulis æqualibus, nimirum angulus AED, ex angulis AEG, GED, ipſum componentibus, qui angulis OSL, LSR, angulum O S R, componentibus æquales ſunt; & ſic de cæteris. Sequitur etiam latera earundem figurarum circa æquales angulos eſſe proportionalia. Nam propter triangulorum ſimilitudinem, [e] eſt AE, ad EG, vt O S, ad SL: &EG,



[a] 4. ſexti.
[b] 6. ſexti.
[c] 4. ſexti.
[d] 4. ſexti.
[e] 4. ſexti.

& EG,ad ED,vt SL,ad SR.Ideoque ex æquo AE,ad ED,vt OS,ad SR: Atque ita de alijs. Similis ergo ſunt figuræ ABCDE, OPQRS.

2. IAM vero vt longitudines laterum AB,BC, CD,DE, EA, & rectarum ex F,vel G,ad angulos in prima figura ductarum inueniamus,diuidendum erit in figura inuenta,id eſt, in ſecunda, interuallum KL, in quotcunq; partes æquales. Deinde inquirendum, quotnam ex illis partibus in ſingulis lateribus, & rectis eiuſdem figuræ ſecundæ ex K, vel L, prodeuntibus contineantur. quod vel per circinum fieri poteſt, repetendo ſæpius vnam particulam in dictis lateribus rectis: vel (quod magis probo) hoc modo. Repetatur tota KL,in quolibet latere, vel recta,quoties fieri poteſt,& in reliquo ſegmento vna etiam particula interualli KL, circino iteretur, quoties fieri poteſt. Nam quoties repetita fuerit KL: toties numerus particularum ipſius KL,in latere continebitur,cum tot inſuper particulis, quot per circinum in reliquo ſegmento fuerint deprehenſæ. Aut certe per ea,quæ lib 1. cap.1.ad finem Num.2. ſcripſimus, inueſtigetur in inſtrumento partium, quot particulæ interualli KL,in dictis lateribus, & rectis cõprehendantur. Deinde fiat,vt numerus particularum interualli KL,aſſumptus in 2.figura,ad numerum pedum inter puncta F,& G,in prima figura aſſumptum, ita numerus particularum in quolibet latere, vel recta in ſecunda figura inuentarum, ad aliud. Quotiens enim numerus indicabit, quot pedes in aſſumpto latere, vel recta contineantur. Ratio eſt,quia cum eandem proportionem habeat KL,in 2.figura ad quodlibet latus, vel rectam eiuſdem figuræ, quam habet FG,in prima figura ad reſpondens latus, vel rectam, propter ſimilitudinẽ figurarũ,erit pmutando KL,ad interuallũ FG,vt latus ad latus,&c. Verbi gratia,In 2.figura interuallum KL,ſectum eſt in 5.particulas,qualium 17.in latere OP,inuentæ ſunt: Et quia ſpatium FG,in 1.figura poſitum eſt 100.pedum: ſi fiat,

Vt KL, quinque particularum	*ad FG.100.pedum:*	*Ita OP,17.particularum*	*ad AB,*

hoc eſt, ſi, vt regula aurea præcipit,100. ducantur in 17. ſecundus numerus in tertium,& productus numerus 1700. diuidatur per 5.id eſt, per primum numerum,reperientur in Quotiente 340.pedes pro latere AB,& ſic de cæteris.

3. EVNDEM ſitum campi propoſiti ABCDE,delineabimus etiam ex vno tantum loco F, intra ipſum aſſumpto, hac ratione. Dioptra ad ſingulos baculos ex angulis erectos,dirigatur, notatis angulis,quos lineæ, per dioptram deſignatæ inter ſe faciunt; diſtantiæque ab F, ad ſingulos angulos inquirantur in aliqua menſura, vel per catenulã aliquã ferream,quæ nec intendi poſsit,nec remitti,vel per chordam ex F,ad ſingulos angulos extenſam vel certe,ſi diſtantiæ illæ magnæ ſint,per problema 2.vel 36.beneficio quadrati,alteriuſue inſtrumẽti. Nam ſi in charta aliqua ad quodlibet punctum K, ijdem anguli conſtituantur,& in rectis illos angulos efficientibus accipiantur tot particulæ inter ſe æquales cuiuſuis magnitudinis, quot menſuræ inuentæ ſunt in rectis reſpondentibus, quæ ex F,exeunt: extrema autem puncta vltimarum particularum rectis lineis coniungantur,deſcripta erit figura OPQRS, ſimilis omnino campo ABCDE: [a] propterea quod triangula ad punctum F,collecta ſimilia ſunt triangulis ad punctum K,collectis,ob æqualitatem angulorum in F, & K, conſtitutorum, & latera circa illos angulos proportionalia,ex conſtructione.

Situs campi cuiſuis qua ratione ex vno loco intra ipſum aſſumpto deſcribatur.

[a] 6. ſexti.

4. LATERVM autem longitudines in campo ABCDE, cognoſcentur, ſi

per circinum inquiratur, quot particulæ in lateribus figuræ OPQRS, contineantur ex illis, quæ in quauis recta ex K, emiſſa ſumptæ fuere. Totidem namq; menſuræ in lateribus campi comprehendentur, vt perſpicuum eſt ex figurarum ſimilitudine.

Vrbis cuiuſuis, ac regionis ſitus quo pacto deſcribatur.

5. EADEM prorſus ratio tenenda eſt in ſitu alicuius atrij vel templi, vel vrbis, aut regionis explorando. Solum in vrbe deſcribenda pro punctis F, & G, eligendæ ſunt duæ turres altæ, è quibus omnes vrbis anguli conſpici poſsint, & quarum diſtantia vnius ab altera vel cognita ſit, vel per præcedentia problemata inueſtigata. In regione autem delineanda pro iiſdem punctis F, & G, duo oppida deligenda ſunt, & in quolibet ex altiſsima turre circumiacentia oppida inſpicienda, vt anguli habeantur, quos rectæ ab oculo menſoris ad ſingula oppida eductæ conſtituunt. Hi autem facilius obſeruabuntur, ſi loco dioptræ, quia nimis alta eſt, ſtatuatur planum erectum in punctis F, & G, ita vt circumductum tranſeat per oppida circumiacentia, ſi intelligatur eſſe productum. Ita namque planum ipſum rectas deſignabit, quæ angulos prædictos conſtituant. Atq; hoc etiam in ſitu vrbium perueſtigando faciendum erit. Itaq; ſi anguli vrbis cuiuſpiam, aut oppida alicuius regiõnis ſint A, B, C, D, E, & duæ turres in F, & G, omnia perficienda erunt, vt ſupra de campi ſitu dictum eſt. Nam ſitum vrbis, vel regionis exhibebit figura OPQRS, diſtantiæque locorum A, B, C, D, E, vnius ab altero cognoſcentur, vt de lateribus campi dictum eſt.

6. QVOD ſi intra ſitum propoſitum duo loca, vel vnus ſaltem non exiſtat, vnde omnes anguli conſpici poſsint, vt in omnibus ædificiis contingit, oportebit ſitum circumire, & inueſtigare angulos per rectas, quæ in campo à baculo ad baculum ducendæ ſunt per catenulam ferream, vel chordam, aut certe erigendum planum, quod per binos baculos tranſire conſpiciatur. Ipſum enim planum dictas rectas exhibebit. In ædificiis autem, ac templis ipſi muri exteriores dictos angulos conſtituunt, quorum amplitudo inueſtigari ſolet ab artificibus inſtrumento quodam ex duabus regulis compacto, quarum vna ſub alteram ingreſſa moueatur, (quod Italis Squadrazoppa dicitur) vt hæc figura indicat. Aperto namque inſtrumento, ſi crura duobus muris angulum efficientibus congruent, dabunt interiora crurium latera in cõcurſu angulum quæſitum.



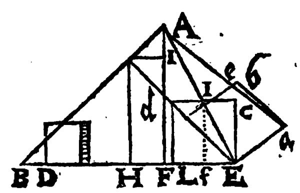
Et ſi idem inſtrumentum interioribus angulis ædificiorum applicetur, dabunt eadem latera interiora crurium angulos, qui à muris efficiuntur. Inuentis angulis, ac notatis, menſuranda erunt interualla inter baculos in campo erectos, vel inter angulos ædificiorum, per catenulam ferream, vel chordã, aut certe in campis, ſi ea interualla longa ſint, per problema 2. vel 36. exploranda in aliqua menſura nota, vt in cubitis. Nam ſi in charta ducatur linea OP, tot particulas æquales continens, quot cubiti, verbi gratia, in interuallo AB, deprehenſi ſunt, & angulus POS, angulo BAE, inuento fiat æqualis: & in recta O S, accipiantur tot particulæ prioribus æquales vſq; ad S, quot cubiti in interuallo AE, reperti ſunt: ac rurſum angulus OSR, angulo AED, æqualis fiat, & ſic deinceps, repræſentabitur ſitus campi per figuram O P Q R S. Idemque de ſitu ædificiorum tam exteriori, quam interiori intelligendum eſt, ſi diligenter anguli, ac diſtantiæ obſeruentur.

LON-

LONGITVDINEM trabis ad Horizontem inclinatæ, cuius portio ſuperior tantum conſpiciatur, vna cum angulo inclinationis, diſtantia baſis à menſore, & altitudine faſtigii ſupra Horizontem, per Quadratum metiri.

PROBLEMA XLIII.

1. Trabs inclinata ſupra murum CD, ſit AB, & menſor in E, conſtitutus è directo ipſius trabis, ita, vt ipſe & trabs in eodem ſint plano, metiri debeat longitudinẽ AB, angulum inclinationis ABE, diſtantiam BE, & altitudinem AF, etiamſi tantum portionem ſupremam AG, videat, baſem occultante muro CD. Si quadratum ad E, bis applicetur, ſemel videlicet inclinatum, vt vnum latus recta tendat ad punctum A, & iterum demiſſum ad Horizontem, ita vt centrum dioptræ ſit in E, & latus EL, Horizonti incumbat. Nam inſpecto puncto A, ex a, [a] ſi fiat, vt vmbra verſa e b, ad latus b a, ita latus a E, ad aliud, gignetur diſtãtia, ſiue hypotenuſa EA. Deinde explorata portione dioptræ EI, vt in ſcholio Probl. 7. Num. 2. docui; [b] Si fiat, vt EI, portio dioptræ inuenta ad repertam hypotenuſam EA, ita fI, lateri quadrati æqualis ad aliud, producetur altitudo AF, quæſita. quod eſt quartum.



[a] 4. ſexti.

[b] 2. ſexti. & componendo.

2. [c] ET ſi rurſus fiat, vt EI, portio dioptræ ad hypotenuſam EA, ita Ef, ipſi cI, æqualis ad aliud, nota fiet diſtantia EF. Non aliter, ſi aliud punctum G, inſpiciatur, cognita fiet hypotenuſa EG, & altitudo GH, vna cum diſtantia EH, ſi nimirum quadratum primo ita applicetur ad E, vt vnum latus tendat recta ad G, &c. quemadmodum in ſcholio probl. 7. oſtendimus.

[c] 2. ſexti. & componendo.

3. IAM ſi EF, inuenta ex cognita EH, ſubducatur, nota relinquetur FH, id eſt, GI, quæ in ſublimi duci cogitetur parallela Horizonti. Eodem modo ſi GH, cognita, vel illi æqualis FI, ex inuenta AF, dematur, reliqua AI, nota fiet. Cum igitur in triangulo rectangulo AGI, in ſublimi conſtituto duo latera AI, IG, cognita ſint, [d] cognoſcetur & baſis AG, & angulus AGI, [e] qui æqualis eſt angulo inclinationis ABE, qui quæritur. quod eſt ſecundum.

[d] 6. triang. rectil.

[e] 29. primi.

4. ITAQVE cum in triangulo rectangulo ABF, latus AF, notũ ſit factum, vna cum angulo B, ac proinde & cum eius complemento BAF, [f] cognitum fiet alterum quoque latus BF, cui ſi adijcietur diſtantia EF, inuenta, tota diſtantia quæſita EB, manifeſta erit. quod eſt tertium.

[f] 4. triang. rectil.

5. DENIQVE in eodem triangulo ABF, rectangulo, ex latere AF, & angulo B, ac proinde & eius complemento BAF, cognitis, [g] cognoſcetur etiam baſis AB, longitudo videlicet trabis. quod eſt primum. Hæc autem nota etiam efficietur, [h] ſi fiat, vt AI, differentia altitudinum cognitarum AF, GH, ad AF, maiorem altitudinem, ita AG, paulo ante nota effecta, ad AB.

[g] 4. triang. rectil.

[h] 2. ſexti. & componendo.

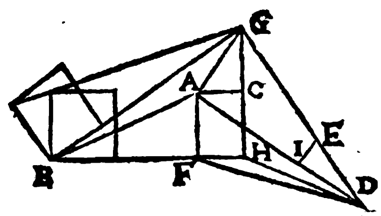
VISIS duarum turrium ſummitatibus, etiamſi baſes propter ædificia interiecta occultentur, diſtantiam tam inter earum baſes, quam inter earundem faſtigia, vna cum ipſarum altitudinibus, ac diſtãtiis à menſore coniicere.

PROBLEMA XLIV.

1. Sint duæ turres A F, GH, quarum ſola faſtigia A, G, cernantur ex loco Horizontis B. Oportet inueſtigare & diſtantiam FH, & interuallum A G, & vtriuſq; turris altitudinem. Sit primum, minor turris A F, inter maiorem, & menſorem, ita vt menſor in eodem cum turribus ſit plano, & minor non occultet faſtigium G, maioris. Per ſchol. probl. 7. inuenietur & vtraque diſtantia B F, BH, & vtraque altitudo A F, G H: ſi nimirum in B, Quadratum ita locetur, vt vnum eius latus cum hypotenuſis BA, BG, coincidat, &c. quod eſt quartum, ac tertium. Et quia tria puncta B, F, H, ponuntur in eadem recta, erit diſtantiarum differentia FH, cognita, hoc eſt, diſtantia inter turrium baſes, quod eſt primum. Rurſus differentia altitudinum GC, nota erit, a ac propterea in triangulo rectangulo ACG, ex duobus lateribus. A C, C G, cognitis, baſis quoque A G, efficietur nota. quod eſt ſecundum.

a 6. triang. rectil.

2. Deinde conſiſtat menſor in D, ita vt ipſe, ac baſes F, H, non iaceant in vna linea recta. Per ſcholium problem. 7. iterum tam altitudines AF, GH, quam diſtantiæ D F, D H, congitæ fient, ſi videlicet quadrati vnum latus hypotenuſis D A, & D G, congruet, &c. quod eſt tertium, ac quartum. Inueſtigatis autem hypotenuſis DA, DG, vt in eodem ſcholio traditũ eſt, cognoſcetur per problema 16. præſertim per ea, quæ Num. 2. eiuſdem problematis ſcripſimus, interuallum A G, ſi nimirum in hypotenuſis accipentur portiones D I, D E, ipſis hypotenuſis proportionales, vt in illo Num. 2. diximus, &c. quod eſt ſecundum. Et quoniam altitudines AF, GH, notæ factæ ſunt, erit etiam earum differentia G C, nota. Quamobrem ex baſe A G, & latere G C, in triangulo rectangulo ACG, cognitis, latus quoq; AC, hoc eſt, diſtantia F H, inter baſes nota erit: quod eſt primum.



SI turres eſſent AF, CH, æquales, eſſet diſtantia A C, inter faſtigia diſtantiæ FH, inter baſes æqualis.

SCHOLIVM.

Vnica regula ad omnes rectas dimetiendas, quando earum extrema videntur.

1. Ex omnibus, quæ demonſtrata ſunt in hoc 3. libro, colligi poteſt regula generalis ad dimetiendas omnes longitudines, ſiue eæ ſint diſtantię in Horizonte, ſiue altitudines, profunditateſue, ſiue hypotenuſę, id eſt, diſtãtię ab oculo ad quodlibet punctum ſiue interualla inter duo puncta, vbicunq; exiſtant: dummodo vtrumq; extremum longitudinis dimetiendæ videri poſsit à menſore, vbicunque etiam ipſe exiſtat. Nam ſi per problema 15. præſertim per ea, quæ Nu. 5. eius problematis ſcripſimus, diſtantiæ à menſore vſque ad duo extrema longitudinis explorentur, inueſtigato prius angulo, quem duæ illæ diſtantiæ, ſiue hypotenuſæ efficiunt, vt in ſcholio probl. 7. Num. 2. docuimus; &c. factum erit, quod proponitur. Itaque ſi diligenter ea, quæ in problem. 15. ac 16. ſcripſimus,

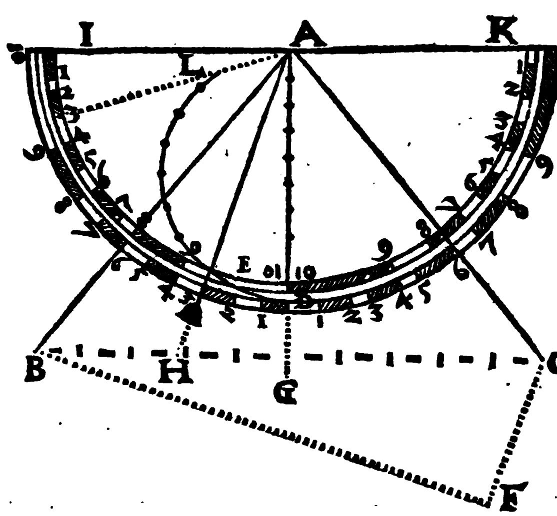
mus, percepta fuerint, eadem ſemper ratio metiendarum rectarum tenenda erit, ſi vtraque extremitas rectæ propoſitæ cerni poteſt, vt diximus.

2. SED neque hoc omittendum puto, quando inuentæ ſunt duæ diſtantiæ à menſoris loco vſque ad duas extremitates rectæ metiendæ, vna cum angulo ab ipſis comprehenſo, certius (quamquam laborioſius) interuallum inter duo illa extrema, hoc eſt, rectam propoſitam inueniri poſſe ex duabus illis diſtantijs, & angulo comprehenſo, per 12. triang. rectil. quam per duas dictas portiones illis diſtantijs proportionales: propterea quod interuallum inter extrema illarum portionum vix accurate per circinum reperiri poſſit. Id quod etiam in problem. 16. ad finem Num. 2. monuimus.

SPATIVM terræ inæquale pro ducendis aquis librare: aut etiam ſi lubet, Horizonti æquidiſtans efficere.

PROBLEMA XLV.

1. QVANDO oblatum ſpatium non eſt valde magnum, excogitauit Ioannes Ferrerius Hiſpanus nobilis Architectus, & Mathematicus, inſtrumentum *Inſtrumenti conſtructio pro librationibus*



percommodum pro librationibus, hoc modo. Compingantur duæ regulæ AB, AC, ex ligno aliquo ſolido, ac duro, æqualium crurum, quæ longitudinem habeant ſatis longam, ita vt diſtantiæ inter extrema B, C, contineat 10. palmos præciſe, aut etiam plures. Deinde ducta recta AG, ad BC, perpendiculari, deſcribatur ex A, ſemicirculus quantuſcunque I D K, cuius ſemidiameter A D, in tot æquales partes ſecetur, quot palmi in diſtantia BC, comprehenduntur. Deſcripto quoq; circa A D, ſemicirculo occulto A E D, transferantur ex D, in eius peripheriam omnia interualla inter D, & puncta rectæ A D: ac tandem ex A, per ſingula puncta ſemicirculi AED, rectæ occultæ emittantur, notenturq; interſectiones earum cum peripheria D I, atque in alteram peripheriam D K, tranſportentur.

V

tentur. Si namque ex A, filum cum perpendiculo egrediatur, & omnes partes excindantur, relictis ſolum cruribus inſtrumenti AB, AC, vna cum peripheria ſemicirculi IDK, cõſtructum erit inſtrumentum ad librationes peropportunum.

Spatium inæquale quo pacto libretur.

2. NAM in campo aliquo, vel horto, poſitis punctis B, C, in terra, ſi filum perpendiculi tranſit per D, erunt puncta B, C, in terra eiuſdem altitudinis, ita vt ſi ſpatium interiectum BC, complanetur, ſpatium illud horti, vel campi ſit libratũ, hoc eſt, Horizonti parallelum.

SI vero filum perpendiculi AH, abſcindet ex quadrante DI, aliquot partes, nimirum 3. erit punctum C, tribus palmis altius puncto B, atque ita fodiendum ibi erit ad altitudinem trium palmorum, vt complanatum ſpatium inter B, & infimum punctum effoſſum Horizonti ſit parallelum. Quod ſi filum perpendiculi abſcinderet ex alio quadrante DK, quotcunq; partes nimirum 5. eſſet punctum C, depreſsius quinque palmis puncto B. Quare tunc ſuperimponenda foret puncto C, terra ad altitudinem 5. palmorum, vt ſpatium inter B, & ſupremum punctum terræ ſuperimpoſitæ complanatum Horizonti æquidiſtet. Complanato ſpatio inter B, & aliud punctum prope C, ſiue effoſſum, ſiue eleuatum, iteranda erit eadem operatio, poſito crure A B, in puncto inuento, &c. Atque ita deinceps procedendum eſt vſque ad vltimum ſignum in horto, vel campo propoſitum. Hoc ita demonſtratur. Concipiatur ducta recta BC, & recta CF, filo perpendiculi AH, duci parallela, quæ ad Horizontem erit perpendicularis, ac proinde ducta BF, ad CF, perpendicularis Horizonti æquidiſtabit. Et quoniam in triangulis A G H, B F C, recti anguli E, F, æquales ſunt, [a] nec non & alterni C, H, [b] æquiangula erunt triangula; Eſt autem A G H, triangulo A D E, æquiangulum, quod & recti G, E, æquales ſint, & A, communis. Igitur triangula quoque A D E, B C F, æquiangula erunt. [c] Ideoque erit vt A D, 10. partium ad D E, 3. partium, ita B C, 10. palmorum, ad C E, ac proinde C F, 3. palmos continebit, tot nimirum, quot partes filum perpendiculi abſcindit ex ſemicirculo IDK. Quod ſi quadratum C F, nimirum in dato exemplo 9. palmi (cum latus C F, ſit 3. palmorum) dematur ex 100. id eſt, ex quadrato BC. 10. palmorum, reliquum fiet quadratum 91. lineæ horizontalis B F, cuius quadrata radix $9\frac{10}{19}$. dabit horizontalem diſtantiam B F, à puncto B, vſque ad perpendicularem CF.

[a] 29. primi.
[b] 32. primi.
[c] 4. ſexti.

HÆC eadem diſtantia horizontalis B F, cognoſcetur quoque ſine numerorum ſupputatione, hoc modo. Ex A, deſcribatur alius ſemicirculus, & in ſemicirculum AED, transferantur omnia interualla inter A, & puncta rectæ AD, ac tandem ex A, rectis occultis emiſsis per puncta in ſemicirculo notata, obſeruētur earum interſectiones cum ſemicirculo ex A, deſcripto, transferanturque in alterum quadrantem verſus K. Nam quot partes filum perpendiculi AH, ex vltimo hoc ſemicirculo ex A, deſcripto abſcindet, tot palmos continebit horizontalis longitudo BF: [d] propterea quod eadem eſt proportio DA, ad AE, quę CB, ad BF, quippe cum triangula D A E, CBF, oſtenſa ſint ſimilia. Cum ergo ex conſtructione, recta AE, complectatur tot partes rectę A D, quot ex A, in ſemicirculum AED, vſque ad filum perpendiculi ſunt translatæ, (vt in noſtro exemplo partes propemodum $9\frac{1}{2}$.) comprehendentur totidem palmi rectæ CB, in recta BF. Eſt autem conſideratione dignum, partes poſterioris ſemicirculi contrario ordine ſimiles eſſe partibus prioris ſemicirculi IDK. Nam ſi verbi gratia recta D E, quæ æqualis eſt tribus partibus rectæ D A, initium ſumentibus à D, accipiatur

[d] 4. ſexti.

tur æqualis AL, trium quoque partium rectæ AD, initium ſumentium à puncto A, ducaturq; recta AL, fiet angulus IAL, æqualis angulo DAE. Quia enim arcus DE, AL, æquales ſunt, erunt quoq; reliqui AE, DL, æquales. [a] Igitur anguli ADE, DAL, æquales erunt: ideoq; & reliqui DAE, IAL, æquales inter ſe erunt: propterea quod tam duo ADE, DAE, propter rectum E, in ſemicirculo, quam duo DAL, IAL, vni recto ſunt æquales. Ex quo fit, rectas AI, AL, ex poſteriori ſemicirculo ex A, deſcripto auferre arcum ſimilem arcui in priori ſemicirculo IDK, inter rectas AD, AE, intercepto: Eademque ratio eſt de alijs. [a] 27. tertij.

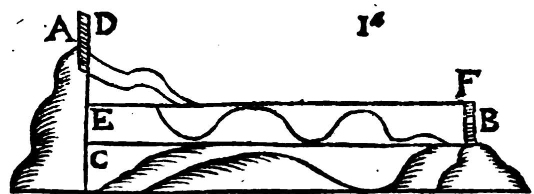
QVANDO inſtrumentum ſæpius repetitum fuit, quæritur autem, quanto altius, vel depreſsius ſit primum punctum, quam vltimum, ſcietur hoc per altitudines, depreſsiones ue intermedias. Vt ſi primus locus fuerit altior quam ſecundus, quinque palmis; & hic altior quam tertius, duobus palmis; hic autem depreſsior, quam quartus locus, tribus palmis; & hic denique altior quam vltimus locus, vno palmo, colligemus primum locum altiorem eſſe vltimo loco quinque palmis. Nam primus locus erit altior tertio ſeptem palmis, cum primus ſecundum quinque palmis ſuperet, & ſecundus tertium, duobus. Et quia tertius ſuperatur à quarto, tribus palmis, ſuperabit primus quartum quatuor palmis. Cum ergo hic altior ſit, quam vltimus, vno palmo, erit primus altior, quam vltimus, quinque palmis, & ſic de cæteris.

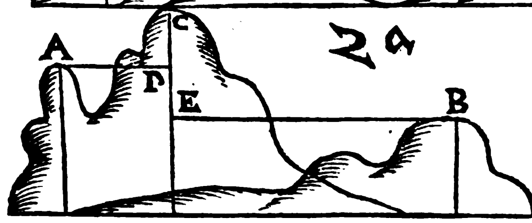
3. CÆTERVM quando duo loca multum inter ſe diſtant, explorabimus per quadratum ſtabile, quanto alter altero ſit altior, vel humilior, hac ratione. Sit primus locus A, ſecundus B, in prima figura. Erecto baculo AD, ſtaturæ menſoris æquali, concipiatur ex B, ad perpendiculum loci A, altioris perpendicularis BC, (per quadratum autem facilè cognoſces, vter locorum ſit altior. Nam quando per latus ſupremum Horizonti æquidiſtans, ex A, locus B, cernitur, eadem eſt altitudo vtriuſque loci: Si vero deprimendum eſt illud, vt B, videri poſſit, erit locus A, altior: Si denique idem latus attollendum eſt, erit locus B, altior.) Nam ſi per doctrinam ſcholij probl. 9. inueſtigetur altitudo DC, & auferatur menſoris ſtatura AD, reliqua erit altitudo AC: Ac tanto erit altior locus A, loco B. Et ſi è contrario in loco humiliori B, erigatur baculus BF, ſtaturæ mēſoris æqualis, & per doctrinam ſcholij probl. 7. inquiratur altitudo AE, vſque ad perpendicularem FE, per cogitationem ad AC, ductam, & apponatur ſtatura menſoris BF, nota euadet tota altitudo AC; Ac tantò depreſsior erit locus B, quam locus A. Atque ita ex loco A, ad locum B, conduci poteſt aqua, non autem contra. *Librationes pro conducendis aquis, quo modo fiant.*

4. QVOD ſi inter primum locum A, & ſecundum B, interpoſitus ſit mons C, ita vt ex A, locus B, videri nequeat, vt in 2. figura, ita procedemus. Ex A, per ſcholium problem. 7. indagabimus altitudinem CD. Deinde ex C, per ſcholium problem. 9. explorabimus altitudinem CE, ductis nimirum ad CE, perpendicularibus AD, BE. Nam hac ratione concludes locum A, altiorem eſſe loco B, quantitate DE. Quamobrem ſi perfodiatur mons C, vel aquæductus circa ipſum extruatur, conduci poterit aqua ex A, ad B, & non contra.

5. POSTREMO ſi in monte aliquo, vel in eius latere ſit aqua vel in puteo aliquo profundo, vel in foſſa aliqua profunda CD; & ſcire deſideres, an ex D, ad B, conduci poſsit aqua per aquæductum, ita erit agendū. Primū ſi CD, puteus eſt, inueſtiga eius profunditatem CD, per probl. 27. ſi vero foſſa, aut vorago ali-

qua, per problema 28. Deinde concipiatur ex B, ad perpendiculum CD, duci perpendicularis BE; atq; per ſcholium probl. 7. ex B, inueſtigetur altitudo CE.





Si namq; hęc deprehenſa fuerit ęqualis profunditati inuentę CD, habebit fundus aquę D, eandem altitudinem cum loco B, ac proinde aqua ad B, ex D, defluere non poterit per aquęductum: Si vero altitudo CE, reperta fuerit maior quam profunditas CD, conduci poterit aqua ex D, in locum B: Si denique altitudo CE, inuenta fuerit minor profunditate CD, erit locus B, altior quam aqua iuxta D, atque idcirco defluere non poterit ad B.

Ex his non obſcurè intelliges, vbi aquęductus vtiliter ſint extruendi, & vbi non.

FINIS LIBRI TERTII.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER QVARTVS.

AREAS Superficierum planarum inueſtigans.

QVEMADMODVM linea recta rectas lineas metitur, ita Geometra ſuperficies planas per ſuperficiem quadratam, & corpora, ſiue ſolida, per corpus cubicum metiri ſolent. Nam ſicut linea recta dicitur 100. palmorum in qua linea vnius palmi centies continetur, ita ſuperficies plana dicitur 100. palmorum, quæ centies quadratum continet, cuius latus palmo æquale eſt: & ſolidum 100. palmorum illud dicitur, quod complectitur 100. cubos, quorum quilibet latus habet vnius palmi: quod de aliis etiam menſuris, vt de pede, cubito, paſſu, milliario, &c. intelligendum eſt. Quia vero qualibet ſuperficies tot quadrata cuiuſque menſuræ comprehendere dicitur, quot in parallelogrammo rectangulo, quod illi æquale eſt, continentur, explicandum primo loco erit, qua ratione area cuiuſlibet rectanguli cognoſcatur. Deinde de area triangulorum, quadrilaterorum non rectangulorum, cæterarumque figurarum plurium laterum agemus: ac denique circulum, eiuſque partes metiemur.

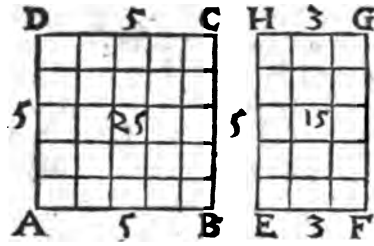
Penes quid menſura linearum rectarum, planarum ſuperficierum & ſolidorum ſumantur.

DE AREA RECTANGVLORVM CAPVT I.

Area quadrati, & altera parte longioris quo pacto cognoſcatur.

QVONIAM Euclides defin. 1. lib. 2. docet, omne parallelogrammum rectangulum contineri ſub rectis duabus lineis, quæ rectum comprehendunt angulum; manifeſtum eſt, aream cuiuſque rectanguli produci ex multiplicatione duorum laterum circa rectum angu-

angulum, vnius in alterum; adeo vt in quadrato ſatis ſit ducere vnum latus in ſe, vt eius area cognoſcatur: quippe cum duo latera circa vnum angulum rectum æqualia ſint. Vt in quadrato ABCD, cuius ſingula latera quinos palmos continent, ſi latus AB, quinque palmorum in ſe ducatur, producentur 25. quadrata, quorum quodlibet habet latus vnius palmi; atque tot palmos quadratos continere dicetur area quadrati ABCD. At area rectanguli altera parte longioris EFGH, cuius vnum latus circa rectum angulum continet 5. pedes, & alterum 3. dicetur continere 15. palmos quadratos, propterea quod ex mutua laterum 5. & 3. multiplicatione numerus 15. procreatur.



Vt campus rectangulus menſuretur, quid agendum.

2. ITAQVE ſi campum aliquem rectangulum, vel parallelogrammum rectangulum metiri iubeamur, menſuranda erunt per aliquam menſuram notam, vt per palmum, vel pedem, &c. duo latera circa angulum rectum. Nam vno in alterum ducto, area propoſiti campi, vel parallelogrammi rectanguli producetur, vt dictum eſt.

DE AREA TRIANGVLORVM
CAPVT II.

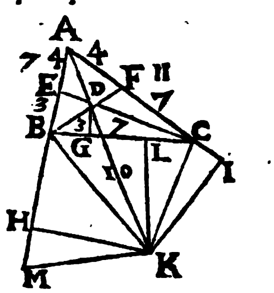
1. QVANDO trianguli omnia tria latera cognita ſunt, duabus viis eius area cognoſci poteſt. Prima, quæ accuratiſſima eſt, ita ſe habet. *Colligantur omnia latera in vnam ſummam: Ex huius ſumma ſemiſſe ſubtrahantur ſingula latera, vt habeantur tres differentiæ inter illam ſemiſſem, & latera ſingula: Poſtremo tres hæ differentiæ, & dicta ſemiſſis inter ſe mutuo multiplicentur. Producti enim numeri radix quadrata erit area trianguli quæſita.*

Verbi gratia, ſi latera ſint 10. 17. 21. erit ſumma ex illis collecta 48. & ſemiſſis 24. Differentiæ autem inter hanc ſemiſſem, & latera erunt 14. 7. 3. Hæ inter ſe multiplicatæ (ducendo primum 14. in 7. deinde productum in 3.) faciunt 294. quæ ducta in 24. ſemiſſem prædictam, producunt 7056. cuius numeri radix quadrata 84. erit area dicti trianguli, cuius latera ſunt 10. 17. 21. Rurſus ſi in alio quopiam triangulo latera ſint 13. 14. 15. inueniemus eandem aream. Nam ſũma laterum eſt 42. ſemiſsis 21. Differẽtię inter hanc ſemiſſem, & tria latera ſunt 8. 7. 6. quæ inter ſe multiplicatæ faciunt 336. quæ ducta in 21. ſemiſſem prædictam efficiunt 7056. cuius numeri quadrata radix 84. dabit aream trianguli, quod lateribus 13. 14. 15. continetur. Denique ſi detur triangulum ABC, in quo latus AB, 7. BC, 10. & AC, 11. ſumma omnium eſt 28. & ſemiſsis 14. quæ latera ſuperat hiſce numeris 7. 4. 3. qui inter ſe multiplicati faciunt 84. quę ducta in 14. ſemiſſem ſummæ gignunt numerum 1176. cuius radix quadrata $34\frac{20}{69}$. ferè dabit aream trianguli ABC. Ex quo colliges, non omnis trianguli aream eſſe numerum rationalem: propterea quod numerus vltimo loco productus non eſt ſemper quadratus, vt in poſtremo hoc exemplo contigit.

HANC

HANC praxim, ſiue regulam, quæ exquiſitiſsima eſt, vt dixi, ita in triangulo ABC, demonſtrabimus. Diuiſis angulis ABC, ACB, bifariam per rectas BD, CD, coeuntes in D, ducantur ex D, ad ſingula latera perpendiculares DE, DF, DG, iungaturque recta AD. Quoniam igitur duo anguli E, DBE, in triangulo DEB, æquales ſunt duobus angulis G, DBG, in triangulo DGB, & latus DB, commune; [a] erunt tam latera DE, DG, quam BE, BG, æqualia. Eodemq; modo tam latera DF, DG, æqualia erunt in triangulis DFC, DGC: ac proinde DE, DF, (cum vtraque ipſi DG, ſit oſtenſa æqualis) inter ſe æquales erunt: ideoque omnes tres perpendiculares DE, DF, DG, æquales inter ſe erunt. [a] *26. primi.*

[b] DEINDE quia quadrato ex AD, æqualia ſunt tam quadrata ex AE, ED, [b] *47. primi.* quam quadrata ex AF, FD; æqualia erunt quadrata ex AE, ED, quadratis ex AF, FD. Ac proinde ablatis æqualibus quadratis rectarum ED, FD, æqualium, reliqua quadrata rectarum AE, AF, æqualia erunt: propterea que & rectæ ipſæ AE, AF, æquales erunt. Igitur cum latera AE, AD, trianguli ADE, lateribus AF, AD, trianguli ADF, æqualia ſint, & baſis ED, baſi FD; [c] erit angulus DAE, angulo DAF, æqualis. [c] *8. primi.*



QVIA verò AE, ipſi AF, & EB, ipſi BG, æqualis eſt oſtenſa, erit tota AB duabus AF, BG, æqualis: additiſque æqualibus CG, CF, duæ AB, CG, duabus AC, BG, æquales erunt. Tam ergo duæ AB, CG, quam duæ AC, BG, ſemiſſem trium laterum AB, BC, AC, conſtituent. Quocirca CG, vel CF, differentia erit inter ſemiſſem laterum, & latus AB. Item BG, vel BE, differentia inter eandem ſemiſſem, & latus AC. Denique cum AB, CG, ſemiſſem laterum efficiant, ſitque BG, ipſi BE, æqualis, vt oſtendimus, conſtituent quoque BC, AE, ſemiſſem eorundem laterum: ideoque AE, differentia erit inter laterum ſemiſſem, & latus BC. Tres ergo rectæ AE, EB, CG, & ſemiſſem laterum conſtituunt, & tres differentias inter ſemiſſem laterum, & tria latera trianguli.

PRODVCTIS iam AB, AC, ſit BH, ipſi CG, & CI, ipſi BG, æqualis; ita vt tam AH, ſemiſsi laterum, rectis videlicet AB, CG, quam AI, eidem ſemiſsi laterum, rectis nimirum AC, BG, ſit æqualis, conſtetque ex tribus differentiis ante dictis. Ducta quoque HK, ad AH, perpendiculari, quæ cum AD, producta conueniat in K; connectantur rectæ KI, KB, KC. Et quia duo latera AH, AK, trianguli AHK, duobus lateribus AI, AK, trianguli AIK, æqualia ſunt, anguloſque ad A, continent æquales, vt ſupra oſtendimus, [d] æquales quoque erunt & baſes HK, IK, & anguli H, I. Cum ergo H, per conſtructionem ſit rectus, rectus etiam erit I. [d] *4. primi.*

ABSCINDATVR præterea BL, ipſi CG, vel BH, æqualis, vt proinde reliqua CL, reliquæ BG, vel ipſi CI, æqualis ſit, iungaturq; recta KL. Producta autem BH, ſumatur HM, ipſi CI, æqualis, connectaturque recta LM. Et quia duo latera KH, HM, trianguli HMK, duobus lateribus KI, IC, trianguli CIK, æqualia ſunt, anguloſque H, I, continent æquales, vtpote rectos: [e] erunt quoque baſes KM, KC, æquales: atque adeò cum duo latera BM, BK, trianguli BMK, duobus lateribus BC, BK, trianguli BCK, æqualia ſint, (eſt namque BM, ipſi BC, æqualis, quod partes BH, HM, partibus BL, LC, ſint æquales) ſitque baſis [e] *8. primi.*

KM, baſi

[a] 8. primi. KM, baſi KC, oſtenſa æqualis; [a] erunt quoque anguli KBM, KBC, æquales. Itaque quoniam duo latera BH, BK, trianguli BHK, duobus lateribus BL, BK, trianguli BLK, æqualia ſunt, æqualeſq; continent angulos ad B, vt oſtendimus, [b] 4. primi. [b] erunt & baſes HK, KL, & anguli H, L, æquales. Cum ergo H, ex conſtructione rectus ſit, erit quoque L, rectus. Quare cum latera KH, KB, trianguli KBH, [c] 8. primi. lateribus KL, KB, trianguli KBL, æqualia ſint, & baſis BH, baſi BL, [c] erunt etiam anguli BKH, BKL, æquales.

QVONIAM autem ex iis, quæ ad prop. 32. lib. 1. Euclidis demonſtrauimus, quatuor anguli quadrilateri BHKL, quatuor rectis ſunt æquales: erunt demptis duobus rectis H, L, duo HBL, HKL, duobus rectis æquales; ideoque [d] 13. primi. duobus angulis HBL, EBL, æquales, [d] quod hi quoque duobus ſint rectis æquales, ablatoque communi HBL, reliquus HKL, reliquo EBL, æqualis erit: ac propterea & HKB, ipſi EBD, dimidius dimidio, æqualis erit. Cum ergo & [e] 32. primi. rectus H, recto E, ſit ęqualis, [e] erit quoque reliquus HBK, in triangulo HBK, reliquo EDB, in triangulo EDB, æqualis; ac proinde triangula BHK, DEB, æ- [f] 4. ſexti. quiangula erunt. [f] Quapropter erit vt DE, ad EB, ita BH, ad HK; atque idcir- [g] 19. ſeptimi. co ſi lineæ hę ad numeros contrahantur, [g] erit numerus, qui fit ex DE, in HK, [h] 7. quinti. æqualis numero, qui fit ex EB, in BH. [h] Eandem ergo proportionem habebit quadratus ex DE, ad productum ex DE, in HK, & ad productum ex EB, in BH. [i] 17. ſeptimi. [i] Sed ita eſt quadratus ex DE, ad productum ex DE, in HK, vt DE, ad HK: propterea quod DE, multiplicans DE, & HK, fecit & quadratum ex DE, & productum ex DE, in HK. Erit igitur quadratus quoque ex DE, ad productum ex [k] 28. primi. EB, in BH, vt DE, ad HK. Vt autem DE, ad HK, ita eſt AE, ad AH. [k] Nam cum parallelæ ſint DE, HK, æquiangula erunt triangula AED, AHK, ex coroll. prop. [l] 4. ſexti. 4. lib. 6. Euclid. [l] Igitur erit vt AE, ad ED, ita AH, ad HK, & permutando, vt AE, ad AH, ita ED, ad HK. Igitur erit quadratus quoque ex DE, ad produ- [m] 19. ſept. ctum ex EB, in BH, vt AE, ad AH. [m] Qui ergo fit ex quadrato ipſius DE, in AH, æqualis erit ei, qui fit AE, in productum ex EB, in BH. Igitur & numerus, qui ex producto ex quadrato ipſius DE, in AH, multiplicato in AH, gignitur, æqualis erit numero, qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, multiplicato in eundem AH, procreatur. (Nam quia ęquales numeri, nimirum productus ex quadrato ipſius DE, in AH, & productus ex AE, in productum ex [n] 18. ſept. EB, in BH, eundem numerum AH, multiplicant [n] habebunt producti, nimirum numerus, qui ex producto ex quadrato ipſius DE, in AH, multiplicato in AH, gignitur, & numerus qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, multiplicato in eundem AH, procreatur, eandem proportionem, quam multiplicantes. Cum ergo hi æquales ſint, erunt & illi producti æquales) hoc eſt, numerus productus ex AH, in AH, id eſt, quadratus ipſius AH, ductus in quadratum ipſius DE, (Per ſcholium enim propoſ. 19. lib. 8. Euclid. quomodocunque tres numeri inter ſe multiplicentur, idem ſemper numerus procreatur) æqualis erit numero, qui ex producto ex AE, in productum ex EB, in BH, nempe ex producto trium differentiarum AE, EB, BH, inter ſe multiplicatarum, ducto in AH, id eſt, in ſemiſſem laterum gignitur. At ex quadrato ipſius DE, in quadratum ipſius AH, producitur quadratus numerus areæ trianguli ABC, vt mox oſtendemus. Igitur & ex producto trium exceſſuum AE, EB, BH, inter ſe multiplicatorum, ducto in AH, ſemiſſem laterum AB, BC, AC, producitur idem quadratus numerus areæ trianguli ABC: ac pro-

ac proinde radix quadrati huius numeri erit dicti trianguli area: quod erat demonſtrandum.

QVOD autem ex quadrato ipſius D E, in quadratum ipſius A H, producatur quadratus numerus areæ trianguli ABC, in hunc modum demonſtro. Quoniam vt Num. 2. oſtendemus, ex D E, in ſemiſſem lateris A B, producitur area trianguli ADB; Et ex eadem D E, hoc eſt, ex D G, in ſemiſſem lateris BC, efficitur area trianguli B D C; Item ex eadem DE, id eſt, ex D F, in ſemiſſem lateris A C, gignitur area trianguli A D C: Quod autem fit ex D E, in ſemiſſes laterum AB, BC, AC, [a] æquale eſt ei, quod fit ex DE, in AH, ex illis ſemiſsibus conflatam. *[a] 1. ſecundi.* fiet propterea area trianguli A B C, ex DE, in AH, ac propterea (contractis hiſce lineis ad numeros) quadratus numerus areæ eiuſdem trianguli procreabitur ex quadrato ipſius DE, in quadratum ipſius A H. Quando enim duo numeri ſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem, producent eorum quadrati ſe mutuo multiplicantes quadratum illius producti, quod ita perſpicuum fiet.

A .. B ...
C .... D ...... E ....
F 36.

Duo numeri A, & B, ſe multiplicantes faciant D; & ambo ſeipſos multiplicantes faciant C, & E: Denique hi quadrati C, & E, ſe multiplicantes faciant F. Dico F, eſſe quadratum ipſius D. Cum enim A, multiplicans ſeipſum, & B, faciat C, & D: [b] erit vt A, ad B, ita C, ad D: *[b] 17. ſept.* Eademque ratione, cum B, multiplicans A, & ſeipſum, faciat D, & E, erit vt A, ad B, ita D, ad E: ideoque C, D, E, continuè proportionales erunt. [c] Quare qui fit ex C, in E, numerus videlicet F, æqualis erit ei, *[c] 20. ſept.* qui fit ex D, in ſe: ac proinde F, quadratus erit ipſius D. Quæ cum ita ſint, cum ex DE, in AH, producatur area trianguli A B C, vt oſtendimus, fiet ex quadrato ipſius DE, in quadratum ipſius AH, quadratus numerus areæ eiuſdem trianguli ABC. Quod erat demonſtrandum.

2. ALTERA via, qua ex datis lateribus area trianguli colligitur, hæc eſt. *Area trianguli quo pacto aliter ex datis lateribus colligatur.*

Ex quouis angulo ad latus oppoſitum, etiam protractum, ſi opus eſt, perpendicularis ducatur. Hæc enim (ſi eius quantitas cognita fuerit) multiplicata in ſemiſſem baſis, ſeu dicti lateris, vel eius ſemiſſis in totam baſem producet aream trianguli, Vel ſi mauis, tota perpendicularis ducta in totam baſem, numerum procreabit, cuius ſemiſſis aream trianguli offeret:

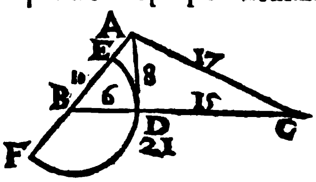
NAM vt lib. 7. propoſ. 1. demonſtrauimus, eſt area trianguli æqualis rectangulo comprehenſo ſub perpendiculari, & ſemiſſe baſis, vel ſub ſemiſſe perpendicularis, ac tota baſe; Item ſemiſsi rectanguli ſub perpendiculari, ac tota baſe comprehenſi. Cum ergo per cap. 1. huius lib. area rectanguli illius producatur ex multiplicatione vnius lateris circa angulum rectum in alterum: hoc eſt, ex perpendiculari ([d] quæ vni lateri æqualis eſt) in ſemiſſem baſis trianguli, vel ex *[d] 34. primi.* ſemiſſe perpendicularis ([e] quæ ſemiſsi lateris eſt æqualis) in totam baſem: vel *[e] 34. primi.* denique rectangulum trianguli duplum ex perpendiculari in totam baſem trianguli: conſtat propoſitum.

MAGNITVDO autem dictæ perpendicularis, ſicuti & baſis, in metiendis campis inueſtiganda eſt per catenulam ferream, quod hæc neque intendatur, neque remittatur, aut certè, ſi omnia latera nota ſint, Geometricè hoc modo. Sit triangulum ABC, cuius latus AB, ſit 10. & B C, 21. & A C, 17. Primum inue-

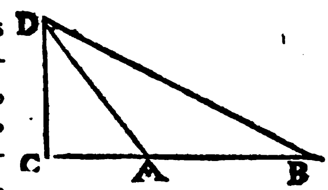
 ſtiganda

Segmenta baſis, quæ à perpendiculari abſcinduntur, quo pacto cognoſcatur.

ſtiganda ſunt ſegmenta BD, CD, inter perpendicularem, per ea, quæ lib. 1. cap. 3. Nũ. 9. ſcripſimus, hac ratione. Fiat vt latus BC, in quod cadit perpendicularis AD, (Semper autem eſſet demittenda perpendicularis in maximum latus, vt intra triangulum caderet) ad ſummam aliorum duorum laterum AB, AC, nimirum vt 21. ad 27. ita differentia eorundem laterum, videlicet 7. ad aliud. Producetur enim numerus 9. (qui quoniam minor eſt latere BC, argumento eſt, perpendicularem intra triangulum cadere. Si enim maior eſſet, caderet extra, vt propoſ. 9. noſtrorum triangulorum rectil. oſtendimus) qui ablatus ex latere BC, id eſt, ex 21. relinquit 12. cuius ſemiſsis 6. dabit minus ſegmentum BD, prope minus latus AB, quę eadem ſemiſsis ex latere BC, ſubtracta reliquum faciet maius ſegmentum CD, nimirum 15. iuxta maius latus AC.



Sit rurſus triangulum ABD, cuius latus AB, 12. AD, 11. & BD, 20. demittenda autem ſit perpendicularis ex D, ad AB. Fiat, vt latus AB, 12. ad ſummam aliorum duorum 31. ita differentia eorundem, nimirum 9. ad aliud. Producetur enim numerus 23 $\frac{1}{4}$. (qui quoniam maior eſt latere AB, argumento eſt, perpendicularem cadere extra triangulum, angulumque A, eſſe obtuſum,) ex quo latus AB, 12. ſubtractum, relinquit, 11 $\frac{1}{4}$. Huius autem numeri ſemiſsis 5 $\frac{5}{8}$. dabit ſegmentum exterius AC, inter perpendicularem, & angulum obtuſum: eademque ſemiſsis addita lateri AB, efficiet aliud ſegmentum BC, inter perpendicularem, & angulum acutum 17 $\frac{5}{8}$. Atque hæc ratio expeditiſsima eſt.



Aliter. Sit ducenda perpendicularis ad maximum latus BC, in priori triangulo ABC, quæ neceſſario cadet intra triangulum; [a] propterea, quod angulus A, maior eſt vtrolibet BC; ac proinde vterque horum acutus eſt. [b] Quoniam autem quadratum rectę AB, minus eſt quadratis rectarum AC, BC, rectangulo bis comprehenſo ſub BC, & ſegmento CD, inter C, & perpendicularem: ſi quadratum rectę AB, 100. detrahatur ex ſumma quadratorum rectarum AC, BC, id eſt ex 730. reliquum fiet rectangulum 630. bis comprehenſum ſub BC, & ſegmento CD, inter C, & perpendicularem. Quare eius ſemiſſis 315. æqualis erit rectangulo illi ſemel ſumpto: ac proinde hoc rectangulo 315. diuiſo per latus BC, 21. dabit Quotiens 15. ſegmentum CD, prope angulum acutum C, cui opponitur latus AB, cuius quadratum ex ſumma reliquorum quadratorum detractum fuit. Ablato autem ſegmento CD, 15. ex latere BC, 21. remanebit alterum ſegmentum BD, 6. Eodem pacto, [c] quia quadratum rectę AC, minus eſt quadratis rectarum AB, BC, rectangulo bis comprehenſo ſub CB, & ſegmento BD, inter B, & perpendicularem: ſi quadratum rectę AC, 289. ſubducatur ex ſumma 541. quadratorum rectarum AB, BC, reliquum fiet rectangulum 252. comprehenſum bis ſub CB, & ſegmento BD, inter B, & perpendicularem. Quare eius ſemiſsis 126. æqualis erit illi rectangulo ſemel ſumpto: ac proinde hoc rectangulo 126. diuiſo per latus CB, 21. dabit Quotiens 6. ſegmentum BD, iuxta acutum angulum B, cui latus AC, quadrati ex duobus aliis quadratis detracti opponitur.

a 18. primi.
b 13. ſecundi.
c 13. ſecundi.

Quo-

Quo ſegmento 6. dempto ex latere B C, 21. remanebit alterum ſegmentum CD, 15.

DEINDE in poſteriori triangulo ABD, ducenda ſit perpendicularis ad latus AB, non maximum. Et quia latus DB, latere AD, maius eſt; [a] erit angulus A, maior angulo B. [b] Cum ambo ergo ſimul ſint duobus rectis minores, erit ſaltem minor B, acutus: [c] ac proinde quadratum rectæ A D, minus erit quadratis rectarum A B, B D, rectangulo bis comprehenſo ſub latere AB, & ſegmento inter B, & perpendicularem. Si ergo quadratum rectę AD, 121. ſubtrahatur ex ſumma quadratorum rectarum A B, B D, id eſt, ex 544. reliquum fiet rectangulum bis comprehenſum ſub A B, & ſegmento, inter B, & perpendicularem, nimirum 423. ideoque eius ſemiſsis $211\frac{1}{2}$. æqualis erit illi rectangulo ſemel ſumpto. Quare ſi rectangulum hoc $211\frac{1}{2}$. diuidatur per latus AB, 12. dabit Quotiens $17\frac{5}{8}$. ſegmentum inter B, & perpendicularem. quod quia maius eſt latere A B, argumento eſt, perpendicularem DC, cadere extra triangulum: ac proinde angulum A, obtuſum eſſe. Quod ſi ex hoc ſegmento $17\frac{5}{8}$. dematur latus AB, 12. remanebit exterius ſegmentum $5\frac{5}{8}$.

[a] *18. primi.*
[b] *17. primi.*
[c] *13. primi.*

QVANDO conſtat, angulum A, eſſe obtuſum, ideoque perpendicularem DC, extra triangulum cadere, reperiemus eadem ſegmenta BC, CA, hoc etiam modo. [d] Quoniam quadratum lateris BD, ſuperat quadrata laterum A B, AD, rectangulo bis comprehenſo ſub latere A B, & ſegmento exteriore AC; ſi ſummam quadratorum rectarum AB, AD, 265. detrahatur ex quadrato lateris BD, 400. reliquum erit rectangulum 135. bis comprehenſum ſub AB, AC: & eius ſemiſsis $67\frac{1}{2}$. illi rectangulo ſemel ſumpto æqualis erit; ac proinde hoc rectangulo $67\frac{1}{2}$. diuiſo per latus A B, 12 indicabit Quotiens $5\frac{5}{8}$. ſegmentum exterius CD; cui ſi addatur latus A B, 12. conflabitur ſegmentum BC, $17\frac{5}{8}$. Sed prior ratio, quæ ex libr. 2. Euclid. non pendet, expeditior eſt, ac proinde tenenda: quamuis auctores alij poſteriorem hanc viam plerunque ſequantur.

[d] *12. ſecundi.*

Quæ ratio tenenda in ſegmentis exquirendis.

INVENTIS ſegmentis à perpendiculari factis, ita magnitudinem perpendicularis cognoſcemus.

Perpendicularis in triangulo quo pacto reperiatur.

DIFFERENTIA inter vtrumuis ſegmentum, & latus adiacens ducatur in ſummam ex eodem ſegmento & latere conflatam. Radix enim quadrata numeri producti perpendicularem exhibebit notam, vt lib. 1. cap. 3. Num. 17. demonſtrauimus.

VERBI gratia. In priori triangulo ABC, ſi differentia 4. inter ſegmentum B D, & latus AB, hoc eſt, inter 6. & 10. multiplicetur per 16. nempe per ſummam eiuſdem ſegmenti BD, & lateris AB; gignetur numerus 64. cuius radix quadrata 8. dabit perpendicularem A D. Pari ratione ſi differentia 2. inter ſegmentum CD, & latus AC, hoc eſt, 15 & 17. ducatur in 32. id eſt, in ſummam eiuſdem ſegmenti CD, & lateris A C: procreabitur numerus 64. cuius radix quadrata 8. præbebit perpendicularem AD, vt prius.

IN poſteriori autem triangulo ABD, ſi differentia $5\frac{3}{8}$. inter ſegmentum AC, & latus AD, nimirũ inter $5\frac{5}{8}$. & 11. ducatur in $16\frac{5}{8}$. hoc eſt, in ſummam eiuſdem ſegmenti AC, & latus AD: producetur numerus $\frac{5719}{64}$. ſiue $89\frac{23}{64}$. cuius radix quadrata in numeris exhiberi non poteſt, ſed paulo maior eſt, quã appoſita fractio cuius numerator eſt $75\frac{94}{151}$. denominator aũt 8.

$75\frac{94}{151}$
8

quæ

quæ ad hunc numerum $9\frac{547}{12608}$. reducetur, ſi numerator per denominatorem diuidatur: atque tanta eſt fermè perpendicularis DC, nimirum $9\frac{547}{12608}$. Sic etiam ſi differentia $2\frac{3}{8}$. inter ſegmentum BC, $17\frac{5}{8}$. & latus BD, 20. multiplicetur per $37\frac{5}{8}$. ſummam eiuſdem ſegmenti BC, & latus BD: gignetur idem numerus, qui prius, $\frac{5719}{64}$. hoc eſt, $89\frac{23}{64}$. cuius radix quadrata paulo maior eſt, quam $9\frac{547}{12608}$. veluti prius. Atque hęc ratio ſatis expedita eſt.

a 47. primi.

ALTER. [a] Quoniam quadratum rectę AB, in priori triangulo ABC, æquale eſt duobus quadratis rectarum AD, BD: ſi quadratum 36. ſegmenti BD, tollatur ex 100. quadrato lateris adiacentis AB, relinquetur quadratum 64. perpendicularis AD. Radix ergo eius quadrata 8. erit magnitudo perpendicularis AD, vt ſupra. Similiter ſi quadratum 225. ſegmenti CD, dematur ex 289. quadrato lateris adiacentis AC, reliquum fiet qudratum 64. perpendicularis AD, cuius radix 8. magnitudo erit perpendicularis AD, vt prius.

Quæ via inueſtiganda perpendicularis ſit expeditior.

IN triangulo verò poſteriori ABD, ſi quadratum $31\frac{41}{64}$. ſegmenti AC, $5\frac{5}{8}$. ſubtrahatur ex 121. quadrato lateris adiacentis AD, 11. remanebit quadratum $89\frac{23}{64}$. perpendicularis DC, cuius radix eſt paulò maior quam $9\frac{547}{12608}$. vt ſupra. Sic etiam ſi quadratum $310\frac{41}{64}$. ſegmenti BC, $17\frac{5}{8}$. ſubtrahatur à quadrato 400. lateris adiacentis BD, 20. remanebit rurſus quadratum $89\frac{23}{64}$. perpendicularis DC, cuius radix paulo maior eſt quam $9\frac{547}{12608}$. vt ſupra. Verum prior ratio magis expedita videtur, quanquam alij poſteriorem hanc viam tradant.

b 12. quarti decimi.

IN triangulo porro æquilatero perpendicularis hoc alio modo inuenietur. [b] Quoniam quadratum lateris ſeſquitertium eſt quadrati perpendicularis: ſi fiat vt 4. ad 3. ita quadratum lateris ad aliud, proueniet quadratum perpendicularis. Radix ergo huius quadrati notam exhibebit perpendicularem. Vt ſi latus eſt 10. & fiat vt 4. ad 3. ita 100. quadratum lateris ad aliud gignetur quadratum perpendicularis 75. cuius radix $8\frac{11}{17}$. proximè erit perpendicularis quæſita.

DENIQVE inuentis ſegmentis baſis à perpendiculari factis, perpendicularis ipſa per ſinus ita fiet cognita in priori triangulo. Fiat vt 10. latus AB, recto angulo oppoſitum ad ſinum totum recti anguli D; ita 6. ſegmentum BD, ad aliud; produceturque ſinus anguli oppoſiti BAD, 60000. Ergo angulus BAD, erit grad. 36. Min. 52. ac proinde angulus B, eius complementum erit grad. 53. Min. 8. Si ergo rurſus fiat, vt ſinus totus ad 10. latus AB: ita 80003. ſinus anguli BAD, ad aliud, procreabitur latus AD, hoc eſt, perpendicularis $8\frac{30}{100000}$. fermè, quæ paulo maior eſt, quam 8. ſupra inuenta. quod diſcrimen oritur ex eo, quod ſinus non ſunt omnino tales, quales in tabula deſcribuntur: quod tamen in menſuratione camporum non inducit ſenſibilem admodum errorem.

Area prioris trianguli ABC.

ITAQVE ſi in priori triangulo ABC, perpendicularis AD, 8. ducatur in $10\frac{1}{2}$. ſemiſſem baſis BC, vel 4. ſemiſsis perpendicularis AD, in 21. totam baſem, procreabitur area trianguli ABC, 84. Quę etiam producetur, ſi tota perpendicularis 8. in totam baſem 21. multiplicetur, & producti numeri 168. ſemiſsis accipiatur 84.

Area poſterioris trianguli ABD.

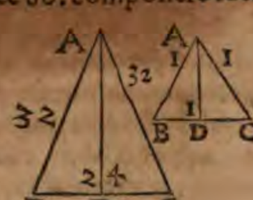
ITEM in poſteriori triangulo ABD, ſi perpendicularis DC, $9\frac{547}{12608}$. ducatur in 6. ſemiſſem baſis AB, vel ſemiſsis perpendicularis, nimirum $\frac{11419}{2416}$. vel $4\frac{1755}{2416}$.

4 $\frac{1755}{2416}$. in totam baſem 12. conficietur area trianguli ABD, 56 $\frac{566}{1208}$. vel 56 $\frac{283}{604}$. Quæ etiam producetur, ſi tota perpendicularis in totam baſem ducatur, & producti capiatur ſemiſsis.

VT autem fractiones, quoad eius fieri poteſt, vitentur, curabis, vt quando perpendicularis eſt numerus par, & baſis numerus impar, accipias ſemiſſem perpendicularis, eamque in totam baſem ducas: quando vero perpendicularis eſt numerus impar, & baſis numerus par, ſumas ſemiſſem baſis, eamque ducas in totam perpendicularem. Quod ſi tam perpendicularis, quam baſis fuerit numerus par, vel impar, nihil intereſt, vtrius ſemiſſem capias. *Vt fractiones vitentur quid agendum.*

QVANDO etiam perpendicularis eſt radix ſurda, quæ videlicet numero exprimi nequeat, qualis fuit DC, in poſteriori triangulo ABD, rectè feceris, ſi eius quadratum (non extracta radice illa ſurda) multiplices per quadratum ſemiſsis baſis. Numerus enim productus erit quadratus numerus areæ trianguli: adeo vt radix eius ſit ipſa trianguli area. Hac enim ratione minus à vero aberrabimus. Vt in dicto poſteriori triangulo ABD, ſi quadratum perpendicularis DC, $\frac{5617}{64}$. ducamus in 36. quadratum ſemiſsis baſis, producemus $\frac{202212}{64}$. quadratum areæ, cuius radix eſt 56 $\frac{1605}{7618}$. area videlicet trianguli ABD, paulo maior, quam prius inuenta. Pari ratione, ſi in aliquo triangulo quadratum perpendicularis foret 72. & ſemiſsis baſis 6. ſi radicem numeri 72. nimirum 8 $\frac{8}{17}$. hoc eſt, ipſam perpendicularem, ducamus in 6. producemus aream 50 $\frac{14}{17}$. At ſi ipſum met quadratum 72. multiplicemus per 36. quadratum videlicet ſemiſsis baſis, procreabimus 2592. quadratum areæ, cuius radix paulo maior eſt, quam 50 $\frac{92}{101}$. qui numerus aliquanto maior eſt, quam area prius inuenta 50 $\frac{14}{17}$. Ratio huius noſtræ regulæ eſt, quod, vt paulò ante ad finem Num. 1. demonſtrauimus, duo numeri ſeſe multiplicantes producant radicem numeri ex eorum quadratis producti. *Quid agendum, quando perpendicularis eſt numerus ſurdus.*

3. EXPOSITIS duabus regulis generalibus, per quas trianguli cuiuslibet area ex cognitis lateribus inueſtigatur, proponemus nunc particularia quædam præcepta pro particularibus triangulis nonnullis, quæ nõnuquam magno vſui erunt, cum per ea ſæpenumero expeditius in aliquibus triangulis areæ reperiantur, quam per illas generales regulas. Area ergo trianguli rectanguli producetur, ſi duo latera circa rectum angulum inter ſe multiplicentur, & numeri producti ſemiſsis capiatur. Nam ex multiplicatione illa gignitur parallelogrãmum rectangulum ſub duobus lateribus circa angulum rectum comprehenſum, vt c. 1. dictum eſt, [a] cuius rectanguli triangulum ſemiſsis eſt, Quod perinde eſt, ac ſi ſemiſsis vtriuſuis lateris in totum alterum, tamquam in baſem, multiplicetur. Vt in præcedenti triangulo ABC, diuiſo in duo triangula rectangula ADB, ADC; ſi AD, 8. ducatur in BD, 6. producetur numerus 48. cuius ſemiſsis 24. erit area trianguli ADB. Sic ſi AD, 8, ducatur in DC, 15. fiet numerus 120. cuius ſemiſsis 60. erit area trianguli ADC: vbi vides, duo triangula 24. & 60. componere totum triangulum ABC, 84. vt ſupra inuenimus. *Area trianguli rectanguli.* *[a] 41. primi.*



4. AREA trianguli Iſoſcelis, vel etiam æquilateri, procreabitur, ſi quadratum ſemiſsis baſis ex quadrato lateris auferatur, & reliquus numerus in idem quadratum ſemiſsis baſis ducatur, ac denique huius ꝓducti radix quadrata eruatur. Vt in Iſoſcele ABC, cuius æqualia latera AB, AC, ſint 32. 32. & baſis BC, 24. ſi quadratum 144. ſemiſsis baſis dematur ex 1024. quadrato lateris AC, vel *Area trianguli Iſoſcelis.*

X 3 AB, &c

AB, & reliquus numerus 880. ducatur in 144. quadratũ ſemiſsis baſis, erit producti 126720. radix quadrata $355\frac{695}{711}$. (quæ paulo minor eſt vera radice) area trianguli ABC. Nam ſi quadratum ſemiſsis baſis DC, auferatur ex quadrato lateris AC,[a] reliquum fit quadratum perpendicularis AD, quod ex ſcholio propoſ. 26. lib. 1. Euclid. perpendicularis AD, baſem BC, ſecet bifariam in D. Quare vt circa finem Num 2. oſtendimus, quadratum perpendicularis AD, ductum in quadratum DC, ſemiſsis baſis producet quadratum areæ trianguli ABC. Eademq; ratio eſt in triãgulo æquilatero, cum hoc habeat etiã duo latera æqualia.

[a] 47. primi.

Area trianguli æquilateri.

5. PRO area tamen trianguli æquilateri hæc etiam regula ab auctoribus traditur, quamuis à nemine (quod ſciam) demonſtrata ſit. Quadratum lateris ducatur in 13. productuſque numerus per 30. diuidatur. Quotiens enim erit area trianguli æquilateri. Vt ſi vnum latus æquilateri trianguli ſit 10. ducatur quadratum lateris 10. nimirum 100, in 13. productuſque numerus 1300. per 30. diuidatur. Quotiens enim $43\frac{1}{3}$. erit area trianguli. Hanc regulam ita demonſtro. Area trianguli æquilateri, cuius ſingula latera ſunt 1. eſt radix quadrata huius numeri $\frac{3}{16}$. (Nam per regulam præcedentem Nume. 4. explicatam, ſi $\frac{1}{4}$. quadratum ſemiſsis lateris dematur ex 1. quadrato lateris, & reliquus numerus $\frac{3}{4}$. ducatur in idem quadratum $\frac{1}{4}$. ſemiſsis lateris, producetur quadratum areæ trianguli $\frac{3}{16}$.) nimirum $\frac{13}{30}$. proximè. Cum ergo quadratum lateris 1. ad quadratum lateris 10. hoc eſt, 1. ad 100. eandem proportionem habeat, quam area $\frac{13}{30}$. trianguli, cuius vnum latus eſt 1. ad aream trianguli, cuius vnum latus eſt 10.[b] quod vtraque proportio proportionis lateris 1. ad latus 10. ſit duplicata: ſi fiat vt 1. (quadratum lateris 1.) ad 100. (quadratum lateris 10.) ita area $\frac{13}{30}$. ad aliud, producetur area trianguli, cuius vnum latus eſt 10. Hoc autem fit, ducendo ſecundum numerum 100. in tertium $\frac{13}{30}$. hoc eſt, (vt conſtat ex regula multiplicationis fractorum, ducendo 100. in numeratorem 13. & productum per denominatorem 30. diuidendo. Neque vero opus eſt productum hunc numerum $43\frac{1}{3}$. per primum 1. partiri, cum vnitas diuidens, aut multiplicans quemcunq; numerũ producat numerum eundem. Sic etiam ſi latus vnum trianguli æquilateri ſit 6. ducemus eius quadratum 36. in $\frac{13}{30}$. hoc eſt in 13. numeratorem, productumq; 468. per 30. partiemur. Quotiens namq; $15\frac{3}{5}$. erit trianguli propoſiti area.

[b] 20. & 19. sexti.

Radix quadrata numeri fracti quo pacto eruatur.

QVOD autem $\frac{13}{30}$. ſit radix quadrata numeri $\frac{3}{16}$, patet ex regula qua cuiuſuis fracti numeri radix extrahitur: quæ talis eſt. Numerator in denominatorem ducatur, & producti radix propinqua inueniatur. Si enim per hanc radicem diuidemus numeratorem: vel ipſam radicem per denominatorem partiemur; exibit radix fractionis propoſitæ: priori quidem modo maior quam vera, poſteriori autem minor, ſi radix illa propinqua producti ex numeratore in denominatorem fuerit minor, quam vera: quia in priori illo modo fit diuiſio per numerum vero minorem, in poſteriori autẽ numerus vero minor diuiditur. Quod ſi radix illa propinqua foret maior, quam vera, produceretur priori modo radix fractionis minor, quam vera, poſteriori autem maior, vt liquet. Verbi gratia. Inuenienda ſit radix quadrata fractionis $\frac{3}{16}$. quam diximus eſſe quadratum areæ trianguli æquilateri, cuius vnum latus eſt. 1. Ex 3. in 16. fit numerus 48. cuius radix propinqua $6\frac{12}{13}$. minor quam vera, per quam ſi diuidatur numerator 3. prodibit radix $\frac{13}{30}$. fractionis $\frac{3}{16}$. maior, quam vera: at ſi radicem eandem propinquam $6\frac{12}{13}$. partiamur per denominatorem 16. reperietur radix $\frac{45}{104}$. eiuſdem

fractio-

fractionis $\frac{3}{16}$. minor, quam vera. Ratio huius extractionis hæc eſt. Quando numerator 3. denominatorem 16. multiplicat, [a] erit producti 48. radix quadrata medio loco proportionalis inter 3. & 16. quod radix hæc in ſe ducta producat numerum 48. æqualem ei, qui ab extremis 3. & 16. inter ſe multiplicatis gignitur: ac proinde proportio 3. ad 16. erit duplicata tam proportionis 3. ad illam radicem, quam illius radicis ad 16. [b] Cum ergo proportio 3. ad 16. ſit quoque duplicata proportionis, quam radix numeri 3. ad radicem numeri 16. habet: erit vt 3. ad radicem producti 48. Vel vt radix huius producti ad 16. ita radix numeri 3. ad radicem numeri 16. Quapropter cum fractio, cuius numerator eſt radix numeri 3. denominator autem radix numeri 16. ſit radix fractionis $\frac{3}{16}$. erit quoque tam fractio, cuius numerator 3. & denominator radix producti 48. quã fractio cuius numerator radix producti 48. denominator autem 16. hoc eſt, tam Quotiens, qui fit ex diuiſione 3. per radicem producti 48. quam quotiens, qui fit ex diuiſione radicis producti 48. per 16. radix propinqua fractionis $\frac{3}{16}$. Eademque de cæteris ratio eſt.

a 20. ſept.

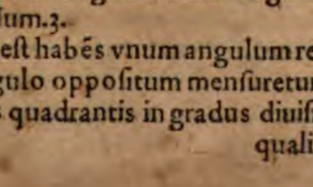
b 11. octaui.

ALII hanc tradunt regulam ad aream trianguli æquilateri inueniendam. Ex quadrato lateris ſumatur tam pars decima, quàm tertia. Harum enim partium ſumma erit area trianguli. Quod ſic oſtendo. Hæ fractiones $\frac{1}{10}$. & $\frac{1}{3}$. in vnam collectæ ſummam efficiunt $\frac{13}{30}$. ac proinde idem eſt ex quadrato lateris auferre $\frac{1}{10}$. & $\frac{1}{3}$. atque $\frac{13}{30}$. Sed quando auferentur $\frac{13}{30}$. multiplicatur quadratum lateris per $\frac{13}{30}$. vt in 6. quæſtiuncula fractorum docui. Igitur cum, vt Num. 5. explicatum eſt, ex multiplicatione quadrati lateris in $\frac{13}{30}$. producatur area trianguli æquilateri, liquido conſtat, partem decimam, & partem tertiam quadrati lateris conficere eandem aream. Itaque ſi latus ſit 30. erit eius quadratum 900. cuius $\frac{1}{10}$. eſt 90. & $\frac{1}{3}$. eſt 300. quæ partes ſimul conficiunt numerum 390. pro area illius trianguli æquilateri.

6. HACTENVS expoſuimus regulas, quæ nos in cognitionem areæ cuiuſcunque trianguli ducunt, ſi ſingula latera cognita ſint. Nunc triangulorum areas per doctrinam ſinuum, Tangentium, ſecantiumque inueſtigabimus, licet non omnia latera ſint cognita, ſed vnum duntaxat, vel duo, vna cum duobus angulis, vel vno. In triangulis ergo rectangulis ita procedemus.

e Area trianguli rectanguli ex latere quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto cognito, quo pacto inueſtigetur.

QVANDO in triangulo rectangulo latus recto angulo oppoſitum cognitum eſt, cum vno angulo acuto, cognoſcemus aream hoc modo. Detracto angulo acuto dato ex recto, id eſt, ex grad. 90. relinquetur alter acutus angulus etiam notus. Vt in triangulo DCB, habente angulum rectum C, & latus BD, notum, vna cum angulo acuto B. [c] Et quoniam duo B. & BDC, vni recto, id eſt, gradibus 90. ſunt æquales, ſi angulus B, ex grad. 90. detrahatur, reliquus fiet angulus BDC. Si ergo fiat, vt ſinus totus anguli recti C, ad oppoſitum latus BD, in qualibet menſura cognitum; ita tam ſinus anguli B, quàm anguli BDC, ad aliud; [d] nota fient latera DC, & CB, in partibus lateris BD: atque ita omnia tria latera cognita erunt. Ergo & area cognoſcetur vel ex Num. 1. huius cap. vel ex Num. 3.



c 32. primi.

d 2. triang. rectil.

ITAQVE ſi campus menſurandus triangularis eſt habẽs vnum angulum rectum, ſatis erit, ſi ſumma diligentia latus recto angulo oppoſitum menſuretur, & inſuper vnus angulus acutus, beneficio alicuius quadrantis in gradus diuiſi,

qualis,

qualis eſt à nobis conſtructus cap.2.lib.1. Nam ex his cognitis, vt proxime diximus, tota area trianguli cognoſcetur, etiamſi ad alia duo latera accedere non poſsimus.

QVANDO in eodem triangulo rectangulo BDC, alterutrum latus datur circa angulum rectum vna cum latere, quod recto angulo opponitur, nimirum ſi DC, & DB, cognita ſint; [a] cognoſcetur quoque alterum latus BC, ſi fiat, vt latus DB, angulo recto oppoſitum ad ſinum totum anguli recti C, ita latus datũ DC, ad aliud. Productus enim numerus erit ſinus anguli B, quo cognito ex tabula ſinuum, cognitũ etiam erit eius complementum BDC. Si ergo rurſus fiat, vt ſinus totus anguli recti C, ad latus oppoſitum datum DB, ita ſinus anguli BDC, inuenti ad aliud, exibit latus oppoſitum BC. Ex duobus igitur lateribus DC, CB, cognitis, area trianguli nota fiet ex ijs, quæ Num.3. paulo ante ſcripſimus.

[a] 3. triang. rectil.

Area trianguli rectanguli ex vno latere circa angulum rectum, & latere quod recto angulo opponitur.

ATQVE ita in campo, ſi detur portio triangularis, habens angulum rectum; ſatis eſt, ſi diligenter menſuretur vnum latus circa angulum rectum, vna cum latere, quod recto angulo opponitur, etiamſi ad tertium latus non pateat acceſſus. Ex illis enim duobus area cognoſcetur, vt dictum eſt.

QVOD ſi in eodem triangulo rectangulo BDC, notum fuerit vnum latus circa rectum angulum, videlicet DC, vna cum alterutro angulo acuto, vt pote cum C, [b] notum efficietur alterum latus BC: ſi fiat, vt ſinus totus ad datum latus DC: Ita Tangens anguli BDC, quæſito lateri CB, oppoſiti, (cognoſcetur autem alter hic angulus BDC, ſi angulus C, ex gradibus 90. dematur) ad aliud. Nam inuentus numerus dabit latus CB, quæſitum. Vel ſi fiat, vt ſinus anguli C, dato lateri DC, oppoſiti ad latus datum DC: Ita ſinus alterius anguli BDC, ad aliud. Nam rurſus producetur latus quæſitum BC. Ex duobus ergo lateribus DC, CB, aream cognoſcemus, vt Num.3. traditur.

[b] 4. triang. rectil.

Area trianguli rectanguli ex vno latere circa angulum rectum & vno angulo acuto.

IN Campo ergo aliquo, ſi proponatur portio triangularis angulum habẽs rectum, ſatis erit vnum latus circa rectum angulum, & vnum angulum acutum metiri, vt eius trianguli area reperiatur, etiamſi ad alia duo latera acceſſus denegetur. Atque hæc de rectangulis triangulis: veniamus iam ab obliquangula.

7. SI ergo in triangulo non rectangulo ABD, notum ſit vnum latus, cum duobus angulis quibuſcunque, perueniemus in cognitionem areæ hoc modo. Ex duobus angulis cognitus erit quoque tertius, cum ſit complementum aliorum duorum ad gr.180. [c] Igitur alia duo latera cognoſcentur: ac proinde ex tribus lateribus cognitis area fiet nota ex ijs, quæ Num.1. & 2. tradita ſunt.

[c] 10. triang. rectil.

Area trianguli obliquãguli ex vno latere ac duobus angulis.

VT ergo campus triangularis nullum habens angulũ rectum cognitus fiat, ſatis erit, ſi vnum latus cum duobus angulis accuratè menſuretur. Ex ijs enim duo reliqua latera nota efficientur, &c. vt dictum eſt.

RVRSVS ſi in eodem triangulo ABD, non rectangulo nota ſint duo latera, vna cum angulo ab ipſis comprehenſo; [d] inuenietur tertium latus: ac proinde, vt prius, ex omnibus tribus lateribus area trianguli efficietur cognita.

[d] 12. triang. rectil.

Area trianguli obliquanguli ex duobus lateribus & angulo ab ipſis comprehenſo.

ITAQVE ſatis erit, ſi in campo quouis triangulari duo latera, vna cum angulo ab ipſis comprehenſo menſurentur: vt area ipſius nota reddatur.

8. NEQVE vero hoc omittendum videtur: ſi videlicet vnum latus trianguli, vel cuiuſuis figuræ rectilineæ in partes quotlibet æquales ſecetur, reliqua latera in eiſdem partibus fieri poſſe cognita, beneficio inſtrumenti partium, vt ad finem Num.1.cap.1. lib.1. declarauimus. Verum vt magis exquiſitè reperiantur, inqui-

inquirendum erit fragmentum vltimæ particulæ (ſi quod ſuperfuerit) in parti-bus milleſimis, per ea, quæ Num.14.cap.2.lib.1. docuimus. Ita enim in dimen-ſionibus figurarum minus à vero aberrabimus.

Diuiſo vno latere figuræ in quotuis partes æquales, quo pacto alia latera in eiſdem partibus fiant nota.

9. NEMINEM autẽ moueat, aut perturbet, quod rectas dixerimus metien-das eſſe nonnunquam mechanice per catenulam aliquam ferreã, aut per inſtru-mentum partium. Nam in hoc dimetiendi negotio, præſertim in campis, & agris admittenda omnino eſt huiuſmodi mechanica linearum dimenſio, tum quia a-pud omnes agrimenſores hic mos eſt: tum quia non ſemper via Geometrica id præſtare poteſt; tum vero maximè, quia in dimenſionibus agrorum, ſiue figu-rarum ſatis eſt rem prope verum attingere, dum modo notabilis error non cõ-mitatur. Quod ſi hæc dimenſio quarundem linearum alicui nõ probetur, is pro-fecto è medio tollat, neceſſe eſt, omnem agrorum, figurarumue dimenſionem. Vnde enim conſtat, agrum propoſitum, vel figuram habere latera cognita, niſi hæc ipſa per menſuram aliquam materialem ſint explorata? Si igitur laterum di-menſio mechanica, tanquam à vero parum aberrans, ab omnibus vſurpatur, cur eam in lineis intra figuras metiendis reijciendam cenſeamus, nõ video. Non nego tamen, viam Geometricam, quando fieri poteſt, adhibendam eſſe. In fi-guris quoque, vbi latera non ſunt nimis magna, vtendũ cenſeo doctrina, quam in inſtrumento partium lib.1.cap.1. ad finem Num.2. tradidimus, non neglectis etiam ijs, quæ in eodem lib.1.cap.2.Nume.14. de quauis particula lineæ cogno-ſcenda, in partibus ſaltem milleſimis, ſcripſimus, quod hac ratione vix à vero quis aberrare poſsit.

In negotio dimenſionum admittendam eſſe in nonnullis lineis & angulis mechanicam menſurationem.

IDEM de mechanica angulorum dimenſione per quadrantem intelligen-dum eſt: præſertim ſi præter gradus inueſtigentur quoque minuta, vt lib.1.cap. 2.docuimus.

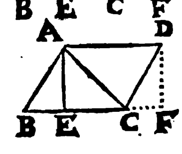
DE AREA QVADRILATERORVM non rectangulorum.

CAPVT III.

1. TRIA ſunt genera quadrilaterarum figurarum, quæ vel nullum angu-lum rectum habent, vel certe non omnes rectos: Rhombus, Rhom-boides, & Trapezium. Primæ duæ figuræ nullum habent angulum re-ctum: poſterior autem poteſt habere vel vnum rectum, vel duos, vel etiam nullum: Item duo latera oppoſita parallela, vel non parallela. Rhom-bi & Rhomboidis, quorum latera nota ſint, area pro-ducitur ex ductu perpendicularis in latus, in quod per-pendicularis cadit. Ita vt magnitudo perpendicularis accu-rate ſit prius exploranda vel per inſtrumentum partium initio huius operis conſtructi, vt paulo ante cap. 2. Num.8. monui-mus, vel alio modo, vt mox dicam. Verbi gratia, in Rhombo & Rhomboide ABCD, producetur area ex multiplicatione perpendicularis AE, in latus BC, [a] Nam rectangulum AF, ſub AE, & AD, comprehenſum æquale eſt parallelogram-mõ BD, quòd hæc duo parallelogramma ſint inter paralle-

Rhombi & Rhomboidis area





[a] *35. primi.*

las AD,BC,& ſuper eandẽ baſem AD. Itaq; fruſtra alij ꝑcipiunt, vt diameter ducatur AC, & beneficio perpendicularis AE, area trianguli ABC, inquiratur, quod hæc duplicata aream exhibeat totius parallelogrammi, [a] quippe cum triangulum ABC, ſemiſsis ſit parallelogrammi. Fruſtra, inquam hoc præcipiunt, cum expeditius area inueniatur ſi perpendicularis in totum latus BC, ducatur, quam ſi in ſemiſſem multiplicetur, ac productus deinde numerus dupletur.

[a] 34. primi.

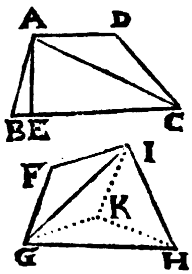
Perpendicularis inuentio.

Si per quadrantem cap. 2. lib. 1. conſtructum inueſtigetur quantitas anguli B, reperietur perpendicularis AE, per ſinus, hac ratione. Fiat vt ſinus totus anguli recti E, ad latus oppoſitum AB, ita ſinus anguli B, ad aliud. [b] Productus enim numerus erit perpendicularis AE, cognita in partibus lateris dati AB.

[b] 2. triang. rectil.

Area trapezii habentis duo latera parallela.

2. Trapezii, in quo duo latera oppoſita ſint parallela AB,BC, & omnia latera nota, area producitur ex perpendiculari AE, inter duo latera parallela multiplicata in ſemiſſem ſummæ ex lateribus parallelis conflatæ. Nam ducta diametro AC, area trianguli ABC, producitur ex perpendiculari AE, in ſemiſſem baſis BC, vt cap. 2. Num. 2. dictum eſt: Item area trianguli ACD, ex eadem perpendiculari AE, in ſemiſſem baſis AD: Ac proinde hæ duæ areæ ſimul aream totius Trapezij ABCD, conficient. [c] Cum igitur idem fiat ex AE, in ſummam ex ſemiſſe rectæ BC, & ex ſemiſſe rectæ AD, conflatam, id eſt, in ſemiſſem rectarum BC, AD, ſimul: quod ex AE, in ſemiſſem lateris BC, & ex AE, in ſemiſſem lateris AD; liquidò conſtat, aream Trapezij gigni ex perpendiculari AE, in ſemiſſem ſummæ laterum AD, BC. Atque hæc ratio locum etiam habet in Trapezio habente vnum angulum rectum, vel duos rectos.



[c] 1. ſecundi.

Perpendicularis vero AE, inuenietur, vt in Rhombo, & Rhomboide diximus, duobus modis, ſi per quadrantem angulus B, inueſtigetur, &c.

Area trapezii nulla habentis latera parallela.

In Trapezio autem FGHI, in quo nulla ſunt latera parallela, omnia tamen latera ſunt nota, menſuranda primum eſt diameter. IG, per inſtrumentum partium. Deinde vtriuſque trianguli FGI, GHI, area inuenienda, vt cap. 2. Nume. 1. & 2. tradidimus. Ambæ enim areæ ſimul conficient aream totius Trapezij.

Quod ſi malueris angulum F, vel H, per quadrantem inuenire, cognoſcemus diametri GI, magnitudinem, per doctrinam ſinuum, ac Tangentium, [d] vt lib. 1. capit. 3. docuimus, ex duobus lateribus FG, FI, & angulo F, ab ipſis comprehenſo, vel ex duobus lateribus HG, HI, & angulo H, quem continent.

[d] 12. trian. rectil. Num. 2.

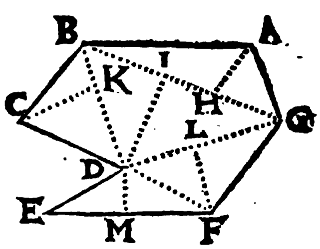
Area figuræ quadrilateræ irregularis.

3. Non aliter aream conſequemur cuiuſcunque quadrilateri irregularis, etiamſi non habeat omnes angulos introrſum, ſicut Trapezium. Vt ſi in Trapezio FGHI, ducantur ex G, & I, duæ rectæ GK, IK, conſtituetur quadrilaterum GHIK, irregulare, cum ſolum habeat tres angulos GHI, HIK, HGK. Nam ad K, non fit angulus GKI, introrſum verſus H, cum illud ſpatium ſit duobus rectis maius, ſed verſus F, extrorſum. Huius ergo figuræ quadrilateræ irregularis aream colligemus, ducta diametro KH, ex duabus areis triangulorum IKH, GKH, vt de Trapezio FGHI, dictum eſt.

DE AREA MVLTILATERARVM figurarum irregularium.

CAPVT IV.

1. FIGVRAS multilateras irregulares, quæ videlicet plura latera habent inæqualia, quam quatuor, etiamſi valdè irregulares ſint, metiemur, vt trapezia irregularia, reſoluendo nimirum illas in triangula, & ſingulorũ triangulorum areas inueſtigando. Nam omnes hæ areæ in vnam ſummam collectæ æquales ſunt areæ totius figuræ propoſitæ. Vt ſi figura ſeptem laterum ABCDEFG, reſoluatur in quinque triangula ABG, GBD, DBC, DEF, FDG, ita vt eorum latera ſe mutuo non interſecent, inquirendæ ſunt areæ ſingulorũ hoc *Area multi latera figura.* *Quando figura in triangula reſolui poteſt, quo modo eius area colligatur.*



modo. Quando omnia latera triangulorum nota effici poſſunt per aliquam menſuram, ſiue figura agrum aliquem repræſentet, ſiue in charta ſolum ſit deſcripta, demittantur ex angulis ad latera oppoſita perpendiculares AH, DI, CK, DM, FL, ſingulæ in ſingulis triangulis. Deinde in triangulo ABG, [a] inquirantur ex tribus lateribus notis ſegmenta BH, HG; & ex his perpendicularis AH, vt cap. 2. huius lib. Num. 2. declarauimus. Nam AH, in ſemiſſem baſis BG, ducta producet aream trianguli ABG. Eademque ratione aliorum triangulorum areæ perueſtigentur: atque omnes areæ in vnam redigantur ſummam, vt area totius figuræ habeatur. Quod ſi malueris, poteris omnium triangulorum areas indagare ex tribus lateribus cognitis, per ea, quæ capit. 2. Numer. 1. ſcripſimus, etiamſi neque perpendiculares ductæ ſint, neque ſegmenta BH, GH, inuenta. *[a] 9. triang. rectil.*

2. QVANDO latera triangulorum interiora menſurari nequeunt, immo neque duci, vt non raro accidit in campis, aut agris, qui vel propter arbores, vel paludes interiectas, rectis itineribus pertranſiri non poſſunt; alia ratione ſcopum attingemus, hac videlicet. Cognitis lateribus figuram ambientibus per aliquam menſuram, inueſtigentur quoque anguli ab ipſis comprehenſi beneficio quadrantis alicuius in gradus diuiſi. In propoſita figura angulus CDE, indagandus non eſt, quod ſit extra figuram. Reſoluta deinde figura mente, aut cogitatione in triangula, ac ſi latera interiora ducta eſſent, vt prius: *Quando figura in triangula reſolui non poteſt quo modo eius area deprehendatur.*

 explo-

[a] 12. triang. rectil. *[b] 2. triang. rectil.*

[a] explorentur in triangulo ABG, duo anguli B, G, ex duobus lateribus AB, AG, anguloque ab ipſis comprehenſo; atque inſuper latus B G. Hinc enim in triangulo rectangulo ABH, vel AGH, [b] demiſſa perpendicularis ex A, cognoſcetur ex baſe AB, & angulo B, vel ex baſe AG, & angulo G: ac proinde area trianguli reperietur, vt antea, ex ijs, quæ c. 2. huius lib. Nume. 1. & 2. tradita ſunt. Non aliter area trianguli BCD, nota fiet ex duobus lateribus CB, CD, notis angulum C, notum ambientibus, [c] ſi nimirum inueſtigentur prius anguli B, D, vna cum latere BD, [d] & ex his demiſſa perpendicularis CK. Poſt hæc in triangulo BDG, ſi anguli ABG, CBD, iam cogniti detrahantur ex toto angulo ABC, noto, remanebit angulus D B G, notus. Cum ergo latera B D, B G, ipſum includentia facta ſint etiam nota; [e] cognoſcentur eodem modo & anguli D, G, & latus DG; [f] atque inſuper perpendicularis ex B, in DG, demiſſa, &c. Similiter in triangulo GDF, ſi ex angulo noto A G F, tollantur anguli A G B, B G D, iam noti effecti, relinquetur angulus DGF, notus. Cum igitur & latus GD, notum factum ſit: [g] cognoſcemus & duos angulos GDF, GFD, & inſuper latus D F, [h] vna cum perpendiculari ex G, in D F, demiſſa, &c. In triangulo denique DEF, cum omnia latera ſint nota; [i] efficientur quoq; noti omnes tres anguli: ac proinde demiſſa perpendicularis D M, ex D, demiſſa, vel ex quocunque alio angulo, [k] nota fiet, &c. Ex his facile intelliges, quomodo in alijs figuris irregularibus te gerere debeas.

[c] 12. triang. rectil. Nu. 2. *[d] 2. triang. rectil.* *[e] 12. triang. rectil. Nu. 2.* *[f] 2. triang. rectil.* *[g] 12. triang. rectil.* *[h] 2. triang. rectil.* *[i] 16. triang. rectil.* *[k] 2. triang. rectil.*

Quomodo figura agro propoſito ſimilis deſcribi poſſit.

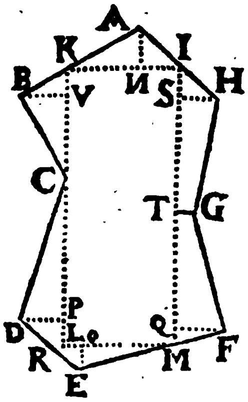
POTES etiam, ſi vis, deſcribere in charta aliqua figuram agro ſimilem: ſi nimirum ſumas rectam A B, tot particularum æqualium, quot menſuræ in latere agri reſpondente includuntur, angulumque conſtituas ABC, æqualē ei, quem in ambitu agri inueniſti. Deinde in B C, tot particulas accipias, quot in latere agri reſpondente continentur, iterumque angulum B C D, æqualem illi conſtituas, quem in figura deprehendiſti. Denique ſi idem facias de angulo CDE, & reliquis, necnon de rectis CD, DE, & alijs, deſcripta erit figura ſimilis agro: quę ſi reſoluetur in triangula, quorum latera intra figura per inſtrumentum partium menſurentur, reperietur eius area, ſicuti prius, quãdo ager reſolui poterat in triangula.

QVANDO campi planities non eſt impedita, magis exquiſitè figura ei ſimilis deſcribetur per ea, quæ lib. 3. Problem. 42. Num. 3. ſcripſimus: ſi videlicet intra campum eligatur punctum quodpiam, ex quo ad omnes angulos rectæ ducantur, notatis angulis, quos efficiunt. Nam ſi illæ rectæ menſurentur, angulique ad aliquod punctum in charta transferantur, & in rectis angulorum capiantur tot particulæ æquales, quot menſuræ in rectis angulorum circa punctũ in campo electum conſiſtentium deprehenſæ ſunt, continebunt rectæ extrema puncta connectentes figuram ſimilem campo, vt in loco citato demonſtrauimus. Quod ſi duo puncta eligantur in campo, è quibus rectæ ad angulos ducantur, notatis punctis, vbi binæ rectæ, conueniunt, deſcribetur etiam figura cãpo ſimilis, quamuis rectæ illæ non menſurentur: quemadmodum ibidem Num. 1. declarauimus.

Qua ratione campus intra quem lacus vel ſylua exiſtat menſuretur.

MANIFESTVM autem eſt, eodem pacto menſurari poſſe campum, in quo lacus, vel ſylua comprehendatur, licet in triangula reſolui non poſsit, dummodo eius latera exteriora cum angulis cognoſci poſsint. Quod ſi in circuitu agri fuerit aliqua portio curua, & non recta, ſecanda ea erit in tot partes, donec à rectis lineis parum differant, eæque pro lateribus rectis aſſumendæ.

3. AGRI-



3. AGRIMENSORES ne cogantur totum campum ſæpius perambulare, vt perpendiculares in triangulis ducant, anguloſque metiantur, hanc ineunt rationem. In agro, ſeu figura conſtituunt, quam poſſunt, maximum rectangulum, atque ad eius latera ex angulis figuræ perpendiculares concipiunt demitti, quod faciunt, applicando vnum latus normæ ad latus rectanguli, & aliud ad angulum figuræ oppoſitum dirigendo. Ita namque tota figura reſoluta erit in rectangulum illud conſtitutum, & in trapezia duorum laterum parallelorum, atque in triangula rectangula. Deinde vel ipſimet metiuntur latera rectanguli, & perpendiculares, vel vt ab aliis menſurentur, præcipiunt, quod quidem per catenulam ferream exequuntur. Poſtremo triangula quidem rectangula metiuntur, vt cap. 2. Num. 3. tradidimus, trapezia verò duorum laterum parallelorum, vt cap. 3. Num. 2. docuimus. Rectangulum denique per ea, quæ cap. 1. ſcripſimus, menſurant. Horum enim areæ in vnam ſummam collectæ conficiunt aream totius agri, ſeu figuræ. In propoſito octágulo ABCDEFGH, continetur rectangulum IKLM, trapezia HSTG, GTQF, OLRE; & triangula rectangula ANK, ANI, ISH, FQM, MOE, DPR, CDP, BCV, BKV. *Ratio communis menſorum in area cuiuſuis figura inueſtiganda.*

ALII non conſtituunt rectangulum intra campum, vel figuram, ſed lineam, quam poſſunt, longiſsimam ducunt, nimirum à puncto A, ad latus EF, quam fundamentalem appellant. Ad hanc ex angulis demittunt perpendiculares: atque ita totam rurſus figuram in trapezia duorum laterum parallelorum, & in triangula rectangula diſpertiunt, &c. Sed prior ratio commodior videtur: quippe in qua perpendiculares ex angulis deductæ breuiores ſint, ac propterea facilius menſurentur, ac certius.

QVANDO intra agrum dictæ operationes fieri nequeunt, ſolent etiam menſores circa agrum includentem ſyluas, lacús, & ædificia, vel alia impedimenta, formare rectangulum. Nam ſi ad eius latera ducantur perpendiculares ab angulis exterioribus agri, conſtituentur iterum trapezia rectangula duorum laterum parallelorum, vel parallelogramma, & triangula rectangula extra agrum: quorum areæ ſi ex area totius rectanguli ſubducantur, reliqua fiet area propoſiti agri.

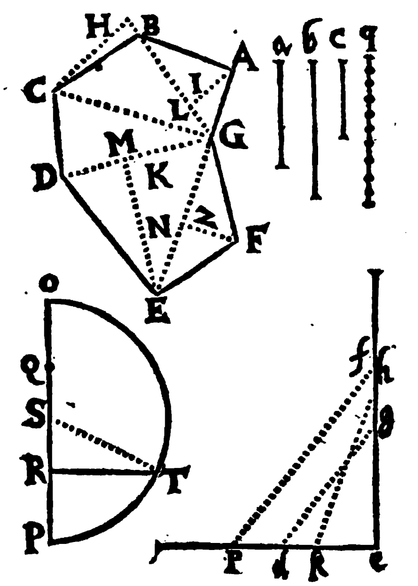
4. SED neque aſpernanda mihi videtur ea ratio, quam olim meis auditoribus explicare ſolebam. Vt nimirum toti figuræ (reducto prius agro ad ſimilem figuram, vt paulo ante Num. 2. præcepi) conſtituatur quadratum æquale, vel certè latus eius quadrati inueniatur. Nam ſi vnum huius quadrati latus menſuretur, atque in ſeipſum ducatur, prodibit area figuræ propoſitæ. Menſurandum porro eſt latus in particulis laterum figuræ, quæ menſuris laterum agri reſpondent, quod facilè fiet per inſtrumentum partium. *Pulchra ratio area inueniendæ cuiuſcũque figuræ.*

QVO pacto autem cuilibet figuræ quadratum æquale ſine magno labore conſtrui poſſit, docui in ſcholio propoſ. 14. lib. 2. Euclid. quod hoc loco, paucis in melius mutatis, repetendum cenſeo. Sit ergo heptagonum irregulare ABCDEFG, quo reſoluto in 5. triágula ABG, BCG, CDG, DEG, EFG, ducantur ad B G, baſem communem duorũ triangulorum ab angulis oppoſitis A, C, *Quadratum datæ figuræ æquale qua ratione conſtruatur.*

 perpendi-

perpendiculares AL,CH, quarũ poſterior in GB, protractam cadit in noſtra figura. Deinde in recta quacunque OP, ſumantur OQ, QR, ipſis AL, CH, æquales. Item RP, ipſi BI, ſemiſsi baſis BG, æqualis; at circa OP, ex medio puncto S, ſemicirculus deſcribatur O T P: ac denique ex R, termino rectę OR, quę duabus perpendicularibus AL, CH, æqualis eſt, ad OP, perpendicularis excitetur RT, ſemicirculum ſecans in T. Dico quadratum rectę RT, duobus triangulis ſimul ABG, BCG, eſſe æquale. Quia enim rectangulum ſub BI, ſemiſſe baſis, & perpendiculari AL, æquale eſt triangulo ABG, ex propoſ.1. lib.7. huius; & rectangulum ſub eadem BI, & perpendiculari GH, æquale eſt triangulo BCG: Quod autem ſub BI, & aggregato ex AL, CH, hoc eſt, ſub RP, OR, (quod RP, ipſi BI, ſumpta ſit æqualis, & OR, ipſis AL, CH, ſimul) [a] æquale eſt eis, quę ſub BI, & AL, CH, comprehenduntur, rectangulis; erit rectangulum ſub OR, RP, duobus triangulis ABG, BCG, æquale. [b] Cum ergo quadratum ex RT, rectangulo ſub OR, RP, ſit æquale, (quod ex ſchol. propoſ.13. lib.6. Euclid. RT, media proportionalis ſit inter OR, RP,) erit quoque quadratum ex RT, duobus triangulis ABG, BCG, æquale, quod eſt propoſitum. Immo quadratum ex RT, rectangulo ſub OR, RP, æquale eſſe, demonſtrabitur hoc etiam modo ſine ope lib. 6. Euclid. [c] Rectangulum ſub OR, RP, vna cum quadrato ex SR, æquale eſt quadrato ex SP, hoc eſt, (ducta ST,) quadrato ex ST, [d] hoc eſt, quadratis ex SR, RT. Ablato ergo communi quadrato rectę SR, reliquum rectangulum ſub OR, RP, reliquo quadrato ex RT, erit æquale.

[a] 1. ſecundi.
[b] 17. ſexti.



[c] 5. ſecundi.
[d] 47. primi.

EODEM modo reperiemus quadratum duobus triangulis CDG, DEG, æquale, ſi ad baſem communem DG, ducantur perpendiculares CD, EM, quarum prior in noſtra figura cum latere CD, coincidit, &c. Atque ita deinceps ſi plura fuerint triangula, reperiemus ſemper binis triangulis ſingula quadrata æqualia. Sed quia in noſtra figura ſupereſt vnum tantum triangulum EFG, inuenie-

ueniemus ei quadratum æquale, ſi, ducta perpendiculari FN, circa rectam ex FN, & ſemiſſe baſis EZ, conflatam ſemicirculus deſcribatur, &c. Sint ergo a, b, c, latera quadratorum trapeziis, ABCG, CDEG, & triangulo EFG, æqualium; quibus omnibus quadratis vnum ęquale exhibebimus hac arte. Fiat angulus rectus d e f, & lateribus a, b, æquales ſumantur rectę e d, e g, [a] eritque quadratum ductę rectę d g, quadratis rectarum e d, e g, hoc eſt, laterum a, b, æquale. [a] *47. primi.* Capiatur rurſus e k, lateri c, & recta e h, rectę d g, ęqualis; [b] eritque rurſus quadratum ex kh, ęquale quadratis ex k e, e h, id eſt ex c, e h, nimirum tribus ex a, b, c. Si igitur latus ex k h, menſuretur, & in ſe ducatur, gignetur area figurę propoſitæ ABCDEFG. [b] *47. primi.*

EODEM artificio, ſi plura ſint latera, inueniemus quadratum omnibus quadratis ęquale. Vt ſi foret alterum latus q, acciperemus ei æqualem rectam e p. Item rectam e f, rectę k h, æqualem. Nam quadratum ex p f, quadratis ex e p, hoc eſt, ex q, & ex e f, id eſt, ex a, b, c, erit ęquale, & ſic de pluribus.

Ex his colligitur facilis ratio metiendi trapezij irregularis, cuiuſmodi eſt in proxima figura trapezium ABCG. Nam ducta diametro BG, ſi ad eam duę perpendiculares demiſſę AL, CH, menſurentur, earumque aggregatum in medietatem diametri BG, multiplicetur, procreabitur area trapezij, vt demonſtratum eſt. *Facilis ratio menſurandi trapezii irregularis.*

IN octauo porrò lib. propoſ. 6. docebimus quoque, qua ratione datę figurę rectilineę rectangulum æquale conſtruatur. quod ſi fiat hoc loco, efficietur illi rectangulo quadratum ęquale, per vltimam propoſ. lib. 2. Euclidis, ſine vllo negotio, aut moleſtia.

DE AREA MVLTILATERArum figurarum regularium.

CAPVT V.

1. QVANQVAM regulares figurę, quę ſcilicet ſunt & æquilaterę & æquiangulę, menſurari poſſint, vt irregulares precedentis capitis, reſoluendo eas in triangula, &c. ſolet tamen dari propria ac peculiaris regula, qua cuiuſque figurę regularis area inuenitur: quę ita ſe habet.

SEMISSIS ambitus figuræ multiplicetur in perpendicularem è centro figuræ ad vnum latus cadentem. Numerus enim productus area erit figuræ.

NAM vt lib. 7. de Iſoperimetris propoſ. 2. demonſtrabimus, area cuiuslibet figurę regularis ęqualis eſt rectangulo contento ſub perpendiculari à centro figurę ad vnum latus ducta, & ſub dimidiato ambitu eiuſdem figurę. *Area figuræ regularis.*

2. PERPENDICVLARIS porrò è centro figurę in vnum latus cadens, vna cum ſemidiametro circuli figuram ambientis ſic reperietur. Numerus laterum, ſiue angulorum duplicetur, & à duplo auferantur 4. Nam reliquus numerus indicabit, quot rectis angulis omnes anguli figurę ęquiualeant, per ea, quę in ſcholio propoſ. 32. lib. 1. Euclid. demonſtrata ſunt. Hic idem numerus reliquus, videlicet, numerus angulorum rectorum, per numerum angulorum diuidatur, vt Quotiens vnius anguli figurę magnitudinem exhibeat, qui *Perpendicularis & ſemidiameter figuræ regularis quo pacto inueniatur.*

in he-

in hexagono continet rectum cum parte tertia, hoc eſt, grad.120. Et quoniam ſemidiameter ſecat angulum figuræ biſariam, vt conſtat ex demonſtratione propoſ.12. lib.4. Euclid. fit vt ſi ſemiſsis lateris, in quod perpendicularis cadit, ponatur ſinus totus, perpendicularis ſit Tangens ſemiſsis anguli figuræ, & ſemidiameter, Secans. Si fiat ergo,

Vt latus 100000, ſinus totus.	*ad ſemiſſem lateris:*	*ita Tangens ſemiſſis anguli, vel ſecans.*	*ad aliud,*

prodibit tam perpendicularis, quàm ſemidiameter in partibus lateris figuræ. Verbi gratia, in Hexagono regulari, cuius vnum latus ſit 12. ſi fiat, vt 100000. ſinus totus ad 6. ſemiſſem lateris: ita 173205. tangens ſemiſsis anguli Hexagoni ad aliud, reperietur perpendicularis $10\frac{39230}{100000}$. vel $10\frac{3923}{10000}$. Item ſi fiat, vt 100000. ſinus totus ad 6. ſemiſſem lateris; ita 200000. Secans ſemiſsis anguli Hexagoni ad aliud, exibit ſemidiameter figuræ 12.

ITAQVE ſi perpendicularis $10\frac{3923}{10000}$. ducatur in 36. ſemiſſem ambitus Hexagoni ex tribus lateribus conflatam, producetur area Hexagoni $374\frac{1228}{10000}$. vel $374\frac{307}{2500}$. Eodemque modo procedendum eſt in aliis figuris regularibus, in quibus angulorum ſemiſſes in tabula Tangentium, ac ſecantium accipi poſſunt.

Quare ex latere figuræ regularis dato non ſemper poſſit inueniri area, niſi figura ipſa deſcripta ſit.

3. QVONIAM vero circa quamlibet figuram regularem circulus deſcribi poteſt, vt ex lib.4. Eucl. conſtet, proponemus hic plurimarum figurarum regularium latera in partibus diametri circuli ambientis 20000000. vel ſemidiametri, ſiue ſinus totius 10000000. ex probatis auctoribus, vt earum areæ magis exquiſitè inueniri poſsint per regulam Num.1. propoſitam. Nam ſi ex ſolo vno latere in aliqua menſura cognito aream inueſtigare velimus, quemadmodum in Hexagono factum eſt, occurrēt multæ difficultates ac magnę, propterea quod ſemidiametri, perpendicularesque ex ſinubus, Tangentibus, ac ſecantibus erui non poſſunt, niſi quando ſemiſsis anguli figuræ comprehendit pręcisè gradus, vel gradus cum minutis, vel gradus cum minutis & ſecundis: (quamuis ſi ſecunda adſint, neceſſe ſit partem proportionalem adhibere) ſicut in Hexagono paulo ante factum eſt, cuius anguli ſemiſsis continet grad. 60. quod in quamplurimis figuris non contingit. Nam, verbi gratia, in Heptagono omnes 7. anguli ex ſcholio propoſ.32. lib.1. Euclid. æquiualent 10. rectis, ideoque vnus angulus complectitur vnum rectum cum $\frac{3}{7}$. hoc eſt, gradus 128. Min.34. Sec.17. Ter.8. Quar.34. &c. atque eius ſemiſsis grad.64. min.17. Secun.8. Ter.34. Quar.17. &c. ex qua ſemiſſe nequit Tangens pro perpendiculari, neque ſecans pro ſemidiametro per tabulas Tangentium, atque ſecantium excerpi poteſt. Idemque in aliis figuris innumeris accidere comperies. Quod ſi ſcientia inuenta eſſet conſtruendi omnes figuras regulares, ſuperari aliquo modo poſſet hæc difficultas: propterea quod cognito latere vno in quantiſcunque partibus, cognoſci quoque poſſet tam perpendicularis, quam ſemidiameter in iiſdem partibus, beneficio inſtrumenti partium, vt lib.1. cap.1. ad finem Num.1. tradidimus. Sed quia pauciſsimas figuras æquilateras deſcribere nouimus intra circulum, areas plurimarum ignorari neceſſe eſt. Hanc ob cauſam nonnulli Geometræ, inter quos ſtrenuam operam nauauit Ludolphus à Collen, ingenti labore latera figurarum, ſiue deſcriptæ eæ ſint, ſiue non, explorarunt: quamuis earum anguli præter gradus, ac minuta comprehendant

inſuper

TABVLA CONTINENS LATERA FIgurarum regularium à triangulo vſque ad figuram 80. laterum, poſita diametro 20000000. vel ſinu toto 10000000.

Num. lat. vel angulor.	Latera figurarum regularium, poſita diametro 20000000. vel ſinu toto 10000000.	Num. lat. vel angulor.	Latera figurarum regularium, poſita diametro 20000000. vel ſinu toto 10000000.	Num. lat. vel angulor.	Latera figurarum regularium, poſita diametro 20000000. vel ſinu toto 10000000.
3	17320508	29	2162380	55	1141776
4	14142135	30	2090569	56	1121408
5	11755705	31	2023366	57	1101755
6	10000000	32	1960341	58	1082778
7	8677674	33	1901120	59	1064443
8	7653668	34	1845367	60	1046719
9	6840402	35	1792786	61	1029575
10	6180339	36	1743114	62	1012983
11	5634651	37	1696118	63	996917
12	5176380	38	1651586	64	981353
13	4786313	39	1609331	65	966275
14	4450418	40	1569181	66	951638
15	4158233	41	1530985	67	937445
16	3901806	42	1494601	68	923669
17	3674990	43	1459906	69	910291
18	3472963	44	1426783	70	897296
19	3291891	45	1395129	71	884666
20	3128689	46	1364848	72	872387
21	2980845	47	1335852	73	860444
22	2846296	48	1308062	74	848824
23	2723332	49	1281404	75	837513
24	2610523	50	1255810	76	826499
25	2506664	51	1231218	77	815771
26	2410733	52	1207569	78	805318
27	2321858	53	1184812	79	795130
28	2239289	54	1162896	80	785196

inſuper Secunda, Tertia, Quarta, &c. vt earum areas conſequi poſſimus. Nam ex latere cuiuſcunque figurę regularis cognito in partibus diametri circuli circumſcripti, vel ſinus totius, veniemus per ea, quæ cap. 2. Num. 2. ſcripſimus, in cognitionem lineæ perpendicularis ex centro in vnum latus deductę, ac proinde totam aream nanciſcemur, vt paulo ante Num. 1. docuimus. Latera igitur in quam plurimis figuris in tabula pręcedenti expoſita habes. quæ omnia veris lateribus ſunt paulò minora; & ſi adieceris vnitatem, fient paulò maiora veris; ita vt verum latus trianguli æquilateri inter hos duos numeros 17320508. 17320509. conſiſtat.

Ex cognita ſemidiametro circuli inuenire latus figuræ regularis in eo circulo deſcriptæ.

4. Iam verò cognita ſemidiametro alicuius circuli in partibus cuiuſcunque menſuræ, reperiemus in iiſdem partibus latus figurę regularis, cuius laterum numerus maior non eſt, quam 80. beneficio præcedentis tabulę: ſi nimirum fiat, vt ſinus totus 10000000. ad latus figurę propoſitæ in præcedenti tabula, ita ſemidiamer circuli propoſiti data ad aliud. Sit verbi gratia, ſemidiameter alicuius circuli 12. & inueniendum ſit latus decagoni reſpectu dictæ ſemidiametri: Fiat vt 10000000. ſinus totus ad 6180339. latus Decagoni; ita 12. ſemidiameter data ad aliud; exibitque latus quæſitum 8 $\frac{4164068}{10000000}$. vel in minoribus numeris 8 $\frac{1041017}{2500000}$.

Fractionem magnam ad minorem ferè æquiualentem reducere.

Et ſi moleſtum videatur operari cum fractione tam magna, reduces eam ad minorem quaſi æquiualentem hoc modo. Elige pro Numeratore quemuis numerum, vt 10. Et fiat vt Numerator 164068. ad ſuum Denominatorē 10000000. ita Numerator electus 10. ad aliud, reperieſque Denominatorem 609 $\frac{82588}{164068}$. Ita vt relicta hac fractione, Denominator 609. ſit minor quam verus; & 610. maior, hoc eſt, fractio $\frac{10}{609}$. ſit maior fractione $\frac{164068}{10000000}$. fractio autem $\frac{10}{610}$. minor Inter has autē duas fractiones $\frac{10}{609}$. $\frac{10}{610}$. produces mediā $\frac{20}{1219}$. cuius Numerator ex Numeratoribus, & Denominator ex Denominatoribus conflatus eſt. Eritque fractio inuenta ferè maiori illi æqualis.

Inter duas fractiones inuenire mediā.

Fractionem porrò, cuius Numerator ex duobus Numeratoribus, & Denominator ex Denominatoribus duarum minutiarum componitur, eſſe maiorem minore, & minorem maiore, demonſtrabimus lib. 8. propoſ. 10.

Ex cognito latere figuræ regularis, inuenire ſemidiametrum circuli circumſcripti.

Vicissim ex dato latere cuiuslibet figuræ regularis cognoſcemus ſemidiametrum circuli circumſcribentis: ſi fiat, vt latus propoſitæ figuræ in tabula antecedente ad 10000000. ita latus datum ad aliud. Vt ſi latus Pentagoni detur 12. & fiat, vt 11755705. ad 10000000. ita 12. ad aliud, reperietur ſemidiameter circuli circumſcripti 10 $\frac{2442950}{11755705}$. Et ſi fiat, vt Numerator huius fractionis ad ſuum Denominatorem: Ita Numerator electus quicunque, nimirum 1. ad aliud, inuenietur Denominator ſequens 4 $\frac{1983905}{2442950}$. ita vt fractio $\frac{1}{4}$. ſit maior, quā $\frac{2442950}{11755705}$. at $\frac{1}{5}$. minor Ex additione numeratorū 1. 1. inter ſe, & Denominatorum 4. 5. inter ſe, efficies fractionem $\frac{2}{9}$. mediam, quæ adhuc maior eſt, quam $\frac{2442950}{11755705}$. Media autem inter $\frac{1}{5}$. & $\frac{2}{9}$. eſt $\frac{3}{14}$. quæ parum ab illa differt: ita vt ſemidiameter quæſita dici poſsit eſſe 10 $\frac{3}{14}$. Atque in hunc modum per minores numeros operationes fieri poſſunt, quamuis non omnino exquiſitè, quod fractiones aſſumptę non ſint omnino veræ; ſed hic error in dimenſionibus camporum tolerabilis eſt.

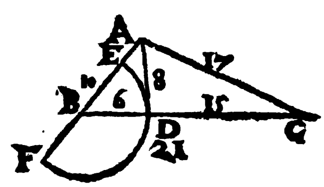
5. Antequam rectilinearum figurarum dimenſionem concludam, lubet regulam attexere, qua ex cognita area cuiuſcunque figuræ latus habentis notum ve-

rum venire poſsimus in cognitionem alterius figuræ ſimilis illi, ſimiliterque poſitę latus homologum etiam notum habentis: quæ ſic ſe habet.

Quadratus numerus denominatoris proportionis, quam latus figuræ ignotæ ad latus figuræ cognitæ habet, (qui denominator habebitur, ſi latus figuræ ignotæ per latus figuræ cognitæ diuidatur) ſi ducatur in aream cognitam producetur area alterius figuræ quæſitæ. Debent autem figuræ eſſe ſimiles, ſimiliterque poſitæ, & earum latera homologa ſumi vt dictum eſt. *Qua ratione ex area cuiuslibet figuræ eruatur area alterius figuræ ſimilis.*

Nam denominator proportionis lateris figurę quæſitę ad latus figuræ datę in ſe multiplicatus gignit denominatorem proportionis duplicatę eorum laterum, vt ad defin. 10. lib. 5. Euclid. ſcripſimus. [a] Cum ergo figurę ſimiles ſimiliterque poſitę habeant etiam proportionem duplicatam laterum homologorum; fit vt denominator proportionis duplicatę laterum prædictorum multiplicans aream cognitam producat aream quęſitam, hoc eſt, numerum, qui ad aream cognitam proportionem habeat duplicatam proportionis datorum laterum, denominatam ſcilicet à denominatore, qui ex denominatore proportionis eorum laterum in ſe multiplicato producitur. Verbi gratia, Trianguli ABC, cuius latus A B, 10. AC, 17. & B C, 21. area eſt 84. Si ergo ſit aliud triangulum huic ſimile habens latus ipſi AB, homologum 70. ipſi verò A C, homologum

[a] *18. vel 20. ſexti.*



119. & ipſi B C, homologum 147. diuidaturque latus 70. per 10. vt denominator 7. proportionis lateris 70. ad latus 10. procreetur, & quadratus numerus huius denominatoris; nimirum 49. ducatur in 84. areā trianguli A B C, producetur area 4116. poſterioris trianguli. Rurſus quia area trianguli æquilateri, cuius ſingula latera ſint, 1. area eſt $\frac{13}{30}$. fermè, vt ſupra patuit, ſi detur aliud triangulum æquilaterum, cuius ſingula latera ſint 70. inueniemus eius aream hoc modo. Denominator proportionis laterum eſt ipſummet latus 70. quod 70. diuiſa per 1. faciant 70. Ducemus ergo 4900. quadratum lateris 70. in $\frac{13}{30}$. aream cognitam. Productus enim numerus 2123 $\frac{1}{3}$. erit area poſterioris trianguli.

6. HÆC regula ita quoque proponi poterit. *Fiat vt quadratus numerus lateris figuræ cognitæ ad quadratum numerum lateris figuræ quæſitæ, ita area figuræ cognitæ ad aliud. Productus enim numerus erit area figuræ quæſitæ.* Propterea quod eadem eſt proportio quadrati lateris cognitæ figuræ ad quadratum lateris figuræ quæſitę, quæ figurę notæ ad figuram quæſitam: [b] quippe cum vtraque proportio ſit duplicata proportionis laterum homologorum. Et quoniam quadratum lateris 1. eſt 1. fit, vt quotieſcunque latus figuræ aream cognitam habentis fuerit 1. ſatis ſit, quadratum numerum lateris figuræ quæſitæ multiplicare in datam aream, vt quęſita area producatur: Adeo vt operæ pretium ſit areas inueſtigare plurimarum figurarum regularium, quarum latera ſint 1. Ex his enim ſine magno labore areæ aliarum figurarum *Regula ſupra dicta aliter propoſita.*

[b] *19. vel 20. ſexti.*

Facilitas prædictæ regulæ, quando latus figuræ notæ eſt vnitas.

ſimilium elicientur, quarum latera cognita ſint. Areas decem figurarum regularium, quarum latera ſunt 1. hic ſubiecimus, vt per eas ſimilium figurarum, quarum latera vnitatem ſuperant, inueſtigari poſsint ex regula Num. 5. vel 6. præſcripta; quamuis in quadrato id neceſſarium non ſit, cum latus datum in ſe ductum producat ſuum quadratum.

Quarum latera ſunt 1.	Figuræ regulares.	Areæ prædictarum figurarum ſunt ferè hæ.
	Trigonum	$\frac{1875000}{4330127}$ Vel $\frac{13}{30}$
	Tetragonum	I
	Pentagonum	$1\frac{8469719}{11775706}$
	Hexagonum	$2\frac{2990381}{5000000}$
	Heptagonum	$3\frac{5507221}{8677674}$
	Octogonum	$4\frac{1585127}{1913417}$
	Enneagonum	$6\frac{1243755}{6840402}$
	Decagonum	$7\frac{858089}{1236068}$
	Vndecagonum	$9\frac{517050}{1408663}$
	Duodecagonum	$11\frac{84614}{431365}$

Qua ratione beneficio laterum ſuperioris tabulæ areæ figurarum regularium inueniantur.

Possvnt autem hę fractiones ad minores ferè æquiualentes, ſi placet, reuocari, vt ſupra Num. 4. docuimus.

7. Areæ porro hæ procreatę ſunt per regulam Num. 1. præſcriptam, inuentis prius perpendicularibus ex centris in latera cadentibus, licet in nonnullis figuris anguli contineant ſecunda, ac tertia, pręter gradus, & minuta; hoc modo. Pro heptagono, verbigratia, ex ſuperiori tabula ſumpta eſt ſemiſsis lateris heptagoni 4338837. (quando numerus lateris eſt impar, addenda eſt 1. vt fiat par, ac proinde ſemiſſem habeat, quandoquidem minus eſt vero latere, vt diximus. Deinde, quia, vt in tractatione ſinuum dictum eſt, ſemiſsis hęc ſinus eſt anguli oppoſiti in centro, quęſitus eſt is angulus ex tabula ſinuum (adhibita parte proportionali, quemadmodum ad finem Lemmatis 53. noſtri Aſtrolabij docuimus, vt angulus reperiretur in gradibus, minutis, ac ſecundis.) inuentuſque eſt grad. 25. min. 42. ſec. 51.

Post

POST hæc, [a] quia eſt, vt ſinus huius anguli inuenti, nimirum ſemiſsis ipſa 4338837. lateris ex ſuperiori tabula excerpti, ad $\frac{1}{2}$. ſemiſſem lateris, id eſt, ita ſinus complementi eiuſdem anguli inuenti, hoc eſt, ita ſinus grad. 64. min. 17. ſec. 9. (adhibita quoque parte proportionali, propter ſecunda.) nimirum 9011398. ad perpendicularem huic complemento inuenti anguli oppoſitam in triangulo rectangulo: Inuenta eſt hæc perpendicularis $\frac{9011398}{8677678}$ quæ tandem ducta in $\frac{7}{2}$. ſemiſſem ambitus heptagoni produxit aream heptagoni $3\frac{11014442}{17355356}$. vel in minoribus numeris $3\frac{5507221}{8677678}$ Atque hac eadem ratione aream cuiuſcunque figuræ regularis latus habentis 1. dummodo numerus laterum maior non ſit, quam 80. reperies: Ex qua deinde aream ſimilis figuræ latus habentis maius, quam 1. per regulam Num. 5. vel 6. traditam elicies. *[a] 4. triang. rectil.*

EODEM tamen artificio hoc Num. 7. expoſito aream cuiuſuis figuræ regularis, etiamſi latus habeat maius, quam 1. (ſi placet) colligere licebit, quamuis non reperiatur prius area figuræ ſimilis, cuius latus ſit 1. ſi nimirum loco $\frac{1}{2}$. ſemiſſis lateris 1. accipiatur ſemiſsis lateris dati, quod maius ſit quam 1. vt perſpicuum eſt.

Ex area cognita quo pacto latus eruatur.

8. Cognita area figuræ regularis, cuius numerus laterum maior non ſit, quã 12. cognoſcetur eius latus hoc modo. Fiat vt area figuræ ſimilis latus habentis 1. ex præcedenti tabula deſumpta ad aream figuræ propoſitæ: Ita 1. quadratum lateris 1. ad aliud. Productus enim numerus erit quadratus lateris quæſiti. Radix ergo eius quadrata dabit latus quæſitum. Nam ita eſt area ad aream, vt quadratum lateris ad quadratum lateris; [b] quod vtraque proportio ſit proportionis laterum duplicata. *[b] 10. vel 20. ſexti.*

QVOD ſi area cognita ſit figuræ regularis plura latera habentis, quam 12. nõ plura tamen, quam 80. inuenienda primum erit area figuræ ſimilis latus habentis 1. beneficio ſuperioris tabulæ laterum, vt Num. 7. docuimus. Deinde latus exquirendum, vt hoc Num. 8. declaratum eſt. Et ſi tabula ſuperior laterum extenſa eſſet ad plura latera, inueniretur eodem modo latus figuræ plurium laterum, quam 80. ex eius area. Exempli gratia. Sit area alicuius trianguli æquilateri $15\frac{3}{5}$. Et quia area æquilateri trianguli, cuius latus eſt 1. inuenta eſt ſupra $\frac{13}{30}$. ſi fiat vt $\frac{13}{30}$. ad aream propoſitam. $15\frac{3}{5}$. ita 1. quadratum lateris 1. ad aliud, reperietur quadratum lateris quæſiti 36. cuius radix quadrata 6. dabit latus, quod quæritur.

De dimenſione circuli ex Archimede.

CAPVT VI.

1. VT circulum quemlibet propoſitum, eiuſq; partes metiri poſsimus, neceſſe eſt probè noſſe, quæ Archimedes de circuli dimenſione tradidit. Non abs re ergo erit, ſi eius libellum de circuli dimenſione acutiſsimũ ſane, & ſubtiliſsimum hic interſeram, tum quia breuiſsimus eſt, quippe qui tribus duntaxat propoſitionibus conſtet: tum ne ſtudioſus, vt rem tam vtilem, atque apud omnes artifices peruulgatam intelligat, Archimedem ipſum adire cogatur: tum vero maximè, quod cum Archimedis ſcripta ob affectatam breuitatem, ſint paulo obſcuriora, illis nos lucem aliquam allaturos ſperamus. Nec

dubitamus etiam, quin res hæc ſtudioſo lectori grata, ac iucunda ſit futura.

PROPOSITIO I.

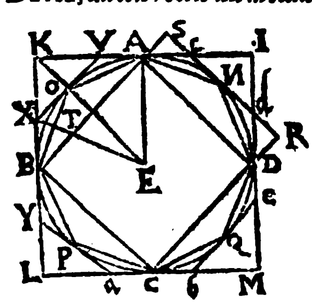
AREA cuiuslibet circuli æqualis eſt triangulo rectangulo, cuius vnum quidem latus circa angulum rectum ſemidiametro circuli, alterũ verò peripheriæ eiuſdem circuli æquale eſt.

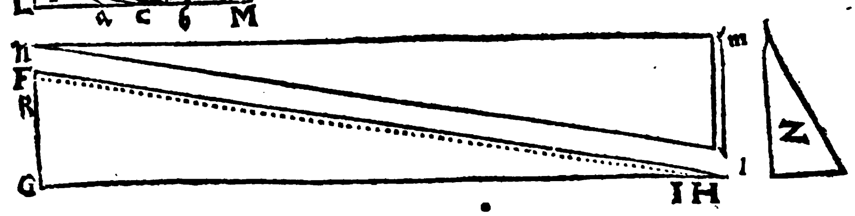
Sit circulus ABCD, cuius centrum E, ſemidiameter EA: ſitque triangulum rectangulum FGH, angulum habens rectum G, latus verò F G, ſemidiametro circuli EA, & latus GH, peripheriæ eiuſdem circuli æquale. Dico circulum ABCD, triangulo FGH, æqualem eſſe. Si enim dicatur non eſſe æqualis, ſit primũ, ſi fieri poteſt, circulus maior quam triangulum, magnitudine z: adeo vt circulus æqualis ſit triangulo, & magnitudini z. ſimul; proptereaque maior, quam z. Si igitur ex circulo auferatur plus, quàm dimidium, & à reſiduo plus etiam, quam dimidium, & ita deinceps: [a] relinquetur tandem magnitudo minor, quam z.

[a] *1. decimi.*

Hæc autem detractio continua fiet, ſi primo loco auferatur ex circulo quadratum inſcriptum A B C D. Hoc enim cum dimidium ſit quadrati I K L M, circulo circumſcripti, vt in ſchol. propoſ. 9 lib. 4. Eucl. oſtendimus: circulus autem ipſius quadrati IKLM, pars ſit: erit quadratum inſcriptum A B C D maius quam dimidium circuli. Deinde ſi auferantur à reſiduis quatuor ſegmentis quatuor triangula Iſoſcelia AOB, BPC, CQD, DNA, ductis rectis ad media puncta arcuum. Hæc enim ſimul maiora ſunt, quam dimidium quatuor ſegmentorum ſimul, cum vnum quodq; maius ſit, quam dimidium ſegmenti, in quo exiſtit. Completo enim rectangulo A R, [b] *erit eius dimidium triangulum A N D: ac proinde idem triangulum maius erit quam dimidium ſegmenti A N D. Eademque ratio eſt de aliis. Pari ratione, ſi à reſiduis octo ſegmentis auferantur octo alia triangula Iſoſcelia in illis conſtituta, &c. atque ita deinceps.*

[b] *41. primi.*





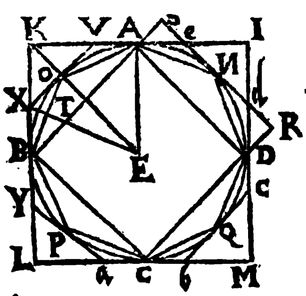
Ponantur ergo iam octo ſegmenta A O, O B, B P, P C, C Q, Q D, D N, N A, relicta eſſe minora magnitudine z. & quoniam circulus æqualis conceditur triangulo FGH, & magnitudini z, ſimul: ſi demantur inæqualia, nimirum iſta ſegmenta ex circulo, & magnitudo z, ex aggregato trianguli cum z, reliqua erit figura inſcripta, Octogona videlicet, maior triangulo F G H, quod eſt abſurdũ, quippe cum multo minor ſit. Si namque ex centro E, ad latus B O, ducatur perpendicularis ET, & in triangulo ſumatur GK, ipſi ET, & recta G i, ambitui

Octo-

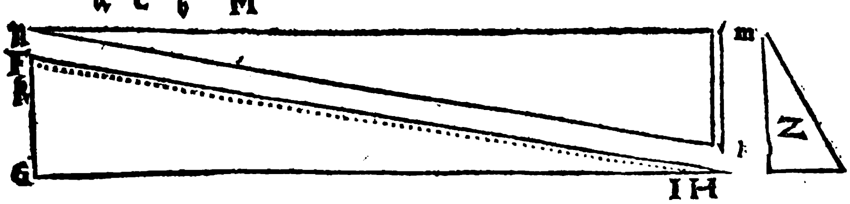
Octogoni æqualis, cadet punctum k, citra F, & i, citra H, quod ET, minor ſit ſemidiametro circuli, & ambitus Octogoni minor peripheria eiuſdem circuli. Igitur ducta recta k i, erit triangulum G k i, minus triangulo F G H, pars toto. Eſt autem triangulum kGi, Octogono æquale: quippe cum ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. Euclid. æquale ſit rectangulo ſub G k, & ſemiſſe ipſius G i, comprehenſo, quod per propoſitionem 2. lib. 7. de Iſoperimetris Octogono æquale eſt. Octogonum ergo minus eſt triangulo FGH. Non ergo maius eſt: ac proinde circulus triangulo maius eſſe nequit.

SIT deinde, ſi fieri poteſt, circulus ABCD, minor quam triangulum FGH, magnitudine z. Circumſcribatur circulo quadratum IKLM, cuius latera circulum tangant in punctis A, B, C, D. quod maius erit triangulo FGH. Cum enim eius ambitus (vt lib. 8. propoſ. 1. probabimus) maior ſit peripheria circuli, hoc eſt, recta G H, & perpendicularis E A, ipſi F G, æqualis, erit triangulum rectangulum latus vnum habens æquale ipſi FG, & alterum maius latere GH, (æquale nimirum ambitui quadrati IKLM.) maius triangulo FGH. Cum ergo triangulum illud, per ſcholium propoſ. 45. lib. 1. Euclid. ſit æquale rectangulo ſub FG, & ſemiſſe ambitus quadrati IKLM, comprehenſo: hoc autem rectangulum per propoſ. 2. lib. 7. de Iſoperimetris, quadrato IKLM, æquale; erit quoque quadratum IKLM, maius triangulo F G H. Et quia triangulum F G H, ponitur æquale circulo, & magnitudini z. ſimul, ac proinde maius quã z, erit quoque quadratum IKLM, (quod maius eſſe oſtendimus triangulo FGH,) maius, quam z. Si igitur ex quadrato IKLM, auferatur plus, quam dimidium, & à reſidio plus etiam quam dimidium, atque ita deinceps, [a] relinquetur tandem magnitudo minor, quam z. [a] *1. decimi.*

Hæc autem detractio continua fiet, ſi primo loco auferatur circulus ABCD: Hic



enim maior eſt ſemiſſe quadrati IKLM, propterea quod quadratum inſcriptum (quod minus eſt circulo, pars toto) ſemiſſis eſt quadrati circumſcripti, ex ſcholio propoſ. 9. lib. 4. Euclid. Quod ſi ducta recta EK, ſecante circulum in O, ducatur per O, ad EK, perpendicularis VX, [b] quæ circulum tanget in O: idemque fiat, ductis rectis EI, EM, EI, &c. deſcriptum erit Octogonum æquilaterum, & æ- [b] *16. tertij.*



quiangulũ VXYabcdeV, vt conſtat ex constructione, demonſtrationeq; propoſ. 12. lib. 4. Eucl. quippe cum ad E A, E O, & ad reliquas ſemidiametros Octogoni inſcripti ducta ſint perpendiculares vr, VX, &c. Quoniã vero vA, vO, per 2. coroll. propoſ. 36. lib. 3. Eucl. æquales ſunt; [c] & eſt KV, maior quam vO: erit quoque KV, maior quam vA, ideoque & triangulum KvO, triangulo vAO, maius erit; [d] cum ſit triangulum ad triangulum, vt baſis ad baſem. Igitur triangulum KVO, maius erit, quam dimidium trianguli KAO; [c] *19. primi.* [d] *1. ſexti.*

KAO; ac proinde multo maius, quam dimidium trianguli mixti KAO, cuius vnum latus eſt arcus AO. Eadem ratione erit KOX, maius, quam dimidium trianguli mixti KOB, cuius vnum latus eſt arcus OB. Auferendo ergo triangulum KVX, ex figura miſtilinea KAB, in qua vnum latus eſt arcus AOB, ablatum erit plus quam dimidium. Subtractis igitur quatuor eiuſmodi triangulis KVX, LYa, Mbc, Ide, ablatum erit plus, quam dimidium ex quatuor reſiduis extra circulum, & ſic deinceps. Ponantur igitur iam octo triãgula mixta reſidua, quorũ baſes ſunt arcus AO, OB, BP, &c. minora magnitudine z. Cum ergo circulus cum z, æqualis poſitus ſit triangulo FGH, erit circulus cum illis octo reſiduis, hoc eſt, figura Octogona VXY, abcdeV, minor eodem triangulo FGH. quod eſt abſurdum, cum maius ſit: quippe cum perpẽdicularis EO, æqualis ſit lateri FG, & ambitus Octogini maior circumferentia circuli, hoc eſt, recta GH. Hinc enim fit, triangulum rectangulum, cuius latus FG, æquale perpendiculari EO, & alterum latus æquale ambitui Octogoni, maius videlicet, quam GH, maius eſſe triangulo FGH. Cum ergo illud triangulum ſit, ex ſcholio propoſ. 41. lib. 1. Eucl. æquale rectangulo ſub FG, & ſemiſſe ambitus Octogoni comprehenſo; hoc autem rectangulum Octogono æquale, ex propoſ. 2. lib. 7. de Iſoperimetris: erit quoq; Octogonum maius triangulo FGH. Nõ ergo minus eſſe poteſt, ac proinde circulus ABCD, minor non eſt triangulo FGH: Sed neque maior eſt, vt demonſtrauimus. Igitur æqualis eſt, quod erat demonſtrandum.

SCHOLIVM.

IOSEPHVS Scaliger, vel quia vim huius demonſtrationis non perpendit, vel quia ſuæ circuli quadrandi rationi vidit eſſe contrariam, non eſt veritus Archimedem hoc loco falſitatis arguere: conaturque oſtendere, non rectè ab eo demonſtratum, circulum æqualem eſſe triangulo rectangulo, cuius vnum latus ſemidiametro, & alterum circumferentiæ circuli eſt æquale. Nam, ait, ſi demonſtratio Archimedis bona eſt, demonſtrabitur eodem modo, circulũ æqualem eſſe triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum ſemidiametro æquale eſt, & alterum peripheria circuli maius. Sit enim in triangulo lmn, latus quidem lm, trianguli ſemidiametro circuli EA, æquale, at mn, peripheria maius. Concedit ergo Scaliger, circulum non eſſe maiorem triangulo FGH, rectè eſſe ab Archimede demonſtratum, hoc eſt, triangulum FGH, cuius latus GH, peripheriæ eſt æquale, non eſſe minus circulo, ac proinde neque triangulum lmn, cuius latus mn, maius eſt peripheria, circulo minus eſſe. Conceditit em, rectè probatum eſſe, circulũ non eſſe minorem triangulo FGH, ſi latus GH, peripheriæ ſit ęquale, hoc eſt, triangulum FGH, non eſſe maius circulo. Sed negat, ex hoc ſequi, triangulum FGH, eſſe æquale circulo. Cur? quia, inquit, eodem modo, ſi baſis mn, maior eſt peripheria, ſed minor circumſcripti polygoni ambitu, (hoc enim contingere, ait, nihil prohibet) polygonum erit quidem maius triangulo lmn, quod ambitus polygoni maior ſit recta mn, & ſemidiameter EA, rectæ lm, æqualis. Sed reſectis portionibus, ſequeretur, idẽ polygonum eſſe triangulo lmn, minus, quod eſt ineptum. Ita ne verò mi Scaliger? Non aduertis, te cum hypotheſi pugnare? Nam poſito latere mn, maiore, quam peripheria; quando eo peruentum erit, polygonum eſſe minus triangulo lmn, (ſi nimirum relictæ portiones minores fuerint magnitudine z,) ſequitur

quitur neceſſariò, ambitum polygoni minorem eſſe latere m n. Cum enim triangulum rectangulum, cuius altitudo ſemidiametro polygoni, & baſis ambitui æqualis eſt, æquale ſit, ex ſcholio propoſ.41. lib.1. Eucl. rectangulo ſub eadem ſemidiametro, & ſemiſſe ambitus polygoni comprehenſa; hoc autem, per propoſ.2.lib.7.huius de Iſoperimetris, polygono æquale: erit quoque triangulum illud minus triangulo l m n. Quare cum hæc triangula habeant æquales altitudines; [a] erit vt illud triangulum ad l m n, ita baſis illius ad baſem m n: ac proinde illa baſis, hoc eſt, ambitus polygoni, baſe m n, minor erit. Non ergo ponere potes baſem trianguli l m n, ſi maior eſt, quam peripheria circuli, minorem ambitu polygoni: In demonſtratione autem Archimedis conſtat, ambitũ polygoni maiorem eſſe baſe trianguli F G H, ſi G H, æqualis eſt peripheriæ circuli, cum maior ſit, quam peripheria: ac propterea rectè concluſit Archimedes, polygonum eſſe maius triangulo FGH, cum tamen ex hypotheſi aduerſarij oſtenſum ſit eſſe minus. Itaque potuiſſet Archimedes ita quoque propoſitum colligere. Polygonum minus eſt triangulo F G H, propter relictas ſectiones minores magnitudine z. Ergo eius ambitus minor eſt baſe G H, (quemadmodum proximè demonſtrauimus.) hoc eſt, peripheria circuli. quod eſt abſurdũ, cum ambitus polygoni maior ſit, quam peripheria. Quod abſurdum, doctiſsimè Scaliger, colligere non potes in tuo triangulo l m n, cum ſtatuas baſem mn, peripheria circuli maiorem. Et ſane miror te, Mathematicus cũ ſis, negare quãtitatẽ aliquam illi eſſe æqualem, qua neque maior eſt, neque minor. Si enim æqualis non eſt, erit inæqualis. Igitur vel maior vel minor, contra hypotheſim, cum dicatur neque maior eſſe, neque minor. An non vides, non ſolum Archimedem, ſed etiam Euclidem lib.12. hunc argumentandi modum frequentiſsimè vſurpare?

[a] *1.ſexti.*

PROPOSITIO II.

CVIVSLIBET circuli peripheria tripla eſt diametri, & adhuc ſuperat parte, quæ quidem minor eſt decem ſeptuageſimis, hoc eſt, ſeptima parte diametri, maior verò decem ſeptuageſimis primis.

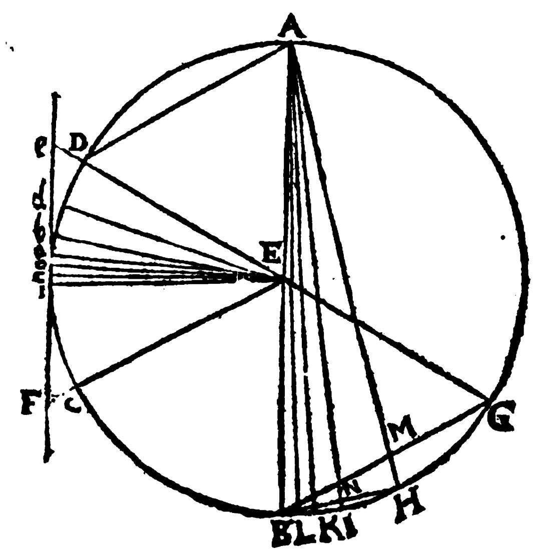
HÆC eſt Archimedis propoſitio 3. quam nos ſecundam facimus, vt doctrinæ ordo ſeruetur, quandoquidem ſequens propoſitio 3. quam ipſe 2. facit, hãc noſtram propoſitionem 2. in demonſtrationem adhibet.

Sit igitur circulus ABCD, cuius centrum E, diameter AB, quam ad rectos angulos ſecet ſemidiameter E c, & e c F, ad E c, perpendicularis ducatur, [b] quæ circulum tanget in c. Ducatur latus hexagoni AD, [c] quod ſemidiametro æquale erit, & arcus AD, grad.60. Ideoq; D c. grad.30. Ducta ergo recta E D e, erit angulus e E c, tertia pars recti, cum rectus angulus contineat grad. 90. Fiat quoque angulus c E F, angulo c E e, æqualis: eruntq; anguli e, F, inter ſe æquales, quod vterque complementum ſit tertiæ partis anguli recti, ac proinde vterque duas tertias partes vnius recti comprehendet. [d] Cum ergo omnes tres anguli in triangulo e E F, contineant $\frac{6}{3}$. vnius recti, continebit quoque e E F, $\frac{2}{3}$. vnius recti ipſumq; triangulum æquiangulum erit, hoc eſt, per coroll. propoſ.6. lib.1. Euc. æquilaterũ; propterea; perpendicularis E c, baſem e F, biſariã ſecabit, ex ſcholio propoſ.26. lib.1. Euclid. atq; ideo E e, ipſius e c, dupla erit. Poſita igitur c e,

[b] *16. tertij.*
[c] *15. quar.*
[d] *32. primi.*

153. erit E e, 306. Et ſi quadratum ipſius c e, 23409. dematur ex 93636. quadrato ipſius E e, [a] reliquum fiet quadratum ipſius E c, 70227. cuius radix eſt paulo maior, quam 265. [b] ac proinde E c, ad c e, maiorem habebit proportionem, quam 265. ad 153.

[a] *47. primi.*
[b] *8. quinti.*

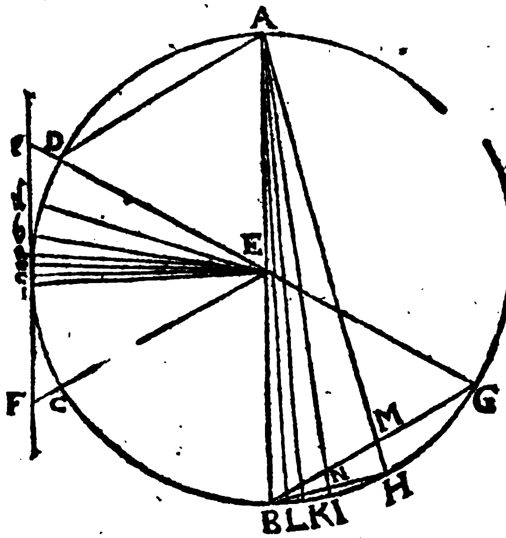


Secto iam angulo e E c, biſariam per rectã E d; [c] erit e E, ad E c, vt e d, ad d c. Et componendo e E, E c ſimul ad E c, vt e c, ad d c. Et permutando e E, E c, ſimul ad e c, vt E c, ad c d. Quia verò e E, E c, ſimul maiores ſunt, quam 571. (quippe cum E e, ſit 306. & E c, paulo maior, quam 265.) & e c, poſita eſt 153. [d] habebunt e E, E c, ſimul ad e c, maiorem proportionem, quam 571. ad 153. ideoque & proportio E c, ad c d, maior erit, quam 571. ad 153. ac proinde ſi c d, ponatur 153. [e] erit E c, paulo maior quam 571. Igitur quadratum ipſius E c, paulo maius erit, quam 326041. atque idcirco, cum quadratum ipſius c d, ſit 23409. erit quadratum ipſius E d, [f] quod quadratis rectarum E c, c d, eſt æquale, paulo maius, quam 349450. eiuſque radix maior, quam $591\frac{1}{8}$. quippe cum huius radicis quadratum ſit tantum $349428\frac{49}{64}$. [g] Habebit igitur E d, ad d c, maiorem proportionem quam $591\frac{1}{8}$. ad 153.

Secto rurſus angulo d E c, biſariam per rectam E b; [h] erit rurſus vt d E, E c, ſimul ad d c, ita E c, ad c b. Quia verò d E, E c, ſimul maiores ſunt, quam $1162\frac{1}{8}$. (quippe cum E d, maior ſit, quam $591\frac{1}{8}$. & E c, maior, quam 571.) & d c, poſita eſt 153. [i] habebunt d E, E c, ad d c, maiorem proportionem, quam $1162\frac{1}{8}$. ad 153. ideoque & E c, ad c b, proportionem habebit maiorem, quam $1162\frac{1}{8}$. ad 153. ac proinde ſi ponatur c b, 153. erit E c, maior, quam $1162\frac{1}{8}$. [k] Igitur quadratum ipſius E c, maius erit quam $1350534\frac{33}{64}$. cui ſi addatur quadratum 23409. ipſius c b, erit quadratum ipſius E b, [l] quod quadratis rectarum E c, c b, æquale eſt, maius, quam $1373943\frac{33}{64}$. eiuſque radix propterea, id eſt, recta E b,

[c] *3. ſexti.*
[d] *8. quinti.*
[e] *10. quinti.*
[f] *47. primi.*
[g] *8. quinti.*
[h] *3. ſexti & componendo permutandoque.*
[i] *8. quinti.*
[k] *10. quinti.*
[l] *47. primi.*

cta Eb, paulo maior quam $1172\frac{1}{8}$. quippè cum huius radicis quadratum ſit tantum $1373877\frac{1}{64}$. [a] Habebit ergo E b, ad b c, maiorem proportionem, quam $1172\frac{1}{8}$. ad 153. *a 8. quinti.*



SECTO item angulo b E c, biſariam per rectam E a; [b] erunt b E, E c, ſimul ad b c, vt E c, ad c a. Quia verò b E, maior eſt, quam $1172\frac{1}{8}$. & E c, maior, quã $1162\frac{1}{8}$. erunt b E, E c, ſimul maiores, quam $2334\frac{2}{8}$. vel $2334\frac{1}{4}$. Cum ergo c b, poſita ſit 153. [c] habebunt b E, E c, ſimul ad c b, maiorem proportionem, quam $2334\frac{1}{4}$. ad 153. ideoque & E c, ad c a, proportionem habebit maiorem, quam $2334\frac{1}{4}$. ad 153. ac proinde, ſi c a, ponatur 153. [d] erit E c, maior, quam $2334\frac{1}{4}$. Igitur quadratum ipſius E c, maius erit, quam $5448723\frac{1}{16}$. cui ſi addatur quadratum 23409. ipſius c a, erit quadratum ipſius E a, [e] quod quadratis rectarum E c, c a, æquale eſt, maius quam $5472132\frac{1}{16}$. eiuſque radix maior, quam $2339\frac{1}{4}$. cum huius radicis quadratum ſit tantum $5472090\frac{9}{16}$. [f] Ergo E a, ad a c, maiorem proportionem habebit, quam $2339\frac{1}{4}$. ad 153.

b 3. ſexti. & componendo, permutandoque.
c 8. quinti.
d 10. quinti.
e 47. primi.
f 8. quinti.

SECTO denique angulo quoque a E c, biſariam per rectam E o, [g] erunt a E, E c, ſimul ad a c, vt E c, ad c o. Quia verò a E, maior eſt, quam $2339\frac{1}{4}$. a & E c, maior quam $2334\frac{1}{4}$. erunt a E, E c, ſimul maiores, quam $4673\frac{1}{2}$. Cum ergo c a, poſita ſit 153. [h] habebunt a E, E c, ſimul ad c a, hoc eſt, E c, ad c o, maiorem proportionem, quam $4673\frac{1}{2}$. ad 153. ac propterea ſi ponatur c o, 153. [i] erit E c, maior quam $4673\frac{1}{2}$.

g 3. ſexti. & componendo, permutandoque.
h 8. quinti.
i 10. quinti.

QVONIAM igitur angulus e E c, tertia pars eſt recti, erit eius ſemiſsis d E c, ſexta pars recti, & huius ſemiſsis b E c, $\frac{1}{12}$. recti, & huius ſemiſsis a E c, $\frac{1}{24}$. recti, & denique huius ſemiſsis o E c, $\frac{1}{48}$. recti. [k] Qualium ergo partium 48. eſt quadrans A c, talium 1. erit arcus c o: & idcirco erit c o, $\frac{1}{192}$. totius circumferentiæ. Fiat angulus c E i, angulo c E o, æqualis; eritq; totus angulus o E i, $\frac{1}{96}$. quatuor rectorũ: [l] ideoq; arc° o i, $\frac{1}{96}$. totius circũferentiæ. Per doctrinã ergo ꝓpoſ. 12. lib. 4. Eucl. recta o i,

k 33 ſexti.
l 33. ſexti.

 latus

latus erit polygoni circulo circumſcripti, quod lateribus æqualibus 96. continetur. Et quia oſtenſum eſt, E c, ad c o, maiorem habere proportionem, quam
a 15. quinti. $4673\frac{1}{2}$. ad 153. [a] habebit quoque diameter AB, ipſius E c, dupla ad o i, ipſius c o, duplam maiorem proportionem, quam $4673\frac{1}{2}$. ad 153. Si ergo o i, latus polygo-
b 10. quinti. ni ponatur 153. [b] erit diameter AB, maior, quam $4673\frac{1}{2}$. Multiplicentur 153. per
c 8. quinti. 96. vt totus ambitus polygoni producatur 14688. [c] habebitque ambitus poly-
d 8. quinti. goni ad diametrum AB, minorem proportionem, quam 14688. ad $4673\frac{1}{2}$. [d] Eſt autem proportio 14688. ad $4673\frac{1}{2}$. minor, quam tripla ſeſquiſeptima; quod 14688. ad 4673. $\frac{5}{11}$. (qui numerus paulo minor eſt quam $4673\frac{1}{2}$.) habeant pro-
e ſchol. 13. quinti. portionem triplam ſeſquiſeptimam. [e] Igitur & ambitus polygoni ad diametrũ AB, proportionem habet minorem tripla ſeſquiſeptima: [f] atque adeo circum-
f 8. quinti. ferentia, quæ (vt lib. 8. propoſ. 1. probabimus) minor eſt ambitu polygoni, multo minorem proportionem tripla ſeſquiſeptima ad diametrum habebit; ideoq; circumferentia tripla eſt diametri, & ad huc ſuperat parte, quæ minor eſt $\frac{10}{70}$. hoc eſt, $\frac{1}{7}$. diametri. Nam ſi contineret ter, & $\frac{1}{7}$. haberet circumferentia ad diametrum proportionem triplam ſeſquiſeptimam: ſi vero contineret ter, & pluſquã $\frac{1}{7}$. haberet maiorem proportionem, quam triplam ſeſquiſeptimam, cum tamen minorem habeat, vt demonſtratum eſt.

Iam vero in eodem circulo ſit latus hexagoni B G, ſemidiametro æquale, per coroll. propoſ. 15. lib. 4. Eucl. iunganturque rectæ AG, E G. Et quia trian-
g coroll. 3. propoſ. 32. lib. 1. gulum E B G, eſt æquilaterum conſtans ex tribus ſemidiametris; [g] erit angulus BEG, $\frac{2}{3}$. vnius recti, [h] ac proinde eius ſemiſsis BAG, erit $\frac{1}{3}$. vnius recti. Et quia
h 20. tertij. diameter AB, dupla eſt ſemidiametri BG, ſi BG, ponatur 780. erit AB, 1560. [i] Cũ
i 47. primi. ergo quadratum ipſius A B, æquale ſit quadratis rectarum B G, G A; [k] quod an-
k 31. tertij. gulus AGB, in ſemicirculo rectus ſit: ſi quadratum 608400. ipſius BG, dematur ex 2433600. quadrato ipſius A B, reliquum fiet quadratum 1825200. ipſius AG, cuius radix paulo minor eſt, quam 1351. cum huius quadratum 1825201.
l 8. quinti. maius ſit, quam 1825200. [l] Igitur AG, ad GB, minorem habebit proportionem,
m 10. quinti. quam 1351. ad 780. ac proinde ſi B G, ponatur 780. [m] erit A G, minor, quam 1351.

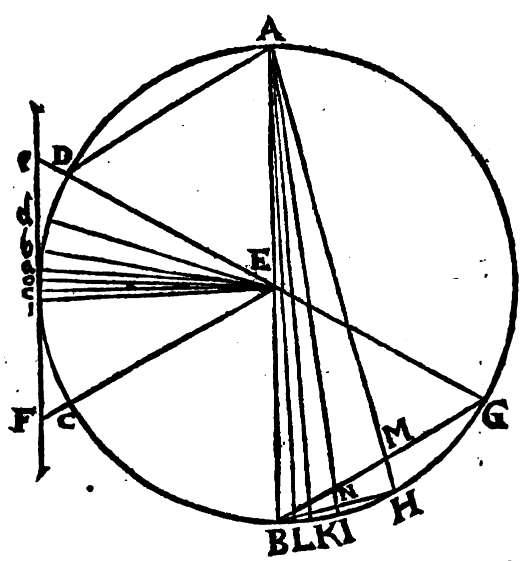
Secto iam angulo BAG, bifariam per rectam AH, ſecantem BG, in M, du-
n 21. tertij. ctaque HB, erunt triangula BHM, AHB, æquiangula: [n] propterea quod angulus HBM, æqualis eſt angulo HAG, ob eandem baſem G H; ideoque per con-
o 4. ſexti. ſtructionem angulo H A B; & angulus rectus H, in ſemicirculo communis. [o] Igitur erit AH, ad HB, vt HB, ad HM. Item AB, ad BH, vt BM, ad M H: & permutando AB, ad BM, vt BH, ad HM: ideoque erunt tres hæ proportiones AH, ad HB; HB, ad HM: & AB, ad BM, æquales. Sed vt AB, ad BM, ita eſt vtraq;
p 3. ſexti. ſimul BA, AG, ad BG. [p] *Nam vt AG, ad AB, ita eſt GM, ad MB; & componendo vt AG, AB, ſimul ad AB, ita GM, MB, ſimul id eſt, tota GB, ad MB: Et permutando vt AG, AB, ſimul ad GB, ita AB, ad MB.* Igitur erit quoque, vt vtraque AG, AB, ſimul ad GB, ita AH, ad HB. Eſt autem AG, oſtenſa minor, quam 1351. & AB, poſita eſt 1560. & GB, 780. Igitur vtraque AG, AB, ſimul (cum minus efficiant, quã
q 8. quinti. 2911.) [q] minorem habebit proportionem ad GB, quam 2911. ad 780. Quare etiam proportio AH, ad HB, minor erit, quam 2911. ad 780. ac proinde ſi HB, po-
r 10. quinti. natur 780. [r] erit AH, minor, quam 2911. ideoque eius quadratum minus, quam 8473921. cui ſi addatur quadratum 608400. ipſius B H, fiet quadratum ipſius
s 47. primi. AB, [s] (quod quadratis rectarum AH, HB, æquale eſt) minus, quam 9082321. ideoque eius radix, vel recta A B, minor, quam $3013\frac{3}{4}$. cum huius quadratum

9082-

9082689 $\frac{1}{16}$. maius ſit, quam 9082321. Igitur AB, ad BH, minorem proportio-
nem habebit, quam 3013 $\frac{3}{4}$. ad 780. ac proinde ſi BH, ponatur 780. [a] erit AB, mi- [a] *10. quinti.*
nor quam 3013 $\frac{3}{4}$.

SECTO rurſus angulo HAB, bifariam per rectam AI, ſecantem HB, in N;
erunt vt prius, triangula BIN, AIB, æquiangula. Ergo, vt ſupra, demonſtrabi-
mus, vtramque BA, AH, ſimul ad HB, habere eandem proportionem quam AI,
ad IB. Eſt autem BA, oſtenſa minor, quam 3013 $\frac{3}{4}$. & AH, minor, quam 2911. &
ob id earum ſumma minor, quam 5924 $\frac{3}{4}$. ipſa autem HB, poſita eſt 780. [b] Igi- [b] *8. quinti.*
tur vtraque BA, AH, ſimul ad HB, hoc eſt, AI, ad IB, minorem habebit propor-
tionem, quam 5924 $\frac{3}{4}$. ad 780. Si ergo IB, ponatur 780. [c] erit AI, minor, quam [c] *10. quinti.*
5924 $\frac{3}{4}$. Et quoniam eſt, vt 5924 $\frac{3}{4}$. ad 780. ita 1823. ad 240, quod idem nu-
merus fiat ex primo in quartum, qui ex ſecundo in tertium, quæ quidem pro-
portio denominatur à 7 $\frac{143}{240}$. habebit quoque AI, ad IB, minorem proportio-
nem, quam 1823. ad 240. ideoque poſita IB, 240. [d] erit AI, minor, [d] *10. quinti.*
quam 1823. atque ob id quadratum ipſius AI, minus, quam 3323329. cui
ſi addatur quadratum 57600. ipſius IB, fiet quadratum ipſius AB, [e] (quod qua- [e] *47. primi.*
dratis rectarum AI, IB, æquale eſt) minus quam 3380929. eiuſque radix pro-
pterea, vel recta AB, minor quam 1838. $\frac{9}{11}$. cum huius quadratum 3381252 $\frac{37}{121}$.
maius ſit, quam 3380929. [f] Igitur AB, ad BI, minorem proportionem habebit, [f] *8. quinti.*
quam 1838 $\frac{9}{11}$. ad 240. ac proinde poſita BI, 240. [g] erit AB, minor, quam [g] *10. quinti.*
1838 $\frac{9}{11}$.

SECTO item angulo IAB, bifariam per rectam AK, oſtendemus eodem mo-
do, vtramque BA, AI, ſimul ad IB, habere eandem proportionem, quam AK, ad
KB. Sunt autem BA, AI, ambæ ſimul minores, quam 3661 $\frac{9}{11}$. (quod BA, oſ-

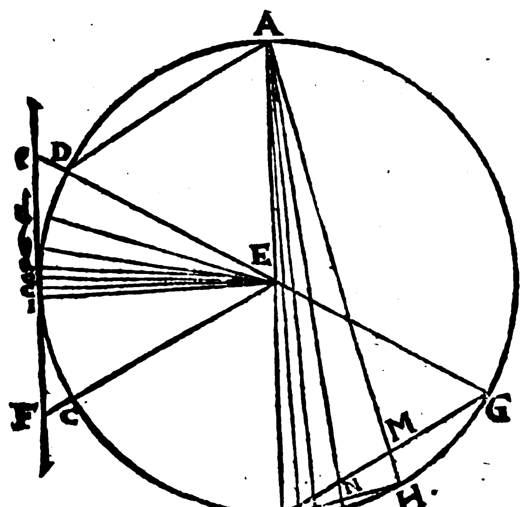


tenſa ſit minor, quam 1838 $\frac{9}{11}$. & AI, minor, quam 1823.) & IB, poſita eſt 240.
[h] Vtraq; ergo BA, AI, ſimul ad IB, hoc eſt, AK, ad KB, minorem habebit propor- [h] *8. quinti.*

 tionem

tionem, quam 3661 $\frac{9}{11}$. ad 240. Vt autem 3661 $\frac{9}{11}$. ad 240. ita eſt 1007. ad 66. quod idem gignatur numerus ex primo in quartum, qui ex ſecundo in tertium, quę quidem proportio denominatur à 15 $\frac{17}{66}$. Igitur AK, ad KB, minorem quoque proportionem habebit, quam 1007. ad 66. idéoque poſita KB, 66.
[a] 10. quinti. [a] erit A K, minor, quam 1007. ac propterea eius quadratum minus, quam 1014049. cui ſi addatur quadratum 4356. ipſius KB; fiet quadratum ipſius AB,
[b] 47. primi. [b] (quod illis duobus æquale eſt) minus quam 1018405. eiuſque radix propterea, id eſt, recta AB, minor, quam 1009 $\frac{1}{4}$. cum huius quadratum 1018417 $\frac{13}{36}$. ſit
[c] 8. quinti. maius, quam 1018405. [c] Quocirca AB, ad BK, minorem proportionem habe-
[d] 10. quinti. bit, quam 1009 $\frac{1}{6}$. ad 66. atque idcirco poſita BK, 66. [d] erit AB, minor, quam 1009 $\frac{1}{6}$.

Secto denique angulo KAB, bifariam, per rectam AL, demonſtrabimus eadem ratione, vtramque BA, AK, ſimul ad CK, eſſe, vt AL, ad LB. Sunt autem ambę B A, A K, ſimul minores, quam 2016 $\frac{1}{6}$. (quod BA, ſit oſtenſa minor,
[e] 8. quinti. quam 1009 $\frac{1}{6}$. & AK, minor, quam 1007.) & BK, poſita eſt 66. [e] Igitur vtraque BA, AK, ſimul ad CK, hoc eſt, AL, ad LB, habebit proportionem minorem,
[f] 10. quinti. quam 2016 $\frac{1}{6}$. ad 66. atque idcirco ſi LB, ponatur 66. [f] erit AL, minor, quam 2016 $\frac{1}{6}$. ideoque quadratum eius minus quam 4064928 $\frac{1}{36}$. cui ſi addatur qua-
[g] 47. primi. dratum 4356. ipſius LB; fiet quadratum ipſius A B, [g] quod duobus illis eſt æquale) minus, quam numerus 4069284 $\frac{1}{36}$. ideoq; eius radix, id eſt, recta AB, minor, quam 2017 $\frac{1}{4}$. cum huius quadratum 4069297 $\frac{9}{16}$. ſuperet 4069284 $\frac{1}{36}$.
[h] 8. quinti. [h] Quamobrem AB, ad BL, minorem proportionem habebit, quam 2017 $\frac{1}{4}$. ad
[i] 10. quinti. 66. ideoque ſi BL, ponatur 66. [i] erit AB, minor, quam 2017 $\frac{1}{4}$.
[k] 26. tertij. Qvoniam igitur angulus G A H, angulo H A B, æqualis eſt; [k] erit arcus



GH, arcui HB, æqualis: eademque ratione arcus HI, arcui IB & IK, ipſi KB, & KL, ipſi LB, æqualis erit. Cum ergo GB, ſit $\frac{1}{6}$. totius circumferentiæ, erit H B, $\frac{1}{12}$. &

$\frac{1}{12}$. & IB, $\frac{1}{24}$. & KB, $\frac{1}{48}$. & LB, $\frac{1}{96}$. ac proinde recta BL, latus erit Polygoni circulo inſcripti, quod 96. lateribus æqualibus continetur. Quoniam vero BL, poſita eſt 66. ſi 66. ducantur in 96. fiet ambitus Polygoni 6336. [a] Quapropter ambitus Polygoni ad diametrum AB, maiorem proportionem habebit, quam 6336. ad 2017 $\frac{1}{4}$. cum diameter AB, oſtenſa ſit minor, quam 2017 $\frac{1}{4}$. [b] Eſt autem proportio 6336. ad 2017 $\frac{1}{4}$. maior, quam tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas, quod proportio 6336. ad 2017 $\frac{65}{223}$. (qui numerus maior eſt, quam 2107 $\frac{1}{4}$) ſit tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas. Ergo ambitus Polygoni maiorem habet proportionem ad diametrum, quam 3 $\frac{10}{71}$. Cum igitur circumferentia circuli ſit maior ambitu Polygoni, [c] habebit circumferentia ad diametrum multo maiorem proportionem, quam 3 $\frac{10}{71}$. Ac proinde circumferentia diametrum continebit ter, & inſuper partem maiorem, quam $\frac{10}{71}$. Nam ſi contineret $\frac{10}{71}$. haberet circumferentia ad diametrum proportionem 3 $\frac{10}{71}$. Si autem contineret maiorem partem, quam $\frac{10}{71}$. haberet proportionem minorem, quam 3 $\frac{10}{71}$. cum tamen maiorem habere demonſtratum ſit. Et quoniam $\frac{1}{8}$. minor eſt, quam $\frac{10}{71}$. liquet ex hac ſecunda parte propoſitionis, circumferentiam continere diametrum ter, & plus, quam $\frac{1}{8}$. diametri. Cum ergo ex prima parte conſtet, circumferentiam continere diametrum ter, & minus, quam $\frac{1}{7}$. diametri: perſpicuum eſt, veram proportionem circumferentiæ ad diametrum conſiſtere inter triplam ſeſquiſeptimam, & triplam ſeſquioctauam.

a 8. quinti.
b 8. quinti.
c 8. quinti.

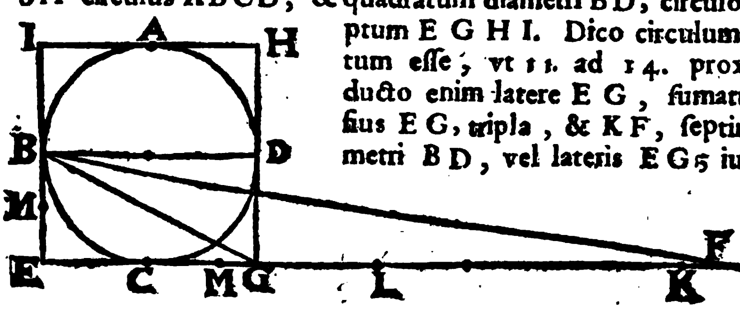
COROLLARIVM.

ITAQVE ſi diameter per 3 $\frac{1}{7}$. multiplicetur, gignetur numerus maior, quam circumferentia: ſi verò multiplicetur per 3 $\frac{10}{71}$. procreabitur minor numerus, quam circumferentia. E contrario, ſi circumferentia diuidatur per 3 $\frac{1}{7}$. producetur numerus minor, quam diameter: ſi vero diuidatur per 3 $\frac{10}{71}$. prodibit numerus maior, quam diameter.

PROPOSITIO III.

CIRCVLVS quilibet ad quadratum diametri proportionem habet, quam ad 11. ad 14. proximé.

SIT circulus ABCD, & quadratum diametri BD, circulo circumſcriptum EGHI. Dico circulum ad quadratum eſſe, vt 11. ad 14. proximè. Producto enim latere EG, ſumatur EK, ipſius EG, tripla, & KF, ſeptima pars diametri BD, vel lateris EG; iunganturque



rectę BG, BF. Quoniam igitur EF. ad diametrum EG, proportionem habet triplam ſeſquiſeptimam, ex conſtructione; erit per precedentem EF, circumferentiæ circuli fermè æqualis. Cum ergo BE, ęqualis ſit ſemidiametro: erit per 1. propoſ. triangulum BEF, circulo æquale proximè: Triangulum autem BEG, quarta pars erit quadrati EH. Quia verò poſito latere EG, 7. recta EF, eſt 22. [a] erit triangulum BEF, hoc eſt, circulus ABCD, ad triangulum BEG, vt 22. ad 7. Sed poſito triangulo BEG, 7. quadratum EGHI, ipſius quadruplum, eſt 28. Igitur circulus ad quadratum, eſt fermè, vt 22. ad 28. hoc eſt, vt 11. ad 14. quod erat demonſtrandum.

[a] *1. ſexti.*

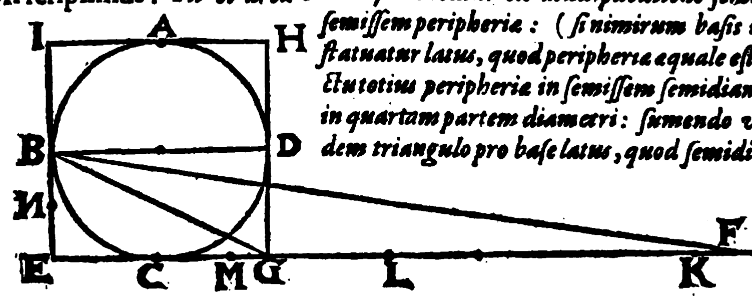
DE AREA CIRCVLI, INVENTIONEque circumferentiæ ex diametro, & diametri ex circumfetentia.

CAPVT VII.

1. QVONIAM triangulum rectangulum, cuius vnum latus circa angulum rectum ſemidiametro circuli, & alterum peripheriæ eiuſdem æquale eſt, [b] areæ circuli adæquatur; huius autem trianguli area ex ductu perpendicularis in ſemiſſem baſis producitur, vt cap. 2. Num. 2. huius libri ſcripſimus: *Fit vt area circuli producatur ex multiplicatione ſemidiametri in ſemiſſem peripheriæ: (ſi nimirum baſis illius trianguli ſtatuatur latus, quod peripheriæ æquale eſt) Vel ex ductu totius peripheriæ in ſemiſſem ſemidiametri, hoc eſt, in quartam partem diametri: ſumendo videlicet in eodem triangulo pro baſe latus, quod ſemidiametro eſt æquale.) Vel denique ex ductu totius diametri in quartam peripheriæ partem*, quod ita perſpicuum faciemus.

[b] *1. de Dimenſ. circuli.*

Area circuli trib. viis, ex cognita diametro, & circumferentia.



REPETATVR figura precedentis propoſitionis, diuidaturque EF, quę peripheriæ circuli eſt æqualis, bifariam in L, ita vt EL, ſemiperipherię ſit æqualis: Item EL, bifariam ſecetur in M, vt EM, æqualis ſit quartę parti peripherię. Et tandem BE, bifariam quoque ſecetur in N, vt EN, ſemiſsis ſit ſemidiametri BE, hoc eſt, quarta pars totius diametri. [c] Et quia triangulum BEF, æquale eſt circulo ABCD; erit quoque rectangulũ ſub ſemidiametro BE, & ſemiperipheria EL, comprehenſum (quod per propoſitionem 1. lib. 7. huius, triangulo ęquale eſt.) eidem circulo ęquale; quod eſt primum.

[c] *1. de Dimenſ. circuli.*

NON aliter rectangulum comprehenſum ſub tota peripheria EF, & EN, quarta parte diametri (quod per propoſ. 1 lib. 7. huius, eidem triangulo æquale eſt) eidem circulo erit æquale, quod eſt ſecundum.

DENI-

DENIQVE quia quatuor lineæ EI, EB, EL, EM, proportionales ſunt, quod tam priores duę, quam poſteriores duę habeant proportionem duplam; a erit rectangulum ſub EI, diametro, & EM, quarta parte peripheriæ comprehenſum, rectangulo ſub EB, ſemidiametro, & EL, ſemiperipheria comprehenſo æquale. Cum ergo hoc in prima parte oſtenſum ſit æquale circulo, erit quoque illud eidem circulo æquale. quod eſt tertium. *a 16. ſexti.*

VT fractiones interdum vitentur, ducenda erit tota diameter in totam circumferentiam. Quarta enim pars numeri producti area erit circuli: propterea quod numerus productus quadruplus eſt numeri producti ex ſemidiametro in ſemicircumferentiam, vt liquet. *Area ſemicirculi, Quadrantis, octaue partis, &c.*

SEQVITVR ex prima parte, aream ſemicirculi produci ex ſemidiametro in quartam partem circumferentię: quia nimirum producitur ſemiſsis eius, quod fit ex ſemidiametro in ſemiſſem peripheriæ. item aream Quadrantis procreari ex ſemidiametro in octauam partem circumferentię: Et aream octauę partis ex ſemidiametro in ſextamdecimam partem circumferentię: Et aream ſextędecimę partis ex ſemidiametro in $\frac{1}{32}$. circumferentię, & ſic deinceps: quia ſemper producitur ſemiſsis pręcedentis producti; quemadmodum & partes circuli ſemiſſes ſunt pręcedentium partium: nimirum Quadrans ſemiſsis eſt ſemicirculi; & octaua pars ſemiſsis Quadrantis; & ſextadecima pars ſemiſsis octauę partis, &c.

1. IGITVR vt area circuli reperiatur, neceſſe eſt tam eius diametrum, quam circumferentiam eſſe cognitam. Quare trademus hic regulas nonnullas, per quas ex data diametro circumferentia tum maior, tum minor, quam vera, ex propoſ. 2. de Dimenſione circuli inueniatur. Deinde alias regulas pręſcribam, per quas area circuli tum maior, tum minor, quam vera, vel ex ſola diametro, vel ex ſola circumferentia cognita eruatur.

I.

Ex data diametro circuli circumferentiam vera maiorem reperire.

FIAT vt 7. ad 22. ita data diameter, verbi gratia, 28. ad aliud, procreabiturque circumferentia 88. maior quam vera. b Quoniam enim proportio circumferentiæ ad diametrum minor eſt, quam tripla ſeſquiſeptima; proportio autem 88. ad 28. eſt tripla ſeſquiſeptima, c eadem videlicet, quæ 22. ad 7. c erit numerus 88. maior, quam circumferentia circuli, cuius diameter eſt 28. *b 2. de Dimẽſ. circuli. c 10. quinti.*

II.

EX data diametro circuli circumferentiam vera minorem elicere.

FIAT vt 71. ad 223. ita data diameter 28. ad aliud, produceturque circumferentia $87\frac{67}{71}$*. minor quam vera.* d Quoniam enim proportio circumferentię ad diametrum maior eſt, quam tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas; proportio autem $87\frac{67}{71}$. ad 28. eſt tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas, nimirum eadem, quæ 223. ad 28. e erit circumferentia circuli, cuius diameter 28. maior, quam $87\frac{67}{71}$. *d 2. de Dimẽſ. circuli. e 10. quinti.*

III.

Ex data circuli circumferentia, diametrum vera maiorem indagare.

a 2. de Dimenſ. circuli. *Fiat vt 223. ad 71. ita data circumferentia, verbi gratia 88. ad aliud. Productus enim numerus* $28\frac{4}{223}$. *dabit diametrum vera maiorem.* [a] *Cum enim circumferentia ad diametrum habeat maiorem proportionem, quam triplam ſuperdecupartientem ſeptuageſimas primas, hoc eſt, maiorem quam 223. ad 71. habebit quoque data circumferentia 88. ad ſuam diametrum proportionem maiorem, quam ad* $28\frac{4}{223}$. [b] *ac proinde*

b 10. quinti. *diameter circumferentiæ 88. minor erit, quam* $28\frac{4}{223}$:

IIII.

Ex data circuli circumferentia diametrum inueſtigare vera minorem.

Fiat vt 22. ad 7. ita circumferentia data 88. ad aliud. Numerus enim procreatus

c 2. de Dimẽſ. circuli. *28. offeret diametrum vera maiorem.* [c] Cum enim circumferentia ad diametrum habeat minorem proportionem, quam triplam ſeſquiſeptimam, hoc eſt, quam 22. ad 7. habebit quoque circumferentia data 88. ad ſuam diametrum proportionem minorem, quam ad 28. [d] atque idcirco diameter circumferentię 88. maior erit, quam 28.

d 10. quinti.

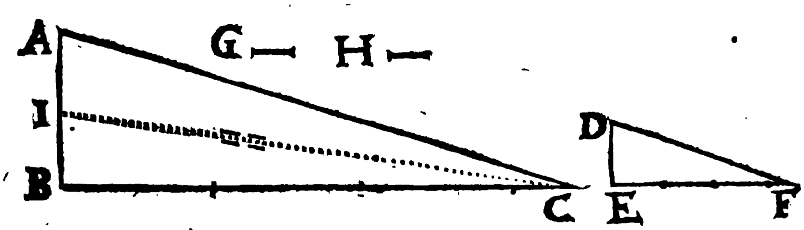
3. IAM verò vt doceamus, qua ratione area circuli vel ex ſola diametro cognita, vel ex ſola circumferentia cognoſcatur, ita vt neceſſe non ſit ex diametro circumferentiam, vel ex circumferentia diametrum inueſtigare, demonſtrandæ prius erunt ſequentes tres propoſitiones, quarum primam deinde lib. 8. propoſ. 2. ex Pappo Alexandrino aliter quoque demonſtrabimus.

PROPOSITIO I.

Circulorum diametri inter ſe ſunt, vt circumferentiæ.

SINT diametri duorum circulorum AB, DE, & rectæ circumferentiis æquales BC, EF, quę cum diametris angulos rectos efficiant B, E, compleanturque triangula ABC, DEF. Dico ita eſſe diametrum AB, ad diametrum DE, vt eſt circumferentia BC, ad circumferentiam EF. Diametris enim AB, DE, inueniatur tertia proportionalis G: Et tribus rectis BC, EF, DE, quarta proportionalis

e 20. coroll. ſexti. H. Et quia continuè proportionales ſunt AB, DE, G; [e] erit quadratum ex AB,



f 2. duodec. ad quadratum ex DE, vt AB, ad G. [f] Sed vt quadratum ex AB, ad quadratum

ex DE,

ex DE, ita eſt circulus diametri AB, ad circulum diametri DE. [a] Et vt circulus ad circulum, ita eſt triangulum ABC, ad triangulum DEF, quòd hæc triangula circulorum ſint dupla. (Nam diuiſa diametro AB, bifariam in I, ductaque recta IC, [b] erit triangulũ IBC, circulo æquale: ac proinde cum [c] triangula AIC, IBC, æqualia ſint; erit triangulum ABC, duplum trianguli IBC, hoc eſt, circuli, cuius diameter AB. Eademque ratione triangulum DEF, duplum erit circuli, cuius diameter DE.) Igitur erit quoque triangulum ABC, ad triangulum DEF, vt AB, ad G. At vt triangulum ABC, ad triangulum DEF, ita eſt AB, ad H. quod vtraque proportio compoſita ſit ex iiſdem proportionibus. ([d] Nam proportio trianguli ABC, ad triangulum DEF, compoſita eſt ex proportione baſis AB, ad baſem DE, & ex proportione altitudinis BC, ad altitudinem EF, hoc eſt, ex proportione DE, ad H, quæ ex conſtructione eadem eſt, quæ BC, ad EF. Proportio autem AB, ad H, componitur quoque ex proportionibus AB, ad DE, & DE, ad H, ex defin.) Igitur erit, vt AB, ad G, ita AB, ad H. [e] ideoque G, & H, æquales erunt: [f] ac proinde erit DE, ad G, vt DE, ad H. Eſt autem per conſtructionem AB, diameter ad diametrum DE, vt DE, ad G, hoc eſt, vt DE, ad H. Et vt DE, ad H, ita per conſtructionem, circumferentia BC, ad circumferentiam EF. Igitur erit quoque diameter AB, ad diametrum DE, vt circumferentia BC, ad circumferentiam EF. quod erat demonſtrandum.

a 15. quinti.
b 1. de Dimenſ. circuli.
c 38. primi.
d ſchol. 23. ſexti.
e 9. quinti.
f 7. quinti.

PROPOSITIO II.

PROPORTIO quadrati ex diametro cuiuslibet circuli deſcripti ad circuli aream maior eſt, quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223.

[g] QVONIAM enim quadratum diametri cuiuſuis circuli ad quadratum diametri alterius circuli eſt, vt circulus ad circulum: erit permutando quadratum diametri ad circulum eiuſdem diametri, vt quadratum alterius diametri ad circulum eiuſdem diametri. Poſita autem diametro alicuius circuli 1. proportio quadrati ipſius ad circulum maior eſt, quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223. Igitur proportio quadrati diametri cuiuſuis alterius circuli ad ipſum circulum, maior quoque erit quam 14. ad 11. minor autem, quam 284. ad 223.

g 2. duodec.

QVOD autem proportio quadrati diametri 1. ad ſuum circulum maior ſit, quam 14. ad 11. minor verò, quàm 284. ad 223. ita perſpicuum fiet. Si fiat vt 7. ad 22. ita diameter 1. ad aliud, prodibit ex regula prima Num. 2. circumferentia $3\frac{1}{7}$. vel $\frac{22}{7}$. maior, quam vera. Igitur ex eius ſemiſſe $\frac{11}{7}$. in $\frac{1}{2}$. ſemidiametrum procreabitur, vt Num. 1. dictum eſt, area circuli $\frac{11}{14}$. maior tamen, quam vera: [h] Ac proinde quadratum diametri 1. quod eſt 1. ad veram aream circuli, quæ minor eſt, quam $\frac{11}{14}$. maiorem proportionem habebit, quam ad $\frac{11}{14}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{11}{14}$. vt 14. ad 11. (Quoniam enim ex propoſitione 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Eucl. eadem proportio eſt numeratoris 11. ad denominatorem 14. quæ minutæ $\frac{11}{14}$. ad ſuum integrũ 1. erit conuertendo, vt 14. ad 11. ita 1. ad $\frac{11}{14}$.) habebit quoq; quadratum diametri 1. ad aream circuli veram, minorem proportionem, quam 14. ad 11. quod eſt propoſitum. Conſtat ergo prima propoſitionis pars.

h 8. quinti.

RVRSVS ſi fiat, vt 71. ad 223. ita diameter 1. ad aliud, reperietur per regulam 2. Num. 2. circumferentia circuli $3\frac{10}{71}$. vel $\frac{223}{71}$. minor, quam vera. Igitur, vt Num. 1. dictum eſt ex eius ſemiſſe $\frac{223}{142}$. in $\frac{1}{2}$. ſemidiametrum producetur area circuli $\frac{223}{284}$. maior tamen, quam vera: *a* Ac proinde quadratum diametri 1. quod eſt 1. ad veram circuli aream, quę maior eſt, quam $\frac{223}{284}$. minorem habebit proportionem, quam ad $\frac{223}{284}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{223}{284}$. vt 284. ad 223. (Nam quia ex propoſ. 2. Minutiarum, eadem eſt proportio Numeratoris 223. ad denominatorem 284. quę minutię $\frac{223}{284}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo, vt 284. ad 223. ita 1. ad $\frac{223}{284}$.) habebit quoque quadratum diametri 1. ad aream veram circuli minorem proportionem, quam 284. ad 223. quod eſt propoſitum. Conſtat ergo ſecunda etiam pars propoſitionis.

[a] *8. quinti.*

PROPOSITIO III.

PROPORTIO quadrati à circumferentia circuli cuiuſuis deſcripti ad circuli aream maior eſt, quam 892. ad 71. minor autem, quam 88. ad 7.

b QVONIAM enim circumferentia cuiuſuis circuli ad circumferentiam alterius circuli eſt, vt diameter ad diametrum: *c* erit quoque quadratum circumferentiæ ad quadratum circumferentię, vt quadratum diametri, ad quadratum diametri. *d* Sed vt quadratrum diametri ad quadratum diametri, ita eſt circulus ad circulum. Igitur erit quadratum quoque circumferentię ad quadratum circumferentię; vt circulus ad circulum: Et permutando quadratum circumferentię, ad ſuum circulũ, vt quadratum alterius circumferentię ad ſuum circulum. Poſita autem circumferentia alicuius circuli 1. proportio quadrati circumferentię illius circuli ad circulum maior eſt, quam 892. ad 71. minor verò, quàm 88. ad 7. Igitur & proportio quadrati circumferentię cuiuslibet alterius circuli ad ipſum circulum maior erit, quam 892. ad 71. minor autem, quam 88. ad 7.

[b] *1. huius Num. 3.*
[c] *22. ſexti.*
[d] *2. duodec.*

QVOD autem proportio quadrati ex circumferentia 1. deſcripti, ad ſuum circulum maior ſit, quam 892. ad 71. minor verò, quam 88. ad 7. ſic demonſtrabimus. Quoniã ſi fiat, vt 223. ad 71. ita data circumferentia 1. ad aliud, diameter procreatur $\frac{71}{223}$. maior, quam vera, vt ex 3. regula Num. 2. conſtat. ſit vt $\frac{1}{2}$. ſemiſsis circumferentię ducta in $\frac{71}{446}$. ſemiſſem diametri inuentę producat aream circuli $\frac{71}{892}$. vera maiorem, vt Num. 1. dictum eſt. *e* Igitur quadratum circumferentię 1. quod eſt 1. ad veram aream circuli, quę minor eſt, quam $\frac{71}{892}$. maiorem proportionem habebit, quam ad $\frac{71}{892}$. Vt autem 1. ad $\frac{71}{892}$. ita eſt, ex propoſ. 2. minutiarum, & conuertendo, 892. ad 71. Igitur & quadratum circumferentiæ 1. ad veram circuli aream maiorem proportionem habebit, quam 892. ad 71 quod eſt propoſitum. Vera ergo eſt prior propoſitionis pars.

[e] *8. quinti.*

RVRSVS, quia ſi fiat, vt 22. ad 7. ita data circumferentia 1. ad aliud, diameter producitur $\frac{7}{22}$. minor quam vera: ſit vt $\frac{1}{2}$. ſemiſsis circumferentię ducta in $\frac{7}{44}$. ſemiſſem diametri inuentæ producat aream circuli $\frac{7}{88}$. vera minorem, vt ex iis, conſtat, quæ Num. 1. diximus. *f* Igitur quadratum circumferentię 1. quod eſt 1. ad aream veram circuli, quæ maior eſt, quam $\frac{7}{88}$. minorem habebit proportionem, quam ad $\frac{7}{88}$. Vt autem 1. ad $\frac{7}{88}$. ita eſt, ex propoſitione 2. Minutiarum, & con-

[f] *8. quinti.*

& conuertendo, 88. ad 7. Ergo etiam quadratum circumferentiæ 1. ad aream circuli minorem proportionem habebit, quam 88. ad 7. quod eſt propoſitum. Vera igitur etiam eſt poſterior pars propoſitionis.

4. His ita demonſtratis, ſequuntur iam quatuor regulæ, per quas aream circuli propoſiti ſiue maiorem, ſiue minorem vera, vel ex ſola diametro, vel ex ſola circumferentia cognita conijcere licebit.

I.

EX diametro aream circuli vera maiorem inueſtigare.

Fiat vt 14. ad 11. ita quadratum datæ diametri ad aliud. Productus enim numerus dabit aream circuli vera maiorem. [a] Cum enim maior ſit proportio quadrati diametri ad aream circuli, quam 14. ad 11. Sit autem quadratum diametri datæ ad aream inuentam, vt 14. ad 11. erit quoque maior proportio quadrati diametri datæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam. [b] Ac proinde vera circuli area erit minor, quam inuenta: hoc eſt, area inuenta maior erit, quam vera.

[a] *2. Num. 3.*
[b] *10. quinti.*

II.

EX diametro aream circuli vera minorem inueſtigare.

Fiat vt 284. ad 223. ita quadratum datæ diametri ad aliud. Numerus enim procreatus aream circuli vera minorem offeret. [c] Cum enim minor ſit proportio quadrati diametri datæ ad aream circuli, quam 284. ad 223. ſit autem quadratum diametri datæ ad aream inuentam, vt 284. ad 223. erit quoque minor proportio quadrati diametri datæ ad veram aream circuli, quam ad areã inuentam: [d] Atque idcirco vera area circuli maior erit, quam inuenta, hoc eſt, inuenta area erit minor, quam vera.

[c] *2. Num. 3.*
[d] *10. quinti.*

III.

EX circumferentia aream circuli vera maiorem colligere.

Fiat vt 892. ad 71. ita quadratum datæ circumferentiæ ad aliud. Procreatus namque numerus aream circuli vera maiorem indicabit. [e] Cum enim maior ſit proportio quadrati circumferentiæ ad aream circuli, quam 892. ad 71. Sit autem quadratum datæ circumferentię ad aream inuentam vt 892. ad 71. erit quoq; maior proportio quadrati datæ circumferentiæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam: [f] ideoque vera circuli area minor erit, quam inuenta; hoc eſt, inuenta area maior erit, quam vera.

[e] *3. Num. 3.*
[f] *10. quinti.*

IV.

EX circumferentia aream circuli vera minorem concludere.

Fiat vt 88. ad 7. ita quadratum circumferentiæ datæ ad aliud. Numerus namque, qui

a 3. *Num.* 3. *qui gignitur, erit area circuli minor, quam vera.* [a] Cum enim minor ſit proportio quadrati circumferentiæ datæ ad aream circuli, quam 88. ad 7. ſit autem quadratum circumferentiæ datæ ad aream inuentam, vt 88. ad 7. erit quoq; minor proportio quadrati datæ circumferentiæ ad veram aream circuli, quam ad aream inuentam: [b] Ac proinde area circuli vera erit maior, quam inuenta: hoc eſt, area inuenta minor erit, quam vera.

b *10. quinti.*

5. Omnes hæ viæ, quibus area circuli inquiritur, pendent ex proportione circumferentiæ circuli ad diametrum, quam Archimedes inuenit eſſe quidē minorem tripla ſeſquiſeptima, maiorem verò tripla ſuperdecupartiente ſeptuageſimas primas: ac proinde cum hæ proportiones accuratæ non ſint, neceſſe eſt, aream inuentam vel veram magnitudinem circuli ſuperare, vel ab ea deficere, vt ex ſuperioribus regulis liquet. Et quamuis differentia inter veram aream, atque inuentam in paruis circulis, perexigua ſit, in magnis tamen circulis negligēda non videtur. Quamobrem qui magis accuratam circuli aream deſiderat, aſſumat proportionem diametri ad circumferentiam verò propinquiorem, quām poſteriores Geometræ, pſertim Ludolphus à Collen, & Chriſtophorus Gruēbergerus inuenerunt, vt ſequitur.

Accuratior proportio diametri ad circumferentiã.

Diameter	Circumferentia maior quam vera,
100000000000000000000.	314159265358979323847.

Diameter	Circumferentia minor quam vera
10000 0000000000000000.	314159265358979323846.

Ita vt proportio circumferentiæ ad diametrum maior, quam vera, denominetur ab hoc primo numero, quæ minor eſt, quam tripla ſeſquiſeptima. Proportio verò minor, quam vera, denominetur ab hoc ſecundo numero quæ maior eſt, quam tripla ſuperdecupartiens ſeptuageſimas primas: qui denominatores habentur, ſi vtraque circumferentia per diametrum diuidatur.

$$3\frac{141592653589793238 47}{100000000000000000000}$$

$$3\frac{141592653589793238 46}{100000000000000000000}$$

Accuratior inuentiò circumferentiæ ex data diametro: & diametri ex data circumferentia.

Itaqve ſi fiat, vt diameter prædicta ad circumferentiam vera maiorem, ita diameter alicuius circuli data ad aliud, reperietur circumferentia maior, quam vera, minus tamen differens à vera, quam illa Archimedis, quæ Num. 2. ex regula 1. inuenta fuit. Si autem fiat, vt eadem diameter prædicta ad circumferentiã vera minorem, ita data diameter alicuius circuli ad aliud, reperietur circumferētia minor, quam vera, magis tamen ad veram accedens, quam illa Archimedis, quæ Nu. 2. ex reg. 2. inuenitur. E contrario verò, ſi fiat vt prædicta circumferentia minor, quam vera, ad diametrum, ita circūferentia alicuius circuli data ad aliud, prodibit diameter maior quam vera: Si autem fiat, vt circumferentia prædicta maior, quam vera, ad diametrum, ita circumferentia alicuius circuli data ad aliud, proueniet dameter minor, quam vera. Vtraq; tamen diameter inuēta magis ad veram accedet, quā illa Archimedis, quæ Nu. 2. per reg. 3. & 4. inuēta fuit.

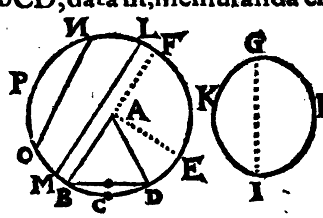
Inventa

INVENTA circumferentia ex diametro, vel diametro ex circumferentia, reperietur area circuli, vt Num. 1. traditum eſt: ſi nimirum ſemidiameter in ſemicircumferentiam ducatur: vel tota circumferentia in ſemiſſem ſemidiametri: vel deniq; tota diameter in quartam partem circumferentiæ. quæ quidem area minus à vera diſtabit, quam illa, quæ ex proportione Archimedis inuenitur. Sed quia difficilius eſt per magnos numeros calculum inſtituere, quam per minores, vſus artificum obtinuit, vt proportio Archimedis ad calculum adhibeatur. Quãdo tamẽ deſideratur accuratior calculus, vtendum erit poſteriori hac proportione Ludolphi, præſertim in maioribus circulis.

DE AREA SEGMENTORVM CIRCVLI.

CAPVT VIII.

1. SIT primum propoſitus ſector circuli ABCD, comprehenſus duabus ſemidiametris AB, AD, & arcu BCD. Huius aream ita explorabimus. Si tam ſemidiameter AB, nota ſit, nimirum palmorum 7. quam arcus BCD, palmorum videlicet $3\frac{2}{3}$. ducatur ſemidiameter 7. in $\frac{11}{6}$. id eſt, in ſemiſſem arcus, Productus enim numerus $12\frac{5}{6}$. palm. erit area ſectoris ABCD, vt demonſtrabimus. Si autem neque ſemidiameter AB, neque peripheria BCD, data ſit, menſuranda erit ſemidiameter aliqua menſura nota, & ſecundum eandem menſuram inuenienda circumferẽtia circuli per regulas antecedentis capit. necnon recta BD. Deinde fiat, vt AB, nota in aſſumpta menſura ad ſinum totum 100000. ita BD, nota in eadem menſura aſſumpta ad aliud. Numerus enim procreatus dabit rectam BD, cognitam in partibus ſinus totius.



Huius autem medietas ſinus erit ſemiſsis arcus BD: ac proinde ex tabula ſinuũ ſemiſsis BC, in gradib. nota erit, ideoq; totus arcus BD, nõ ignorabitur. Et quia tota circuli circumferentia nota facta eſt in aſſumpta menſura: ſi fiat vt grad. 360. ad totam circumferentia in aſſumpta menſura cognitam, ita arcus BD, in gradibus cognitus ad aliud, cognoſcetur idem arcus BD, in menſura aſſumpta. Quare, vt prius, area ſectoris ABCD, reperietur. Poſſent quoque gradus in arcu BD, contenti inueſtigari beneficio quadrantis alicuius in gradus diuiſi, adhibita doctrina cap. 2. lib. 1. Nume. 10. tradita, vt minuta etiam cognoſcantur, quando in arcu BD, vltra gradus aliqua particula ſupereſt.

AREAM porro ſectoris produci ex ſemidiametro in ſemiſſem arcus ſectoris, ſic demonſtro. Sit quadrans BE, & ſemicirculus BEF. [a] Et quoniam eſt, vt arcus BD, ad quadrantem BE, ita ſector ABCD, ad ſectorem ABDE: erit quoque ex ſcholio propoſ. 22. lib. 5. Eucli. vt arcus BD, ad quadruplum quadrantis BE, hoc eſt, ad totam circumferentiam, ita ſector ABCD, ad quadruplum ſectoris ABDE, hoc eſt, ad totum circulum. [b] Vt autem arcus BD, ad totam circumferentiam, ita eſt BC, ſemiſsis arcus BD, ad BEF, ſemiſſem totius circumferentiæ. Igitur erit quoque vt BC, ad BEF, ita ſector ABCD, ad totum circulum. [c] Sed vt BC, ad BEF, ita eſt rectangulum ſub AB, BC, ad rectangulum ſub AB, BEF. Ergo erit quoq; ſector ABCD, ad totũ circulum, vt rectangulum ſub AB, BC, ad rectangulum ſub AB, BEF. Cum ergo vt cap. 7. Num. 1. tradidimus, circu-

[a] 33. ſexti.
[b] 15. quinti.
[c] 1. ſexti.

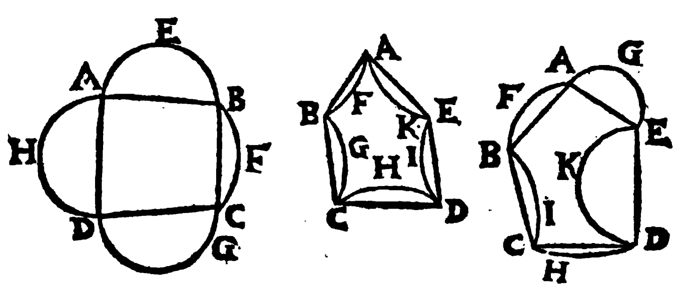
[a] 14. quinti. circulus æqualis ſit rectangulo ſub AB, BEF, [a] erit quoque ſector AB CD, rectangulo ſub AB, BC, æqualis. quod erat demonſtrandum.

EADEM ratione procreabitur ſector ABFD A, ex ſemidiametro AB, in ſemiſſem arcus BFD.

[b] 25. tertij. 2. SIT deinde ſegmentum BCD. [b] Inuento centro A, arcus B CD, & cognitis per aliquam menſuram lateribus trianguli A B D, & arcu B C D, in eadem menſura, vt Num. 1. diximus, inueſtigetur tam area ſectoris ABCD, quam trianguli ABD. Hæc enim detracta ex illa relinquet aream ſegmenti propoſiti BCD.

3. SIT præterea figura lenticularis duobus arcubus GHI, GKI. contenta. Ducta recta GI, inquiratur, vt Nu. 2. docuimus, vtriuſque ſegmenti GHI, GKI, area. Summa enim ex duabus hiſce areis conflata, erit area propoſitæ figuræ GHIK. Quod ſi ſegmenta GHI, GKI, ſint æqualia, ſatis erit vnius aream inueſtigare. Hæc namque duplicata dabit propoſitæ figuræ GHIK, aream.

4. NON aliter metiemur figuras ex varijs circulorum ſegmentis coagmentatas, ſiue omnes circumferentiæ extrorſus vergant, ſiue introrſum, ſiue partim introrſum, & partium extrorſum. Vt in tribus his figuris, ſi arcubus ſubtendantur chordæ, metiemur in prima quadrilaterum ABCD, vt cap. 1. vel 3. docuimus: & ſegmenta AEB, BFC, CGD, DHA, vt hoc cap. Num. 2. traditũ eſt. Si enim hæc ſegmenta quadrilatero adijciantur, quod omnia extrorſum tendant,



conflabitur area figuræ AEBFCGDH, ex quatuor arcubus compoſitæ.

IN ſecunda autem metiemur pentagonum ABCDE, per ea, quæ cap. 4. ſcripta ſunt: Ex quo ſi dememus quinque ſegmenta introrſum vergentia, quæ quidem ex ijs, quæ Num. 2. huius cap. ſcripſimus, cognoſcentur, reliqua fiet area figuræ AFBGCHDIEK, ex quinque arcubus conflatæ.

IN tertia denique pentagono ABCDE, adijciemus tria ſegmenta, AFB, AGE, CHD, extrorſum vergentia, & ex compoſito numero duo ſegmenta BIC, DKE, introrſum vergentia tollemus, vt area relinquatur figuræ AFBICHDKEG, ex quinque arcubus compoſitæ. Atque hoc modo agrum quantumuis irregularem metiri licebit.

5. SIT denique in prima figura huius cap. ſegmentum circuli LMON, comprehenſum duabus rectis LM, NO, & duobus arcubus LN, MO. Exploretur vt Num. 2. declaratum eſt, area vtriuſque ſegmenti PLM, PNO. Minor enim area PNO, detracta ex maiori PLM, reliquam faciet aream propoſiti ſegmenti LMON.

6. VT quartus hic liber concludatur, lubet hic appẽdicis loco regulas quaſdam alias à noſtro inſtituto non alienas ſubiungere.

I. DATA

I.

DATA circuli area, circumferentiam, ac diametrum cognoſcere.

FIAT vt 7. ad 88. ita data area ad aliud. Productus enim numerus erit quadratum circumferentiæ vero maius, vt ex 4. reg. Num. 4. cap. 7. liquet. Radix ergo quadrata numeri producti dabit circumferentiam vera maiorem. Quod ſi fiat, vt 71. ad 892. ita data area ad aliud, gignetur quadratum circumferentiæ vero minus, vt conſtat ex 3. reg. Num. 4. capit. 7. Ac proinde eius radix quadrata circumferentiam vera minorem indicabit.

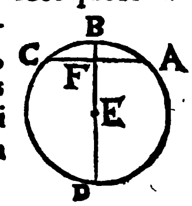
FIAT rurſus, vt 223. ad 284. ita area propoſita ad aliud. Procreatus namque numerus erit quadratum diametri verò maius, vt ex 2. reg. Num. 4. cap. 7. perſpicuum eſt. Radix ergo quadrata numeri producti diametrum exhibebit vera maiorem. Quod ſi fiat, vt 11. ad 14. ita area data ad aliud, reperietur quadratum diametri verò minus, vt ex reg. 1. Num. 4. cap. 7. colligitur. Ac proinde radix eius quadrata diametrum offeret vera minorem.

II.

DATO arcu cuiuſuis circuli, diametrum circuli in numeris inueſtigare.

SIT datus arcus A B C. Ducta chorda A C, ſectaque bifariam in F, ducatur per F, perpendicularis FB,[a] quæ per centrum circuli tranſibit,[b] ideoque rectangulum ſub C F, A F, hoc eſt, quadratum ex A F, æquale erit rectangulo ſub B F, & reliqua portione diametri. Si igitur A F, FB, per aliquam menſuram fiant notæ, & quadratus numerus rectæ A F, diuidatur per F B, prodibit reliqua portio diametri F D, quæ addita perpendiculari FB, conficiet totam diametrum BD, notam in eadem menſura, in qua A F, FB, cognitæ ſunt.

[a] coroll. 1. tertij.
[b] 35 tertij.



GEOMETRICE eadem portio FD, reperietur, ſi duabus F B, A F, inueniatur tertia proportionalis F D: propterea quod ex ſcholio propoſ. 13. lib. 6. Eucl. AF, media proportionalis eſt inter diametri ſegmenta.

III.

DATIS diametris duorum circulorum, vel circumferentiis: Aut duobus lateribus homologis duarum figurarum ſimilium, ſimiliterq; poſitarum: quam proportionem circuli, vel figuræ inter ſe habeant, cognoſcere.

QVONIAM circuli, & figuræ ſimiles ſimiliterque poſitæ, habent duplicatam proportionem diametrorum, vel circumferentiarum, & laterum homologorum: ſi maior diameter, vel circumferentia per minorem, & maius latus homologum per minus diuidatur, prodibit denominator proportionis, quam maior diameter, circumferentiaue ad minorem, vel maius latus homologum ad minus habet. Si igitur hic denominator in ſe ducatur, producetur denominator

duplicatæ proportionis, quam videlicet circulus, vel figura ad minorem habet. Vt ſi diameter vnius circuli ſit 56. & circumferentia 176. Alterius autem circuli diameter 14. & circumferentia 44. Diuiſis 56. per 14. vel 176. per 44. fit Quotiens 4. qui ductus in ſe producit 16. denominatorem proportionis maioris circuli ad minorem. Eandemque proportionem habebit figura ad minorem ſimilem, ſimiliterque poſitam, ſi latera homologa ſint 56. & 14. vel 176. & 44.

IV.

DATIS pluribus circulis, quorum diametri, vel circumferentiæ cognitæ ſint: Item pluribus figuris ſimilibus ſimiliterque poſitis, quarũ latera homologa ſint nota: Inuenire diametrum, vel circumferentiam, cuius circulus omnibus circulis propoſitis æqualis ſit. Item latus reperire, cuius figura ſimilis, ſimiliterque poſita æqualis ſit omnibus propoſitis figuris.

MVLTIPLICENTVR diametri, vel circumferentiæ, aut latera homologa in ſe, & numeri producti in vnam ſummam colligantur. Radix enim quadrata huius ſummæ erit diameter, circumferentiaue, aut latus homologum quæſitum. Verbi gratia, ſi ſint quatuor diametri, circumferentiæue circulorum, aut latera homologa ſimilium figurarum, ſimiliterque poſitarum, 84. 3. 4. 12. atq; in ſe multiplicentur, gignentur numeri 7056. 9. 16. 144. quorum ſumma 7225. Radix ergo quadrata huius ſummæ 85. erit diameter, circumferentiaue circuli, aut latus homologum, quod quæritur: ita vt circulus, cuius diameter, vel circumferentia eſt 85. aut figura ſupra rectam 85. ſimilis, ſimiliterq; poſita figuris datis, æqualis ſit quatuor circulis, aut figuris propoſitis. Nam cum quadratum 7225. radicis 85. æquale ſit quatuor quadratis 7056. 9. 16. 144. radicũ 84. 3. 4. 12. [a] Circuli autem eandem habeant proportionem, quam quadrata diametrorum: ac proinde quam quadrata circumferẽtiarum; quod circumferentiæ diametris ſint proportionales. Item figuræ ſimiles, ſimiliterque poſitæ inter ſe ſint, vt quadrata laterum homologorum, [b] propterea quod tam quadrata, quam figuræ habent duplicatam proportionem laterum: erit quoque tam circulus, cuius diameter, circumferentiauè 85. æqualis quatuor circulis, quorum diametri circumferentiæue 84. 3. 4. 12. quam figura ſupra latus 85. ſimilis ſimiliterque poſita, quatuor figuris, quarum lateta 84. 3. 4. 12. æqualis, quod eſt propoſitum.

a 2. duodec.

b 20. ſexti.

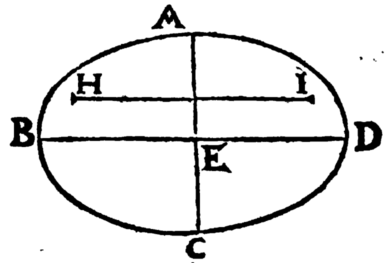
V.

AREAM propoſitæ Elipſis indagare.

LVBET denique librum hunc quartum duobus problematibus terminare, quæ ab Archimede Syracuſano accutiſsimè inuenta ſunt, ac demonſtrata. Vnũ eſt de area Ellipſis; alterum de area Parabolæ. Sit ergo Ellipſis ABCD, cuius maior diameter BD, & minor AC, ſecans maiorem in E, bifariam. [c] Inueniatur HI, media proportionalis inter BD, & AC: & circuli circa diametrum HI, deſcripti area inquiratur, per ea, quæ c. 7. huius lib. ſcripſimus. Dico hanc aream areæ Ellipſis

c 13. ſexti.

Ellipſis ABCD, eſſe æqualem. [a] Quoniam enim eſt, vt BD, ad AC, ita quadratum ex BD, ad quadratũ ex ex HI. [b] Vt autẽ quadratum ex BD, ad quadratum ex HI, ita eſt circulus diametri BD, ad circulum diametri HI. Igitur erit quoq; vt BD, ad AC, ita circulus diametri BD, ad circulum diametri HI. Cũ ergo per propoſitionem 5. Archimedis de Conoidibus, & ſphæroidib. ſit quoq; vt maior diameter BD, ad minorem AC, ita circulus diametri BD, ad Ellipſim ABCD; [c] habebit circulus diametri BD, eandem proportionem ad circulum diametri HI, & ad Ellipſim ABCD. [d] Ideoq; area circuli diametri HI, areæ Ellipſis ABCD, æqualis erit. quod erat demonſtrandum.

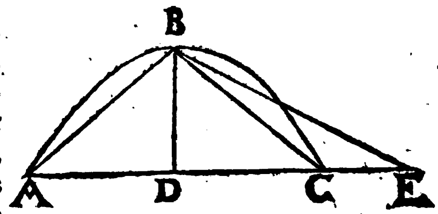


a corol. 20. ſexti.
b 2. duodec.
c 11. quinti.
d 9. quinti.

VI.

AREAM propoſitæ parabolæ inueſtigare.

SIT data parabola ABC, cuius baſis AC, & axis BD, diuidens baſem bifariam in D, & vertex B. Inſcribatur parabolæ triangulum ABC, eandem habens baſem, ac verticem cum parabola. Producta autem baſe AC, ſumatur CE, tertia pars ipſius AC: ita vt AE, ipſius AC, ſit ſeſquitertia. Iungaturque recta EB. Inquiratur denique per cap. 2. huius libr. area triãguli ABE. quam dico eſſe æqualem areæ parabolæ ABC. [e] Quoniã enim eſt, vt AE, ad AC, ita triangulum ABE, ad triangulum ABC: Eſt autem AE, ipſius AC, ſeſquitertia, ex conſtructione; erit quoque triangulum ABE, trianguli ABC, ſeſquitertium. Cum ergo, vt Archimedes in lib. de Quadratura paraboles demõſtrauit, parabola quoque ABC, trianguli ABC, ſit ſeſquitertia: [f] habebunt triangulum ABE, & parabolã ABC, ad triangulum ABC, eandem proportionem. [g] Ideoque area trianguli ABE, areæ paraboles ABC, æqualis erit. quod erat oſtendendum.



e 1. ſexti.
f 11. quinti.
g 9. quinti.

FINIS LIBRI QVARTI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER QVINTVS.

AREAS

Solidorum, corporumue perſcrutans.

SVPEREST tertia magnitudinis ſpecies, quæ corpora ſolidaue cõplectitur. Et quia initio lib. 4. diximus, corpora metienda eſſe per corpuſcula cubica: ita vt quando dicitur corpus aliquod continere 1000. palmos, intelligendum ſit, 1000. cubos æquales, quorum ſinguli latera habent vni palmo æqualia, aream illius corporis explere: docendum iam erit hoc lib. qua ratione cuiuſcunque corporis area inueſtigetur, hoc eſt, numerus corpuſculorum cubicorum in eo contentorum. Præcipua autem corpora, de quibus acturi ſumus, ſunt Parallelepipeda, Priſmata, cubi, Pyramides, Fruſta pyramidum, Cylindri, Coni, Fruſta Conorum, ſphæra, ſphærarum portiones, quinq; corpora regularia, videlicet Tetraedrum, Hexaedrum ſiue cubus, Octaedrum, Icoſaedrum, Dodecaedrum, quæ omnia lib 11. ab Euclid. definita ſunt. His adiungemus nonnulla corpora vacua, & alia quædam irregularia.

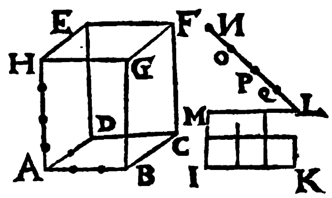
DE AREA PARALLELEPIPEDOrum, Priſmatum, & Cylindrorum.

CAPVT I.

a 30. def in. vndec.

PARALLELEPIPEDVM [a] eſt figura ſolida ſex figuris quadrilateris, quarum, quæ ex aduerſo, parallelæ ſunt, contenta. Huiuſmodi figuram ſolidam exprimit columna aliqua quadrilatera vniformis craſsitiei. Vt figura ſolida A B C D E F G H, in qua tam duo plana oppoſita ABCD, EFGH, quam duo

duo ADEH, BCFG, & duo ABGH, DCFE, parallelogramma ſunt inter ſe parallela, & æqualia, dicitur parallelepipedum. Huius area ita inueſtigabitur. *Area parallelepipedi rectãguli.* Sit primò propoſitum parallelepipedum rectangulum habens omnia ſex parallelogramma rectangula, ac proinde omnes eius angulos ſolidos rectos: ſitque longitudo baſis AB, palm. 3. latitudo AD, palm. 2. & altitudo AH, palm. 4. Ducatur ergo latitudo 2. in longitudinem 3. vt producatur baſis palmorum 6. quadratorum, vt lib. 4. cap. 1. traditum eſt. Deinde baſis hæc 6. palmorum ducatur in altitudinem 4. Numerus enim productus 24. indicabit in parallelepipedo contineri 24. cubos, quorũ ſingula latera ſingulos palmos complectuntur, quod ita planum faciemus. Exponatur ſeorſum rectangulum IKLM, æquale baſi ABCD, intelligaturque altitudo perpendicularis LN, 4. palm. Si igitur ducatur latus IM, palm. 2. in IK, palm. 3. producetur area baſis palmorum quadratorum 6. ſupra quæ ſi concipiantur extructi 6. cubi æquales, implebunt ij parallelepipedum vſq; ad primum palmum LQ, altitudinis. Si deinde alij 6. cubi æquales prioribus ſuperimponantur, implebitur parallelepipedum vſq; ad ſecundum palmum altitudinis QP. Et alij 6. cubi æquales parallelepipedum vſq; tertium palmum PO, altitudinis implebunt. Denique alij 6. cubi appoſiti totum parallelepipedum explebunt vſque ad quartũ altitudinis palmum ON. Conſtat ergo in toto parallelepipedo exiſtere toties 6. cubos palmares, quoties palmus in altitudine continetur, hoc eſt cubos 24.



2. INTELLIGATVR deinde parallelepipedum ABCE, cuius baſes ABCD, EFGH, ſint Rhombi, vel Rhomboides, ac latera AH, DE, DE, BG, CF, ad baſem ABCD, recta, ita vt altitudo ſit AH. Primum ergo inquiratur area baſis ABCD, vt lib. 4. cap. 3. Num. 1. docuimus. Hæc deinde in altitudinem AH, ducatur. Productus namq; numerus erit parallelepipedi area. Nam ſi fiat rectangulum IL, baſi AC, æquale, & ſupra illud concipiatur parallelepipedũ rectangulũ, cuius altitudo LN, altitudini AH, ſit æqualis *a* erit hoc parallelepipedum parallelepipedo ACE, æquale. Cum ergo parallelepipedum, cuius baſis rectangulum IL, & altitudo LN, producatur ex altitudine LN, in baſem IL, vt oſtenſum eſt, producetur quoque parallelepipedum ACE, ex altitudine AH, in baſem AC, baſi IL, æqualem.

Area parallelepipedi nõ rectanguli.

a *31. vndec.*

SI nullum latus parallelepipedi rectum eſt ad baſem, demittenda erit ex aliquo angulo ſupremi parallogrammi ad planum, in quo baſis, linea perpendicularis, pro altitudine parallelepipedi, eaque diligenter metienda. Si namq; area baſis inueſtigetur vel per cap. 1. lib. 4. quando eſt rectangula, vel per cap. 3. eiuſdem lib. quando non eſt rectangula, eaque in altitudinem inuentam ducatur, producetur area propoſiti parallelepipedi. Nam ſi ſupra baſem intelligatur parallelepipedum rectum eiuſdem altitudinis cum propoſito parallelepipedo, *b* erunt duo hæc parallelepipeda inter ſe æqualia. Conſtat autẽ ex Num. 1. & 2. parallelepipedum rectum gigni ex ductu baſis in altitudinem.

b *29. vel 30. vndec.*

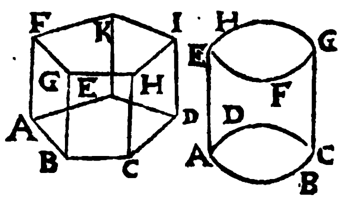
3. CVBVS, qui etiam parallelepipedum quoddam eſt rectangulum, eodem modo producitur, nimirum ex latere in ſe, & iterum in productum. Vt ſi latus cubi ſit 10. erit eius area 1000. quod decies decem decies procreent 1000. *Area cubi.*

4. *c* PRISMA eſt figura ſolida, quæ planis continetur, quorum aduerſa duo

c *13. defin. vndec.*

ſunt & æqualia, & ſimilia, & parallela; alia verò parallelogramma. Vt eſt ſolidum ADF, cuius baſes ſunt pentagona ABCDE, FGHIK, parallela, & æqualia. Hanc figuram ſolidam repræſentat columna aliqua laterata æqualis craſsitudinis, cuius baſes oppoſitæ ſunt æquales, ſimiles, ac parallelę, ſiue hæ triangula ſint, ſiue quadrangula, ſiue pentagona, &c. Ex quo fit, vt priſma quodcunque ambiant tot parallelogramma, quot latera, vel anguli in vnoquoque oppoſitorum planorum reperiuntur. Vt propoſitum priſma ambiunt quinque parallelogramma ABGF, BCHG, CDIH, DEKI, EAFK. Area porro cuiuslibet priſmatis inuenietur, ſi area baſis inquiratur, atque in altitudinem ducatur.

Area priſmatis, tam recti, quam obliqui.



Nam ſi concipiatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis cum priſmate, habens baſem, rectangulū baſi priſmatis æquale; [a] erit hoc parallelepipedum priſmati ęquale. Cū ergo parallelepipedū producatur ex ſua baſe in altitudinem, procreabitur quoque priſma ex multiplicatione ſuę baſis in altitudinem. Area porro baſis cognoſcetur ex iis, quæ lib. 4. ſcripſimus, & altitudo priſmatis, ſi eius latera recta non ſint ad baſem, exploranda erit, vt cap. præcedente Num. 2. altitudinem parallelepidi inueſtigandam eſſe præcepimus.

a 2. coroll. 7. duodec.

5. Cylindrvs eſt figura ſolida æqualis craſsitiei, quæ duobus circulis æqualibus, & æquidiſtantibus, & rotunda ſuperficie inter ipſos interiecta continetur, inſtar columnę cuiuſpiam rotundæ. Vt eſt ſolidum ACH, cuius baſes ſunt duo circuli ABCD, EFGH, paralleli, & æquales. Huius quoque area procreabitur ex multiplicatione baſis, ex cap. 7. lib. 4. inuentę in altitudinem. quod in Cylindro recto explicabitur, vt Num. 1. in parallelepipedo recto factum eſt. Nam ſi verbi gratia baſis Cylindri circularis ABCD, continet 10. palmos quadratos, explebunt 10. cubi palmares ſupra illos 10. palmos quadratos extructi, Cylindrum vſque ad primum palmum altitudinis; at 20. cubi eundem explebunt vſque ad ſecundum palmum, &c. Quod ſi Cylindrus obliquus ſit, exquirenda erit eius altitudo per lineam perpendicularem ex ſuperiore baſe demiſſam ad planum, in quo inferior baſis exiſtit, atque in hanc altitudinem area baſis ex cap. 7. lib. 4. inuenta multiplicanda. Productus enim numerus dabit aream Cylindri propoſiti, [b] cum æqualis ſit Cylindro recto eandem cum illo baſem, & altitudinem habenti.

b coroll. 11. duodec.

DE AREA PYRAMIDVM & Conorum.

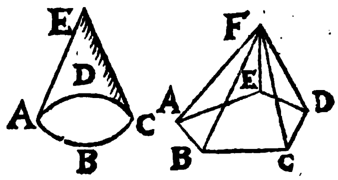
Capvt II.

1. Pyramis [c] eſt figura ſolida, quę planis continetur ab vno plano ad vnum punctum conſtituta. Vt figura ſolida ABCDEF, ad punctum F, conſtituta ſupra baſem pentagonam ABCDE, & quam ambiunt quinque

c defin. 12. vndec.

quinque triangula ABF, BCF, CDF, DEF, AEF, tot nimirum, quot in baſe ſunt latera, dicitur pyramis.

CONVS autem eſt figura ſolida rotunda ad vnum punctum conſtituta, ſupra baſem circularem, inſtar pyramidis rotundæ, qualis eſt figura ABCDE. *Area pyramidis, & coni.*



TAM autem pyramidis, quam Coni area producitur ex multiplicatione baſis in tertiã partem altitudinis. Cũ enim, vt in præcedenti cap. oſtendimus, ex baſe in totam altitudinem gignatur priſma vel Cylindrus eandem habens cum pyramide, & cono altitudinem; *a* producetur ex eadem baſe in tertiam partem altitudinis tertia pars illius priſmatis, vel Cylindri. *b*, Cum ergo pyramis ſit tertia pars illius priſmatis, *c* & Conus tertia pars Cylindri, liquet tam pyramidẽ, quam Conum produci ex baſe in tertiam partem altitudinis. Ex quo fit, ſi baſis ducatur in totam altitudinem, tertiam partem numeri producti, eſſe quoque aream pyramidis, vel Coni. Item eandem produci ex tota altitudine in tertiam partem baſis: *d* quod hac ratione tertia pars priſmatis, vel Coni gignatur. *a ſchol. 14. duodec.* b *corol. 7. duodec.* c *10. duodec.* *Area pyramidis, & coni aliter.* d *1. ſchol. 7. duodec. & 11. duodec.*

2. BASIS porro pyramidis, ſi triangularis eſt, cognoſcetur, vt lib. 4. 2. traditum eſt: ſi multilatera, reperietur, per ea, quæ eodem lib. cap. 3. 4. & 5. ſcripſimus. Baſis autem Coni inueſtigabitur ex cap. 7. eiuſdem lib. At verò altitudo tam pyramidis, quam Coni, obtinebitur, ſi in vertice ſtatuatur planum baſi æquidiſtans, ab eoque ad planum, in quo baſis, perpendicularis demittatur, eaque exquiſitè menſuretur. Quamuis enim eadem hæc altitudo indagari poſſit Geometricè, ſi inclinatio vnius lateris ad baſem, & magnitudo quoque eiuſdem lateris cognoſcatur: quia tamen hęc ipſa exploranda ſunt materialiter per aliquod inſtrumentum, præſtat ipſam quoque altitudinem ſtatim per inſtrumentum exquirere, prę ſertim per inſtrumentum partium, quod lib. 1. cap. 1. deſcripſimus: cum inuentio illa Geometrica difficilior ſit, procedatq; ex inclinatione, ac latere per inſtrumentum cognitis. *Altitudo pyramidis, & coni.*

3. ATQVE hæc, quę diximus, intelligi volumus tam de pyramidibus, Coniſque rectis, quam de obliquis, & Scalenis.

DE AREA FRVSTI PYRAmidis, & Coni.

CAPVT III.

1. FRVSTVM pyramidis, & Coni appello id, quod alij pyramidem decurtatam, & Conum decurtatum dicunt. Sit ergo fruſtum pyramidis ABCDEF, cuius baſes ABC, DEF, ſint parallelæ, & ſimiles, & cuius area inueſtiganda ſit. Quod duobus modis fieri poteſt. Primũ cogitetur integra pyramis ABCH, cuius altitudinẽ HG, perpendicularem ad baſem (licet pyramis actu nõ ſit integrata) ita inueniem⁹. *e* Quoniã eſt, vt ab AB, ad AH, ita DE, ad DH, & permutando, vt AB, ad DE, ita AH, ad DH; erit quoq; diuidẽdo (ſumpta AS, *e 4. ſexti.*

æquali

a 17. vnde. æquali ipſi DE) vt SB, ad DE, ita AD, ad DH. a Quia vero plana parallela ABC, DEF, ſecant rectas AH, GH, proportionaliter in I, G; erit quoque vt SB, ad DE, ita GI, ad IH. Si igitur fiat, vt SB, differentia inter latera homologa AB, DE, baſium ad DE, ita GI, altitudo Fruſti pyramidis (quæ cognoſcetur per lineam perpendicularem demiſſam ad baſem ex aliquo puncto plani DEF, etiam producti, ſi opus eſt,) ad aliud, prodibit recta IH, altitudo nimirum pyramidis DEFH: qua addita ad GI, tota altitudo GH, cognita erit. Quocirca ſi per caput præcedens inueniatur area tam integræ pyramidis ABCH, quam abſciſſæ pyramidis DEFH, & hęc ab illa dematur, reliquum fiet Fruſtum ABCDEF.

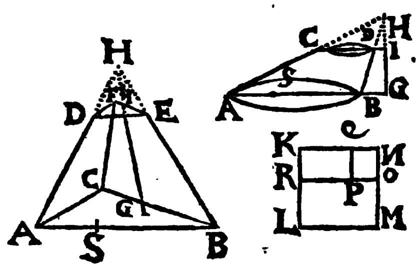
Area fruſti pyramidis.

2. Non aliter fruſtum Coni ABCD, inueſtigabitur, vt patet, ſi integer Conus intelligatur ABH, &c.

Area fruſti coni.

3. Alio modo idem fruſtum tam Pyramidis, quam Coni cognoſcemus, etiamſi neque pyramis, neque conus integretur. b Fiant quadrata KLMN, NOPQ, baſibus ABC, DEF, notis æqualia, inueniaturque inter quadrata KM, NP, ſuperficies media proportionalis, qualis eſt rectangula figura OK, producto latere OP, ad R. c Quoniam enim eſt, vt MN, ad NO, ita KM, ad NR. Item vt KN, ad NQ, ita NR, ad NP. d eſtque MN, ad NO, vt KN, ad NQ: erit quadratum KM, ad rectangulum NR, vt rectangulum NR, ad quadratum NP: ideoque NR, medio loco proportionale eſt inter quadrata KM, NP. Quamobrem, ſi radix quadrata baſis ABC, notæ, id eſt, latus KN, quadrati KM, ducatur in radicem quadratam baſis DEF, notę, hoc eſt, in latus NO, quadrati NP, producetur area rectanguli NR.

b 14. ſecundi. c 1. ſexti. d 7. quinti.



Iam vero ducatur GI, altitudo fruſti in ſummam ex quadrato KM, hoc eſt, ex baſe ABC, & quadrato NP, ſiue baſe DEF, & ſuperficie NR, media proportionali inter baſes, vel dicta quadrata collectam. Productus enim numerus triplus erit fruſti pyramidis ABCDEF; ideoque tertia producti pars area erit prædicti fruſti. e Quoniam enim priſma, quod fit ex GH, altitudine pyramidis in baſem ABC, ſiue quadratum KM, triplum eſt pyramidis ABCDEFH: erit quoque parallelepipedum factum ex GI, in quadratum KM, vna cum parallelepipedo facto ex IH, in idem quadratum KM, triplum pyramidis eiuſdem. f Eſt aũt & ablatum paralellepipedum factum ex IH, in baſem DEF, hoc eſt, in quadratum NP, triplum ablatæ pyramidis DEFH, g Igitur & reliquum, quod fit ex GI, in quadratum KM, vna cum iis, quæ fiunt ex IH, in KP, & in RM, triplum erit fruſti reliqui ABCDEF.

e 7. duodec. f 7. duodec. g 5. quinti.

4. h Qvia verò æquales ſuperficies ABC, KM, ad ſuperficies æquales DEF, NR, eandem habent proportionem, erit permutando ABC, ad DEF, vt KM, ad NP. i ideoque latus AB, ad latus DE, erit, vt latus KN, ad latus NQ, & diuidendo (ſubtracta recta AS, æquali ipſi DE, ex AB,) SB, ad DE, vt KQ, ad QN. Eſt autem, vt Num. 1. demonſtrauimus, vt SB, ad DE, ita GI, ad IH. Igitur erit etiam vt KQ, ad QN, ideoque vt MO, ad ON, ita GI, ad IH. k Sed vt KQ, ad QN, ita eſt KP, ad PN: Et vt MO, ad ON, ita MR, ad RN. Igitur erit quoque

h 7. quinti. i 22. ſexti. k 1. ſexti.

quoque, vt GI, ad IH, ita tam KP, ad PN, quam MR, ad RN. Contractis ergo hiſce magnitudinibus ad numeros, [a] erit numerus factus ex GI, primò in PN, quartum, æqualis ei, qui fit ex IH, ſecundò in KP, tertium. Item numerus factus ex GI, primò in RN, quartum æqualis ei, qui fit ex IH, ſecundò in MR, tertium: [b] Ac propterea duo, qui fiunt ex GI, in PN, & ex GI, in RN, æquales erunt duobus, qui fiunt ex IH, in KP, & IH, in MR. Adiecto ergo communi, qui fit ex GI, in KM, erunt tres, qui fiunt ex GI, in KM, & in PN, & in RN, æquales tribus, qui fiunt ex GI, in KM, & ex IH, in KP, & in MR. Sed hi poſteriores tres tripli ſunt fruſti pyramidis ABCDEF, vt ad fin. Num. 3. demonſtrauimus. Ergo & priores tres, qui nimirum fiunt ex GI, altitudine fruſti in KM, & in PN, & in RN, hoc eſt, in ſummam ex KM, baſi ABC, æquali, & ex PN, baſi DEF, æquali, & ex RN, media proportionali inter baſes collectam, tripli erunt eiuſdem fruſti: ideoque tertia eorum pars æqualis erit areæ fruſti. quod erat demonſtrandum.

a 19. ſept.

b 2. pronunc.

5. Eadem ratione fruſtũ Coni ABDC, producetur ex altitudine GI, in ſummam ex baſe AB, & baſe CD, & ſuperficie media proportionali inter baſes collectam: vt conſtat, ſi concipiantur quadrata KM, NP, baſibus æqualia, & proinde ſuperficies RN, media proportionalis inter baſes, &c.

SCHOLIVM.

1. Si ea, quæ hactenus dicta ſunt, rebus materialibus accommodentur, licebit nobis per cap. 1. metiri murum quemcunque vniformis craſſitiei, tanquam parallelepipedum quoddam, cuius longitudo eadem ſit, quæ longitudo muri: latitudo verò eadem quæ muri latitudo: altitudo denique, ſiue profunditas eadem, quæ altitudo muri.

Soliditas muri.

Eademqve ratione metiemur fruſtum alicuius marmoris, vel alterius ſaxi, tanquam priſma quodpiam, ſi vniformem habeat craſſitiem, lateraque ad baſes ſint recta.

Non aliter ſaccum tritici, tanquam Cylindrum quendam, dimetiemur, plus minus. Nam cum ſaccus non ſit accuratus Cylindrus, vera eius menſura haberi non poteſt.

Soliditas alicuius fruſti marmoris.

2. Rvrsvs per caput 2. aceruum tritici, tanquam conum aliquem, eodem modo, plus minus, metiri licebit. Itaque ſi cognoſcemus, quot grana, vel libræ tritici in cubo, verbi gratia, vnius palmi contineantur, multiplicenturque grana, vel libræ vnius cubiti in numerum cuborum, qui in toto ſacco, vel aceruo reperti ſunt, producetur numerus granorum, vel librarum in eodem ſacco, vel aceruo exiſtentium.

Capacitas ſacci tritici.

Capacitas aceruitritici.

Sic etiam, ſi detur vas aliquod excauatum in modum parallelepipedi, aut Cylindri, ſciemus eius capacitatem, ſi eius parallelepipedum interius aut Cylindrum, non ſecus, ac ſi ſolida figura eſſet, metiemur: ita vt ſi cognitum fuerit, quot menſuræ aquæ alteriusue liquoris in cubo, verbi gratia, vnius palmi contineantur, ignorari non poſsit, quot menſuræ in cubis in toto vaſe contentis comprehendantur, ſi nimirum menſuræ vnius cubi ducantur in numerum cuborum, quos in vaſe comprehendi inuenimus.

Capacitas vaſis excauati.

4. Deniqve ſi deſideretur ſoliditas alicuius vaſis, quod tam interius, quam exterius formam habeat parallelepipedi, ſeu priſmatis, Cylindriue, me-

Soliditas vaſis excauati. tienda erit vtraque figura tum interior, tum exterior. Si namque illa ex hac detrahetur, reliqua fiet ſoliditas vaſis excauati.

DE AREA QVINQVE CORporum regularium.

CAPVT IV.

1. QVINQVE tantum ſunt corpora regularia, Tetraedrum, Hexaedrum, Octaedrum, Dodecaedrum, & Icoſaedrum, vt in ſcholio propoſ. 18. libr. 13. Euclid. demonſtrauimus: quæ ſic ab Euclide libr. 11. definiuntur.

TETRAEDRVM eſt figura ſolida ſub quatuor triangulis æqualibus, & æquilateris contenta. qualem figuram exprimit pyramis triangularis æquilatera.

HEXAEDRVM eſt figura ſolida ſub ſex quadratis æqualibus contenta. qualem refert cubus, ſeu parallelepipedum baſium quadratarum, in quo omnes tres dimenſiones ſunt æquales.

OCTAEDRVM eſt figura ſolida ſub octo triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

DODECAEDRVM eſt figura ſolida ſub duodecim pentagonis æqualibus, & æquilateris, & æquiangulis contenta.

ICOSAEDRVM eſt figura ſolida ſub 20. triangulis æqualibus, & æquilateris contenta.

Area cubi, & Tetraedri. 2. CVBI ſiue Hexaedri aream gigni ex multiplicatione lateris in ſe, & iterum in productum, cap. 1. Num. 3. docuimus. Item pyramidem, ſeu Tetraedrum produci ex eius altitudine (quæ mechanicè cognoſcetur, vt c. 2. Num. 2. traditum eſt) in tertiam baſis partem: vel ex eius baſe in tertiam partem altitudinis, declarauimus cap. 2. Num. 1. Quod ſi Geometricè inuenire lubeat altitudinem Tetraedri, ita faciemus. Quoniam quadratum diametri ſphæræ Tetraedrum ambientis eſt, vt 2. ad 3. [a] quod diameter ſit potentia ſeſquialtera lateris pyramidis: Si fiat, vt 2. ad 3. ita quadratũ lateris Tetraedri ad aliud, prodibit quadratum diametri ſphærę, eiuſque quadrati quadrata radix diametrum ipſam exhibebit, [b] cuius duæ tertiæ partes altitudinem Tetraedri offerent.

Altitudo Tetraedri.

[a] 13. tertiidecimi.

[b] 2. coroll. 13. tertiidec.

[c] 2. coroll. 14. tertiidec.

Area Octaedri. 3. [c] QVONIAM verò Octaedrum diuiditur in duas pyramides ſimiles, & æquales, quarum baſis communis eſt quadratum à latere deſcriptum: ſi vtriuſque pyramidis inueſtigetur area, ignorari non poterit area Octaedri, cum ex areis illarum pyramidum conflata ſit. Producetur autem area illarum duarum pyramidum, ſi quadratum lateris Octaedri ducatur in diametrum Octaedri, & producti numeri tertia pars capiatur. quia productus ille numerus ex quadrato lateris Octaedri in eiuſdem diametrum, eſt parallelepipedum duarum illarum pyramidum triplum: [d] propterea quod ſemiſsis illius parallelepipedi eandem habens baſem, & altitudinem, cum vtralibet pyramidum, tripla eſt vnius pyramidis. Diameter porro Octaedri, quę à diametro ſphærę, vel quadrati lateris Octaedri non differt, inuenietur, ſi ex duplo quadrati lateris radix quadrata eruatur;

[d] coroll. 7. duodec.

Diameter Octaedri.

tur; [a] quod tam quadratum ex diametro quadrati deſcriptum duplum ſit quadrati lateris, [b] quam quadratum diametri ſphæræ quadrati lateris Octaedri. Semiſsis verò huius diametri, altitudo erit vtriuſuis Pyramidis. Quare ſi hęc altitudo ducatur in tertiam partem quadrati lateris, producetur area vnius pyramidis, id eſt, ſemiſsis Octaedri: ac proinde duplum huius pyramidis aream totius Octaedri indicabit.

a ſchol. 47. primi.
b 14. tertiidec.

4. DEINDE quia ductis ex centro Dodecaedri ad omnes eius angulos rectis lineis, Dodecaedrum in 12. pyramides pentagonas æquales diuiditur; ſi area vnius pyramidis per cap. 2. inuenta multiplicetur per 12. procreabitur area totius Dodecaedri. Vt autem vnius pyramidis area habeatur, neceſſe eſt, & aream baſis pentagonæ inueſtigare ex latere dato, per ea, quę lib. 4. cap. 5. ſcripſimus, & pyramidis altitudinem, vt iam docebo. Ex ſuperiori plano producto demittatur ad planum baſis oppoſitæ linea perpendicularis: Huius enim ſemiſsis diligenter inquiſita in partibus lateris Dodecaedri, per inſtrumentum partium lib. 1. cap. 1. conſtructum, dabit pyramidis altitudinem quęſitam, quemadmodum & tota perpendicularis altitudinem Dodecaedri exhibet. Quam tamen Geometricè ita quoq; deprehendemus. [c] Quia cubus in Dodecaedro deſcriptus eadem ſphęra, qua Dodecaedrum, comprehenditur, eiuſque latus vnum angulum Pentagoni Dodecaedri ſubtendit; ideoq; eadem diameter eſt ſphæræ, Dodecaedri, & cubi: [d] Si recta ſubtendens angulum pentagoni inueſtigetur, habebitur latus cubi: [e] Et quia diameter ſphærę potentia eſt tripla lateris cubi, ſi quadratum lateris cubi inuenti triplicetur, habebitur quadratum diametri ſphærę, vel cubi, cuius radix quadrata ipſam diametrum dabit. Cum ergo diameter Dodecaedri, & altitudo eiuſdem centra baſium oppoſitarum coniungens ſe in centro ſecent bifariam, venabimur ſemiſſem huius altitudinis, nimirum altitudinem pyramidis quęſitam, hac ratione. Concipiatur triangulum rectangulum, cuius baſis eſt ſemidiameter Dodecaedri nota, cum tota diameter proximè cognita ſit, latera verò circa angulum rectum, altitudo pyramidis, & ſemidiameter circuli baſem Dodecaedri circumſcribentis. Cum ergo ſemidiameter hæc cognoſci poſsit, ex iis, quę lib. 4. cap. 5. docuimus, [f] cognoſcetur quoque reliquum latus, altitudo videlicet pyramidis, quam quærimus. Porrò ſemidiameter prædicti circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis ita quoque reddetur nota. Quoniam latus pentagoni ſubtendit in eo circulo grad. 72. & latus Decagoni grad. 36. cognita erunt hæc latera in partibus ſinus totius. Si ergo fiat, vt latus pentagoni in partibus ſinus totius cognitum ad idem latus notum ex hypotheſi, ita latus Decagoni in iiſdem partibus ſinus totius cogniti ad aliud, prodibit Decagoni latus in menſura lateris pentagoni cognitum. [g] Et quia latus pentagoni poteſt latera decagoni, & Hexagoni eiuſdem circuli, ſi quadratum lateris decagoni proximè cogniti detrahatur ex quadrato lateris pentagoni, reliquum fiet quadratum lateris Hexagoni, id eſt, ſemidiametri, ideoque eius radix quadrata ſemidiametrum exhibebit notam.

Area Dodecaedri.
c 8. quinti dec.
d 12. triang. rectil.
e 15. tertiidec.
Perpendicularis è centro ſphæra ad baſem Dodecaedri.
f 3. triang. rectil.
Semidiameter circuli pentagonum Dodecaedri circumſcribentis.
g 10. tertiidec.

5. POSTREMO quia ductis ex centro Icoſaedri ad omnes eius angulos rectis lineis, Icoſaedrum in 20. pyramides triangulares ęquales diuiditur; ſi area vnius pyramidis per cap. 2. inuenta multiplicetur per 20. gignetur totius Icoſaedri area ex illis 20. pyramidibus conflata. Vt autem vnius pyramidis area obtineatur, inueſtiganda primum erit area baſis triangularis, ex iis, quę lib. 4. cap. 2. Num. 4. & 5. ſcripſimus. Deinde altitudo pyramidis mechanicę,

Area Icoſaedri.

hoc pacto. Ex ſuperiori plano producto, hoc eſt, ex inferiori ſuperficie alicuius plani, quod corporis ſupremæ baſi imponeretur, ad planum baſis oppoſitæ perpendicularis demittatur. Hæc enim accuratè dimenſa altitudinem Icoſaedri dabit, eiuſque ſemiſsis altitudinem pyramidis, quæ quęritur. Quam Geometricè ita etiam explorabimus. Fiat pentagonum ex 5. lateribus Icoſaedri, inueſtigeturque eius ſemidiameter, & latus Decagoni in circulo illud pentagonum circumſcribente, in partibus, in quibus latus Icoſaedri datum eſt, hac ſcilicet ratione. Concipiatur triangulum rectangulum, cuius baſis ſemidiameter dicti circuli, latera verò ſemiſsis lateris pentagoni, hoc eſt, Icoſaedri, & perpendicularis è centro ad punctum medium dicti lateris demiſſa. Ita namque cognoſcetur ſemidiameter, ex iis, quæ lib. 4. cap. 5. Num. 2. tradita ſunt. Latus verò Decagoni in eodem circulo deſcripti reperietur, vt paulo ante circa finem Num. 4. dictum eſt. [a] Et quia diameter ſphæræ, ſiue Icoſaedri potentia eſt quintupla inuentæ ſemidiametri; ſi quadratum ſemidiametri inuentę quintupletur, procreabitur quadratum diametri Icoſaedri, cuius radix quadrata diametrum offeret, ideoque & ſemidiameter Icoſaedri nota erit. Vel aliter. [b] Quoniam diameter ſphærę, id eſt, Icoſaedri, componitur ex latere Hexagoni, & duobus lateribus decagoni in circulo pentagonum ex quinque lateribus Icoſaedri compoſitum circumſcribente: erit ſumma collecta ex ſemidiametro illius circuli, & duobus lateribus decagoni, diametro Icoſaedri æqualis: ideoque rurſus ſemidiameter Icoſaedri nota erit.

[a] 1. corol. 16. tertiidec.

[b] 2. corol. 16. tertiidec.

Error Orontii.

HINC patet, Orontium cum illis, qui ipſum ſequuntur, decipi, qui putat, ex ſemiſſe ſemidiametri illius circuli, & ex latere decagoni componi ſemiaxem Icoſaedri, hoc eſt, axem, vel altitudinem pyramidis, cuius baſis triangulum Icoſaedri, & vertex centrum ſphæræ. Nam vt ex iis conſtat, quę proximè ſcripſimus, eo modo componitur ſemidiameter ſphærę, vel Icoſaedri, quæ maior eſt prędicto axe. Semidiameter porro circuli prædictum pentagonum circumſcribentis reperiri quoque poterit, vt ad finem Num. 4. diximus, ſi nimirum quadratum lateris decagoni ex quadrato lateris dicti pentagoni, quod à latere Icoſaedri non differt, tollatur, & reliqui numeri radix quadrata extrahatur: [c] propterea quod latus pentagoni poteſt latera decagoni, & hexagoni eiuſdem circuli.

[c] 10. tertiidec.

Perpendicularis è centro ſphæra ad baſem Icoſaedri.

IAM verò cognita ſemidiametro Icoſaedri, inueniemus altitudinem pyramidis, cuius baſis eſt triangulum Icoſaedri, & vertex eiuſdem centrum, hoc modo. Quoniam diameter Icoſaedri, eiuſdemque altitudo ſeſe in centro ſecant bifariam, concipiatur triangulum rectangulum, cuius baſis eſt diameter Icoſaedri proximè cognita, latera verò circa angulum rectum, altitudo pyramidis, & ſemidiameter circuli baſem Icoſaedri circumſcribentis. Cum ergo hęc ſemidiameter cognoſci poſsit ex iis, quæ lib. 4. cap. 5. docuimus, [d] cognoſcetur quoque latus reliquum pyramidis, videlicet altitudo, quæ inquiritur. Semidiameter porro circuli baſem triangularem Icoſaedri circumſcribentis efficietur hoc etiam pacto cognita. [e] Quoniam trianguli æquilateri latus potentia triplum eſt ſemidiametri illius circuli; ſi quadratum lateris Icoſaedri diuidatur per 3. erit Quotientis radix quadrata ſemidiameter quæſita.

[d] 3. triang. rectil.

[e] 12. tertiidec.

Semidiameter circuli triangulum Icoſaedri circumſcribentis.

6. EADEM hac arte, quæ in Dodecaedro, & Icoſaedro expoſita eſt, areas Tetraedri, cubi, & Octaedri inueſtigare licebit, ſi, lineis ex eorum centris ad omnes angulos ductis, in pyramides æquales diſtribuantur. Tetraedrum nimirum

rum in 4. pyramides triangulares; cubus in 6. quadrangulares; & Octaedrum in 8. triangulares. Inuenta namque per cap. 2. in quolibet area vnius pyramidis, ſi ea in numerum baſiũ corporis regularis ducatur, inſurget totius corporis area. Vt autem area vnius pyramidis habeatur, inquirenda prius erit altitudo ipſius, vt ducta in tertiam baſis partem pyramidis aream producat. Altitudo ergo hæc in Tetraedro ſic reperietur. [a] Quoniam diameter ſphæræ Tetraedrum ambientis potentia eſt ſeſquialtera lateris Tetraedri: ſi Fiat, vt 2. ad 3. ita quadratum lateris Tetraedri dati ad aliud, prodibit quadratum diametri ſphæræ, cuius radix quadrata ipſam diametrum oſtendet. [b] Huius autem diametri ſexta pars, altitudo erit pyramidis quæſita, recta videlicet perpendicularis è centro ſphæræ in baſem Tetraedri demiſſa.

Area Tetraedri, cubi & Octaedri aliter inuenta.

a 13. tertijdec.

b 2. corol. 13. tertiidec.

In cubo verò dicta altitudo ſemiſsi lateris cubi æqualis eſt, quod perpendicularis è centro ſphæræ in baſem cubi demiſſa æqualis ſit ſemiſsi lateris cubi, vt liquet.

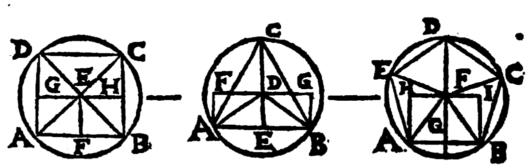
Perpendicularis è centro ſphæræ ad baſem Tetraedri, cubi, & Octaedri.

In Octaedro denique eadem altitudo ſic deprehendetur. [c] Quoniam diameter ſphæræ eſt potentia dupla lateris Octaedri: ſi fiat, vt 1. ad 2. ita quadratum lateris Octaedri dati ad aliud, procreabitur quadratum diametri ſphæræ, vel Octaedri. Huius ergo radix quadrata dabit diametrum, ideoq; ſemidiameter non ignorabitur. Hinc altitudo pyramidis quæſita, hoc eſt perpendicularis è centro ſphæræ in baſem Octaedri demiſſa, elicietur ea ratione, quã in Icoſaedro ad finem Num. 5. explicauimus.

c 14. tertiidec.

7. Non videtur autem omittenda alia ratio dimetiendi omnia quinq; corpora regularia, quæ quidem in lib. 14. Euclid. demonſtrata eſt, & eſt eiuſmodi. Primum quæratur ſuperficies conuexa cuiuſque corporis, ex eius latere cognito, etiamſi nullius baſis area inueſtigetur: hoc videlicet pacto. Quoniam quælibet baſis cuiuſuis corporis diuiditur per rectas ex centro baſis ad omnes angulos ductas in tot triangula æqualia, quot anguli, vel latera in baſe continentur: ſi ducatur hic numerus triangulorum in numerum baſium corpus regulare, quod propoſitum eſt, ambientium, habebitur numerus omnium huiuſmodi triangu-

In quot triangula diuidantur omnes baſes cuiuſuis corporis regularis ex earũ centris.



lorũ in tota ſuperficie conuexa contentorũ. Vt quia baſis quadrata cubi ABCD, diuiſa eſt in quatuor triangula ex centro E, continebuntur 24. eiuſmodi triangula in 6. baſibus. Item quia baſis triangularis Tetraedri, Octaedri, & Icoſaedri ABC, ex centro D, diſtributa eſt in 3. triangula, exiſtent in 4. baſibus Tetraedri 12. eiuſmodi triangula, & 24. in 8. baſibus Octaedri, & 60. in 20. baſibus Icoſcedri. Denique quia baſis pentagona Dodecaedri ABCDE, reſoluta eſt ex cẽtro F, in 5. triangula, cõplectentur 12. baſes Dodecaedri 60. eiuſmodi triãgula.

Deinde quia rectangulum contentum ſub perpendiculari è centro baſis in latus demiſſa, & ſub vno latere, æquale eſt duobus eiuſmodi triangulis, [d] propterea quod vnius duplum eſt: erit in cubo rectangulum illud duodecies ſumptum toti ſuperficiei cubi æquale. In Tetraedro verò ſexies ſumptum to-

d 41. primi.

Superficies regularium corporum & perpendiculares baſium.

[a] ſchol. 26. primi.
[b] 6. primi.
[c] 2. coroll. 12. tertijdec.
[d] 12. tertijdec.
[e] 1. quartidec.

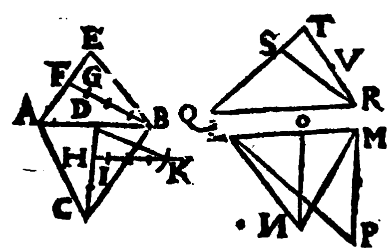
tam Tetraedri ſuperficiem conficiet: In Octaedro deinde duodecies acceptum toti ſuperficiei Octaedri adæquabitur: At in Dodecaedro, & Icoſaedro tricies ſumptum ſuperficiei toti tam Dodecaedri, quam Icoſaedri æquale erit. Dicta autem perpendicularis EF, in baſe cubi æqualis eſt ſemiſsi lateris cubi AB, [a] Quoniam enim perpendicularis EF, ſecat latus AB, biſariam, [b] eſtque ipſi AF, æqualis, quod anguli FAE, FEA, ſemirecti ſint; conſtat EF, ſemiſsi lateris cubi eſſe æqualem. Perpendicularis autem DE, in baſe Tetraedri; Octaedri, & Icoſaedri, [c] ſemiſsis eſt ſemidiametri CD. [d] Cum ergo latus AC, ſit potentia triplum ſemidiametri CD: Si fiat, vt 3. ad 1. ita quadratum lateris dati AC, ad aliud, prodibit quadratum ſemidiametri CD, cuius radix quadrata ipſam CD, indicabit, eiuſque ſemiſsis perpendicularem DE, exhibebit. Perpendicularis denique FG, in baſe Dodecaedri [e] ſemiſsis eſt ſummæ ex ſemidiametro AF, & latere decagoni circuli ABD, collectæ, quod latus decagoni cognoſcetur, vt ad finem Nume. 4. traditum eſt.

[f] ſchol. 20. tertijdec.

Area corporum regularium aliter inuenta.

[f] QVIA verò ſolidum, quod fit ex perpendiculari è centro cuiuscumque corporis regularis ad aliquam eius baſem ducta in tertiam partem ſuperficiei ipſius corporis, ipſi corpori æquale eſt; ſi inueſtigetur ſuperficies conuexa dati corporis regularis, vt proximè docuimus, atque in tertiam eius partem ducatur altitudo vnius pyramidum, in quas corpus ipſum per rectas è centro ipſius ductas diuiditur, (quæ altitudo reperietur, vt ſupra tradidimus) hoc eſt, perpendicularis è centro corporis in eius baſem demiſſa, procreabitur area, ſiue ſoliditas ipſius corporis. Quæ etiam obtinebitur, ſi dicta altitudo ducatur in totam ſuperficiem conuexam, & producti tertia pars capiatur.

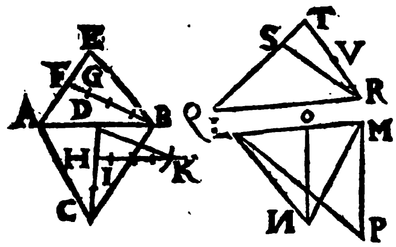
8. ITAQVE vt vides, tota difficultas in corporibus regularibus dimetiendis conſiſtit fermè tota in altitudine pyramidis baſem habentis eandem cũ corpore, verticem autem in centro ſphæræ, exquirenda: cuius quidem inuentio Geometrica per numeros moleſtiſsima eſt, propter radices ſurdas, & numeros fra-



ctos, quorum numeratores, denominatoreſq; nimis magni ſunt, adeo vt operæ pretium videatur eſſe eandem mechanicè explorare, vt ad initium Num. 2. 4. & 5. diximus, præſertim ſi exquiſita diligentia in ea per inſtrumentum partium dimetienda adhibeatur. Sed quia non ſemper in promptu habemus corpora regularia, vt mechanicè eam altitudinem conſequi poſsimus, libet rationem quãdam nouam, eamque facillimam hic præſcribere, qua ſine moleſtia illa numerorum, eadem illa altitudo per lineas inueniatur, etiamſi corpus regulare non

adſit,

adſit, ſed ſolum eius latus datum ſit ac cognitum. Sit ergo primo datum latus Tetraedri AB, quotcunque palmorum, conſtruaturque triangulum æquilaterum ABC, pro baſe Tetraedri: Diuiſo autem latere AB, bifariam in D, iungatur recta CD, a quæ ad AB, perpendicularis erit. Conſtructo quoque Iſoſcele ABE, cuius vtrumque latus rectæ CD, æquale ſit, demittatur ad AE, perpendicularis BF, cuius quarta pars ſit FG. Dico FG, altitudinem eſſe vnius pyramidis, hoc eſt, æqualem eſſe perpendiculari ex centro ſphæræ Tetraedro circumſcriptæ ad vnam baſem deductæ. Quoniam enim, vt ad finem Euclidis ex Hypſicle demonſtrauimus, E, angulus eſt inclinationis vnius baſis Tetraedri ad alteram, eſtque EB, perpendiculari CD, æqualis: ſi triangulum BEF, concipiatur circa EF, moueri, donec rectum ſit ad baſem Tetraedri, cadet punctum B, in verticem Tetraedri; ac proinde perpendicularis BF, altitudo erit Tetraedri. b Et quia altitudo Tetraedri duas partes tertias diametri ſphæræ continet: ſi ſemidiameter ponatur 6. erit altitudo BF, 4. & ſemidiameter 3. c Cum ergo altitudo vnius pyramidis ſit tertia pars ſemidiametri, erit BG, ſemidiameter, & GF, altitudo vnius pyramidis. Quam etiam inueniemus, licet Iſoſceles AEB, non extruatur, hoc modo. Sumpta dH, tertia parte perpendicularis CD, excitetur ad CD, perpendicularis HK, quæ ex D, ad interuallum CD, ſecetur in K. Dico HI, quartam partem ipſius HK, eſſe altitudinem vnius pyramidis Erecto enim triangulo DHK, ſupra baſem Tetraedri ABC, cadet punctum K, in verticem Tetraedri, quod DK, ducta æqualis ſit perpendiculari ex medio latere ad angulum baſis oppoſitum ductæ. Ergo vt prius, HK, altitudo erit Tetraedri, & HI, perpendicularis ex centro ſphæræ in H, centrum baſis cadens. d Nam DH, tertia pars perpendicularis CD, in centrum trianguli cadit.



a *ſchol. 26. primi.*

e *Altitudo pyramidis Tetraedri.*

b *2. corol. 13. tertijdec.*

c *2. corol. 13. tertijdec.*

d *2. corol. 13. tertijdec.*

Sit deinde datum latus Octaedri LM, ſupra quod conſtruatur triangulum æquilaterum LMN, pro baſe Octaedri. Diuiſo autem latere LM, bifariam in O, iungatur recta NO, e quæ ad LM, erit perpendicularis. Conſtructio iam Iſoſcele QRS, ſupra baſem QR, æqualem diametro ſphæræ, vel quadrati ex latere Octaedri deſcripti, (quæ habebitur, ſi educatur perpendicularis MP, lateri LM, æqualis. Iuncta enim recta LP, diameter erit illius quadrati, vel ſphæræ.) vtrumque laterum QS, RS, æquale habens perpendiculari NO; ducatur ex R, ad QS, perpendicularis RT, quæ bifariam ſecetur in V. Dico TV, eſſe altitudinem pyramidis quæſitam, hoc eſt, æqualem eſſe perpendiculari ex centro ſphæræ ad vnam baſem Octaedri cadenti. Quoniam enim, vt ad finem Euclidis ex Hypſicle demonſtrauimus, angulus QSR, inclinationem vnius baſis ad alteram indicat, eſtque obtuſus, erit perpendicularis RT, cadens ad partes anguli acuti RST, æqualis altitudini Octaedri, id eſt, perpendiculari baſium Octaedri oppoſitarum centra connectenti, vt ex Octaedro materiali perſpicuum eſt: Ac propterea eius ſemiſsis TV, altitudo erit pyramidis quæſita, quod altitudo Octaedri bifariam ſecetur in centro.

e *ſchol. 26. primi.*

Altitudo pyramidis Octaedri.

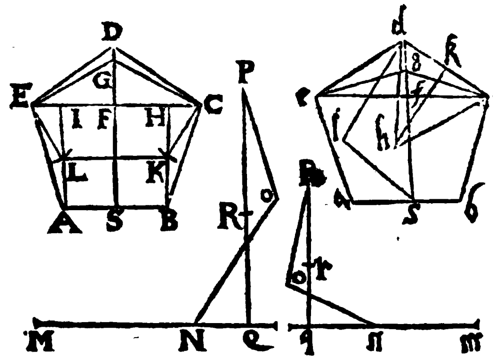
Si detur latus cubi, ſiue hexaedri, erit eius ſemiſsis altitudo pyramidis quæſita: propterea quod cubi altitudo eiuſdem lateri ſit æqualis.

Altitudo pyramidis cubi.

DATVM

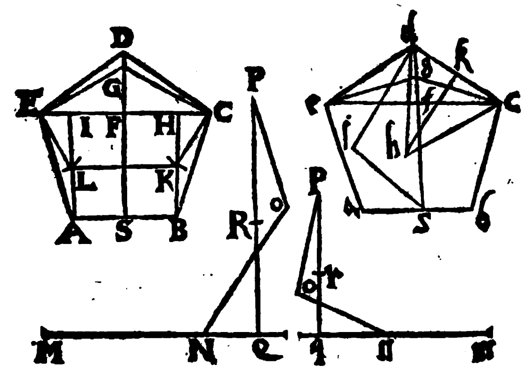
DATVM iam ſit AB, latus Dodecaedri, ſupra quod extruatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE, pro baſe Dodecaedri. Iuncta autem recta CE,[a] quæ latus erit cubi in Dodecaedro, & in eadem cum ipſo ſphæra deſcripti,[b] atque lateri AB, parallela: ſecetur AB, bifariam in S, connectaturque recta SD.[c] quæ angulum CDE, bifariam ſecabit:[d] ac proinde & rectam CE, bifariã, & ad angulos rectos diuidet: ideoque & anguli ad S, recti erunt. Fiat ſupra CE, Iſoſceles CGE, cuius vtrumque laterum CG, EG, perpendiculari SF, ſit æ-

a 2.coroll.17. tertijdec.
b coroll.8. quintidec.
c ſchol.12. quarti.
d 4.primi.



quale. Sumptis quoque FH, FI, ſemiſsi lateris AB, æqualibus, erigantur ad EC, perpendiculares HK, IL, quæ ex C, E, ad interuallum FD, ſecentur in K, L, iunganturq; rectæ EL, CK. His paratis, fiat angulo CGE, æqualis angulus MNO, ponaturque NO, ipſi SD, æqualis: Item angulo ELK, fiat æqualis angulus NOP, ponaturque OP, lateri AB, æqualis: ac tandem demittatur ex P, ad MN, perpendicularis PQ, quæ bifariam ſecetur in R. Dico RQ. altitudinem eſſe pyramidis vnius in Dodecaedro. Nam quia, vt ad finem Euclidis ex Hypſicle demonſtrauimus, angulus CGE, inclinationem vnius baſis ad alteram metitur, ſi MN, concipiatur eſſe perpendicularis, quæ in baſe infima ex angulo pentagoni ad medium punctum lateris oppoſiti ducitur, reſpondebit NO, perpendiculari, quæ in pentagono ad illam baſem inclinato ex eodem medio puncto ad oppoſitum angulum ducitur: propterea quod angulum MNO, angulo inclinationis CGE, & rectam NO, perpendiculari SD, æqualem poſuimus. Recta autem OP, refert latus Dodecaedri inter angulum dicti pentagoni inclinati, & angulũ ſupremæ baſis poſitũ: ꝓpterea q, recta OP, poſita eſt æqualis lateri Dodecaedri, & angulus NOP, angulo ELK, qui quidem æqualis eſt illi, quem dictum latus efficit cum perpendiculari ex angulo ſupradicti pentagoni inclinati ad baſem in medium punctum lateris oppoſiti ductæ, vt conſtat, ſi vna baſis cubi Dodecaedro inſcripti intelligatur dicto lateri Dodecaedri ſubſtrata, ita vt duo latera baſis cubi ſubtendant duos angulos duorum pentagonorũ, quorum vnum ad baſem Dodecaedri inclinatum eſt, alterum verò ſupremum in Dodecaedro. Erit enim tunc recta CE, æqualis rectæ duo puncta media duorum laterum dictorum baſis cubi connectenti. Rectæ autem EL, CK, reſpondebunt rectis ex eiſdem punctis medijs laterum illorum baſis cubi, ad angulos prædictorũ pentagonorum ductis: Ac proinde angulus ELK, æqualis erit ei, quem perpendicularis

cularis in pentagono inclinato cum prædicto latere Dodecaedri efficit. Ex quo fit punctum P, in plano ſupremæ baſis exiſtere, atque idcirco perpendicularem



PQ ad planum baſis per MN, ductum demiſſam, æqualem eſſe altitudini Dodecaedri; eiuſque ſemiſſem RQ, altitudini vnius pyramidis pentagonæ eſſe æqualem. Quæ omnia facile intelligentur, ſi Dodecaedrum aliquod materiale adhibeatur.

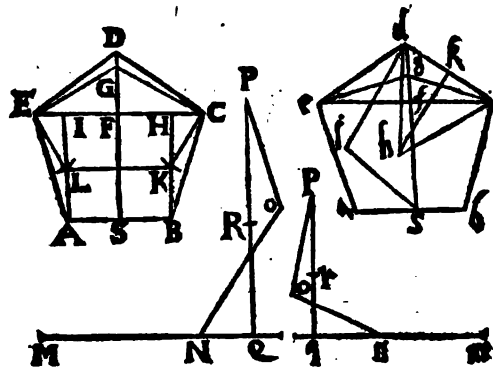
DENIQVE datum ſit Icoſaedri latus a b, ſupra quod extruatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum a b c d e, pro baſe pyramidis ex quinque baſibus Icoſaedri conflatæ. Iuncta autem recta c e, ſecetur latus a b, in ſ, bifariam, & recta ducatur ſ d, quæ vt in Dodecaedro oſtendimus proximè, perpendicularis erit ad vtramque a b, c e. Fiat ſupra latus Icoſaedri c d, triangulum æquilaterum c d h, pro baſe vna Icoſaedri; & diuiſo latere c d, bifariam in k, iungatur recta h k, [a] quæ ad c d, erit perpendicularis. Præterea ſupra c e, fiat Iſoſceles c g e, cuius vtrumque laterum c g, e g, perpendiculari h k, ſit æquale. Poſt hæc ſupra ſ d, conſtituatur triangulum ſ d l, cuius latus ſ l, perpendiculari h k, & latus d l, lateri Icoſaedri a b, ſit æquale. Denique angulo c g e, fiat æqualis angulus m n o, & recta n o, perpendiculari h k, æqualis: Item angulus n o p, angulo d l s, rectaque o p, lateri Icoſaedri a b, æqualis. Dico perpendicularem p q, ad m n, demiſſam, eſſe altitudinem Icoſaedri, eiuſque ſemiſſem r q, altitudinem vnius pyramidis in Icoſaedro. Quia enim, vt ex Hypſicle ad finem Euclidis demonſtrauimus, angulus c g e, metitur inclinationem vnius baſis ad alteram, ſi m n, concipiatur eſſe perpendicularis, quæ in baſe infima Icoſaedri ex angulo trianguli ad medium punctum lateris oppoſiti ducitur, reſpondebit n o, perpendiculari, quæ in triangulo ad illam baſem inclinato ex eodem medio pũcto ad angulum oppoſitum ducitur: propterea quod angulum m n o, angulo inclinationis c g e, & rectam n o, perpendiculari h k, æqualem fecimus: Recta verò o p, referet latus Icoſaedri inter angulum dicti trianguli inclinati, & angulum ſupremæ baſis poſitum; propterea quod recta o p, poſita eſt æqualis lateri Icoſaedri, & angulus n o p, angulo d l s. [b] qui quidem æqualis eſt illi, quẽ dictum latus efficit cum perpendiculari ex angulo ſupradicti trianguli inclinati ad baſem, in medium punctum lateris oppoſiti ducitur. Eſt enim recta d s, æqualis perpendiculari ex angulo pentagoni ad latus oppoſitum ductæ, & latera s l, d l, æqualia perpendiculari

a ſchol. 28. primi.

Altitudo pyramidis Icoſaedri.

b 8. primi.

in triangulo inclinato, & lateri Icoſaedri inter angulum ſupremum pentagoni prædicti, & angulum trianguli inclinati. Ex quo fit, punctum p, in plano ſupremæ



baſis exiſtere: ac proinde perpendicularem p q, ad planũ baſis per m n, ductũ demiſſam, æqualẽ eſſe altitudini Icoſaedri, eiuſq; ſemiſſem r q, altitudini vnius pyramidis trigoni eſſe æqualem. Quæ omnia facilè percipientur, ſi adhibeatur materiale aliquod Icoſaedrum. Inuenta porrò hoc modo altitudine pyramidis, cognoſcenda eadem ſumma diligentia erit, beneficio inſtrumenti partium, in partibus lateris corporis regularis propoſiti.

DE AREA SPHÆRÆ, INVENTIONEque ſuperficiei conuexæ eiuſdem ſphæræ.

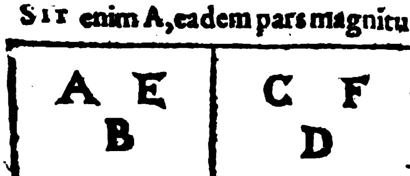
CAPVT V.

1. VT ſphæræ aream, ſoliditatemue pluribus poſsimus vijs aſſequi, demõſtranda prius erunt nonnulla ad eam rem valdè neceſſaria, atq; vtilia, quod ſequentibus 7. propoſitionibus efficiemus.

PROPOSITIO I.

QVAM proportionem habent duæ quælibet partes aliquotæ magnitudinis cuiuſcunque, eandem habent duæ ſimiles partes alterius cuiuſuis magnitudinis.

Sit enim A, eadem pars magnitudinis B, quæ C, magnitudinis D: Item E,



eadẽ pars magnitudinis B, quæ F, magnitudinis D. Dico eſſe, vt A, ad E, ita C, ad F. Quoniam enim eſt, vt A, ad B, ita C, ad D, quod vtrobiq; eadem proportio ſubmultiplex poſita ſit. Item vt B,

vt B, ad E, ita D, ad F; quod vtrobique poſita ſit eadem proportio multiplex: erit ex æquo, vt A, ad E, ita C, ad F. quod eſt propoſitum.

IDEM ſequitur ſi A, & C, ſint ipſarum B, D, eædem partes plures non facientes vnam: Item, ſi E, & F, earundem B, D, ſint eædem partes plures non facientes vnam, vt $\frac{2}{3}$. vel $\frac{3}{5}$. &c. Nam ſi verbi gratia A, C, ſint $\frac{3}{4}$. ipſarum B, D, erit $\frac{1}{4}$. ipſius B, ad B, vt $\frac{1}{4}$. ipſius D, ad D. [a] Igitur erunt quoq;, vt $\frac{3}{4}$. ipſius B, hoc eſt, ipſa A, ad B, ita $\frac{3}{4}$. ipſius D, hoc eſt, ipſa C, ad D. Rurſus ſi verbi gratia E, F, ſint $\frac{2}{3}$. ipſarum B, D, erit, vt B, ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem B, ita D, ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem D. [b] Ac proinde vt B, ad $\frac{2}{3}$. id eſt, ad E, ita D, ad $\frac{2}{3}$. id eſt, ad F. Quare, vt prius, erit ex æquo, vt A, ad E, ita C. ad F.

a ſchol. 22. quinti.

b ſchol. 22. quinti.

COROLLARIVM.

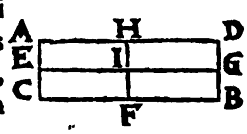
SEQVITVR hinc, ita eſſe $\frac{1}{4}$. cuiuſuis magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem, vt eſt $\frac{1}{2}$. cuiuſuis alteri⁹ magnitudinis ad $\frac{2}{3}$. eiuſdē. Quoniā.n. vt oſtendim⁹, ita eſt $\frac{1}{4}$. prioris magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem, vt $\frac{1}{4}$. poſterioris ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem. [c] Vt autem $\frac{1}{4}$. poſterioris ad $\frac{1}{3}$. ita ſunt $\frac{2}{4}$. ad $\frac{2}{3}$. hoc eſt, $\frac{1}{2}$. ad $\frac{2}{3}$. Igitur erit vt $\frac{1}{4}$. prioris magnitudinis ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem, ita $\frac{1}{2}$. poſterioris magnitudinis ad $\frac{2}{3}$. eiuſdem.

c 1. quinti.

PROPOSITIO II.

RECTANGVLVM ſub diametro, & circumferentia maximi circuli in ſphæra comprehenſum, quadruplum eſt circuli maximi, & ſuperficiei conuexæ eiuſdem ſphęræ ęquale.

SIT rectangulum AB, comprehenſum ſub diametro A C, & circumferentia CB, maximi in ſphæra circuli. Dico rectangulum AB, quadruplum eſſe circuli maximi in ſphæra, & ſuperficiei conuexæ eiuſdem ſphæræ ęquale. Sectis enim omnibus lateribus bifariam in E, F, G, H, iunctiſque rectis EG, FH, ſecantibus ſe ſe in I, diuiſum erit totum rectangulum in quatuor æqualia A I, C I, B I, D I, [d] quod rectæ E G, FH, rectis A D, A C, parallelæ ſint. Ac proinde rectangulum AB, rectanguli C I, quadruplum erit. Eſt autem rectangulum C I, contentum ſub C E, ſemidiametro, & ſemicircumferentia C F, circulo maximo, cuius nimirum diameter A C, ęquale, vt lib. 4. capit. 7. Nume. 1. demonſtratum eſt. Igitur rectangulum AB, circuli maximi quadruplum eſt. Et quia eiuſdem circuli maximi quadrupla eſt ſuperficies conuexa ſphærę, per propoſ. 31. lib. 1. Archimedis de ſphęra, & Cylindro: [e] ęquale erit rectangulum AB, conuexæ ſuperficiei, quod erat demonſtrandum.



d 33. primi.

e 9. quinti.

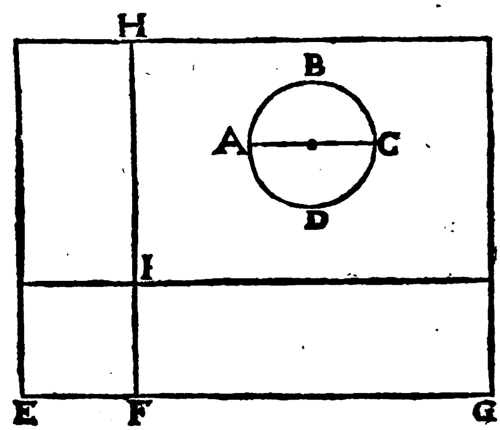
COROLLARIVM.

EX demonſtratione liquet, rectangulum ſub diametro cuiuſuis circuli, (etiamſi non ſit maximus in ſphæra,) & circumferentia eiuſdem, quadruplum eſſe ipſius circuli. Eadem enim ſemper demonſtratio adhibebitur.

PROPOSITIO III.

EADEM eſt proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi in ſphęra ad ſuperficiem ſphęræ, quę circumferentię circuli maximi ad diametrum. Item eadem eſt proportio quadrati diametri maximi circuli in ſphęra ad ſuperficiem ſphęrę, quę diametri ad circumferentiam eiuſdem circuli maximi.

SIT circulus ſphæræ maximus ABCD, eiuſque diameter A C. Dico ita eſſe quadratum ex circumferentia ABCD, deſcriptum ad ſuperficiem ſphęræ, cuius diameter AC, vt eſt circumferentia ABCD, ad diametrum AC. Item ita eſſe quadratum diametri AC, circuli maximi in ſphæra, ad ſuperficiem ſphęrę, vt eſt diameter A C, ad circumferentiam A B C D. Sit enim E F, diametro A C, & recta FG, circumferentię ABCD, æqualis, & ſuper FG, conſtruatur quadratum GH, capiaturque F I, ipſi E F, ęqualis, eritque E I, quadratum diametri E F, vel A C.



Perfecta autem figura, vt vides, erit tam rectangulum G I, ſub ſemidiametro F I, maximi circuli, & circumfentia F G, quam rectangulum E H, ſub diametro E F, eiuſdem circuli maximi, & circumferentia FH, ęquale, per pręcedentem, ſuperficiei conuexę ſphęrę. a Cum ergo ſit, vt GH, quadratum ex circumferentia FG, deſcriptum ad rectangulum EH, ſuperficiei conuexę ſphęrę ęquale, ita GF, circumferentia ad EF, diametrum circuli maximi, conſtat primum.

a 1. ſexti.

b 1. ſexti.

b ITEM cum ſit, vt E I, quadratum diametri E F, maximi circuli, ad I G, rectangulum ſuperficiei conuexæ ſphærę ęquale, ita E F, diameter maximi circuli ad F G, circumferentiam, patet id, quod ſecundo loco proponitur.

COROLLARIVM.

Area circuli.

HINC manifeſtum eſt (id quod lib. 4. capit. 7. Nume. 1. etiam demonſtrauimus) circuli aream gigni tam ex $\frac{1}{2}$. diametri in totam circumferentiam, quam ex $\frac{1}{2}$. circumferentię in totam diametrum. Cum enim circulus A B C D, ſit quarta pars rectanguli GI, quòd hoc illius quadruplum ſit oſtenſum propoſ. 2.

a Conti-

[a] Contineatur autem quarta pars rectanguli G I, tam ſub $\frac{1}{4}$. diametri F I, & circumferentia F G, quam ſub $\frac{1}{4}$. circumferentiæ F G, & diametro F I; liquido conſtat, quod proponitur. a 1. ſexti.

PROPOSITIO IV.

QVADRATVM circumferentiæ circuli maximi in ſphæra ad ſuperficiem ſphæræ conuexam, maiorem proportionem habet, quam 223. ad 71. minorem verò, quam 22. ad 7.

Cvm enim per præcedentem ſit, vt quadratum circumferentiæ maximi circuli ad ſuperficiem conuexam ſphærę, ita circumferentia eiuſdem circuli ad diametrum: [b] ſit autem maior proportio circumferentię ad diametrum, quam $3\frac{10}{71}$. ad 1. hoc eſt, quam 223. ad 71. minor verò, quam $3\frac{1}{7}$. ad 1. hoc eſt, quam 22. ad 7. liquet id, quod propoſitum eſt. b 2. de Dimenſ. circuli lib. 4.

PROPOSITIO V.

QVADRATVM diametri circuli in ſphæra maximi ad ſuperficiem ſphæræ conuexam, maiorem proportionem habet, quam 7. ad 22. minorem verò, quam 71. ad 223.

Cvm enim per propoſ. 3. ſit, vt quadratum diametri ad ſuperficiem ſphærę, ita diameter ad circumferentiam: [c] Sit autem maior proportio diametri ad circumferentiam, quam 7. ad 22. ([d] quod minor ſit proportio circumferentię ad diametrum, quam 22. ad 7.) minor verò, quam 71. ad 223. ([e] quod maior ſit proportio circumferentię ad diametrum, quam 223. ad 71.) patet verum eſſe, quod proponitur. c 26. quinti. d 2. de Dimenſ. circuli lib. 4.

PROPOSITIO VI.

PROPORTIO cubi ex circumferentia maximi in ſphæra circuli deſcripti, ad ſphæram maior eſt, quam 298374. ad 5041. minor autem, quam 2904. ad 49.

Cvm enim ſit per propoſ. 1. cap. 7. lib. 4. vt circumferentia maximi circuli in quauis ſphæra, ad circumferentiam maximi circuli in quauis alia ſphęra, ita diameter ad diametrum: [e] habeat autem cubus circumferentię prioris ſphærę ad cubum circumferentię ſphærę poſterioris, proportionem triplicatam circumferentię ad circumferentiam; [f] Item ſphæra prior ad poſteriorem ſphęram, proportionem triplicatam diametri ad diametrum: erit vt cubus ex circumferentia prioris ſphærę deſcriptus ad cubum ex poſterioris ſphærę circumferentia deſcriptum, ita ſphæra prior ad poſteriorem ſphęram; Et permutando, vt cubus circumferentię ſphærę prioris ad priorem ſphęram, ita cubus circumferentiæ poſterioris ſphęrę ad ſphęram poſteriorem. e 33. vndec. f 18. duodec.

IAM verè ſi circumferentia circuli maximi alicuius ſphærę ſit 1. diuidaturque per $3\frac{10}{71}$. producetur diameter $\frac{71}{223}$. maior quam vera, ex coroll. propoſ. 2. de dimenſione circuli. Si igitur eius ſemiſsis $\frac{71}{446}$. in $\frac{1}{2}$. ſemiſſem circumferentiæ ducatur, procreabitur area circuli maximi $\frac{71}{892}$. maior, quē vera: quæ rurſus ducta in $\frac{2}{3}$. diametri inuentę, (quæ etiam maior eſt, quam vera) nimirum in $\frac{142}{669}$. gignet, vt infra in regula 2. oſtendam, ſoliditatem ſphæræ $\frac{10082}{596748}$. hoc eſt $\frac{5041}{298374}$. maiorem tamen, quam veram. [a] Maior ergo erit proportio cubi ex circumferentia 1. deſcripti, qui cubus eſt 1. ad ſphęram, quam ad $\frac{5041}{298374}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{5041}{298374}$. vt 298374. ad 5041. (Quoniam enim ex propoſitione 2. Minutiarum ad finem libr. 9. Euclid. eadem eſt proportio Numeratoris 5041. ad denominatorem 298374. quæ minutię $\frac{5041}{298374}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo, vt 298374. ad 5041. ita 1. ad $\frac{5042}{298374}$.) maior erit proportio cubi ex circumferentia 1. deſcripti, qui cubus eſt 1. ad ſphæram, qaam 298374. ad 5041. Cum igitur ita ſe habeat cubus ex circumferentia maximi circuli in ſphæra ad ſphæram qualibet deſcriptus, vt cubus circumferentiæ 1. ad ſuam ſphæram, vt initio huius propoſ. oſtendimus; Conſtat id, quod primo loco proponitur.

a 8. quinti.

RVRSVS ſi circumferentia 1. diuidatur per $3\frac{1}{7}$. producetur diameter $\frac{7}{22}$. minor quam vera, ex coroll. propoſ. 2. de dimenſione circuli. Si igitur eius ſemiſsis $\frac{7}{44}$. ducatur in $\frac{1}{2}$. ſemiſſem circumferentiæ, procreabitur area circuli maximi $\frac{7}{88}$: minor, quam vera: quę rurſus ducta in $\frac{2}{3}$. diametri inuentę (quæ etiam minor eſt, quam vera) nimirum in $\frac{14}{66}$. hoc eſt in $\frac{7}{33}$. producet, vt infra in regula 2. docebo, ſoliditatem ſphærę $\frac{49}{2904}$. minorem tamen, quam veram. [b] Minor ergo erit proportio cubi ex circumferentia 1. deſcripti, qui cubus eſt 1. ad ſphæram, quam ad $\frac{49}{2904}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{49}{2904}$. vt 2904. ad 49. (Quoniam enim ex propoſ. 2. Minutiarum ad finem libr. 9. Eucl. eadem proportio eſt Numeratoris 49. ad denominatorem 2904. quæ minutię $\frac{49}{2904}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo, vt 2904. ad 49. ita 1. ad $\frac{49}{2904}$.) minor erit proportio cubi deſcripti ex circumferentia 1. qui cubus eſt 1. ad ſphæram, quam 2904. ad 49. Cum igitur ita ſe habeat cubus ex circumferentia maximi circuli ſphærę cuiuslibet deſcriptus, ad ſphæram, vt cubus circumferentiæ 1. ad ſuam ſphęram, vt initio huius propoſitionis demonſtrauimus, patet etiam id, quod ſecundo loco propoſitum erat.

b 8. quinti.

PROPOSITIO VII.

CVBVS diametri ſphæræ ad ſphæram, maiorem proportionem habet, quam 21. ad 11. minorem verò, quam 426. ad 223.

CVM enim ſit, vt cubus diametri cuiuslibet ſphærę ad cubum diametri alterius ſphærę, ita ſphæra ad ſphęram [c]; quod vtraque proportio ſit triplicata proportionis diametrorum; erit permutando, vt cubus diametri cuiuslibet ſphærę ad ipſam ſphęram, ita cubus diametri alterius ſphærę ad ipſam ſphęram.

c 33. vndec. & 18. duodec.

QVOD ſi diameter alicuius ſphærę ponatur 1. multipliceturq; per $3\frac{1}{7}$. [d] proueniet circuli maximi circumferentia $\frac{22}{7}$. maior quam vera. Eius ergo ſemiſsis $\frac{11}{7}$. in $\frac{1}{2}$. ſemiſſem diametri ducta efficiet $\frac{11}{14}$. aream ipſius maximi circuli vera maiorem:

d corol. 2. de Dimenſ. circuli.

iorem: ac proinde ſi hęc area maior, quam vera, ducatur in $\frac{2}{3}$. diametri, gignetur, vt infra in regula 2. dicetur, ſoliditas ſphærę $\frac{22}{42}$. hoc eſt $\frac{11}{21}$. maior quam vera. a Igitur cubus diametri 1. qui eſt 1. ad ſphæram, proportionem habebit maiorem, quam ad $\frac{11}{21}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{11}{21}$. vt 21. ad 11. (Quia enim ex propoſ. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Eucl. eadem eſt proportio Numeratoris 11. ad Denominatorem 21. quæ Minutiæ $\frac{11}{21}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo vt 21. ad 11. ita 1. ad $\frac{11}{21}$.) maior erit proportio cubi 1. ex diametro 1. deſcripti ad ſphæram, quam 21. ad 11. Et quia, vt initio huius propoſitionis oſtendimus, ita eſt cubus diametri cuiuſuis alterius ſphæræ ad ipſam ſphærã, vt cubus diametri 1. ad ſuam ſphæram, verum eſt, quod primo loco eſt propoſitum. a 8. quinti.

b ITEM ſi diameter 1. ducatur in $3\frac{10}{71}$. producetur circumferentia maximi circuli $\frac{223}{71}$. minor quam vera. Eius ergo ſemiſsis $\frac{223}{142}$. ducta in $\frac{1}{2}$. ſemiſſem diametri 1. faciet $\frac{223}{284}$. aream circuli maximi vera minorem; ideoque ſi ea ducatur in $\frac{2}{3}$. diametri 1. procreabitur, vt infra in regula 2. dicetur, ſoliditas ſphæræ $\frac{446}{852}$. hoc eſt, $\frac{223}{426}$. minor, quam vera. c Igitur cubus 1. diametri 1. ad ſphæram habebit proportionem minorem, quam ad $\frac{223}{426}$. Cum ergo ſit 1. ad $\frac{223}{426}$. vt 426. ad 223. (Quia enim ex propoſ. 2. Minutiarum ad finem lib. 9. Euclid. eadem proportio eſt Numeratoris 223. ad denominatorem 426. quæ Minutiæ $\frac{223}{426}$. ad ſuum integrum 1. erit conuertendo, vt 426. ad 223. ita 1. ad $\frac{223}{426}$.) minor erit proportio cubi diametri 1. ad ſuam ſphæram, quam 426. ad 223. Quoniam verò, vt ad initium huius propoſitionis oſtendimus, ita eſt cubus diametri cuiuslibet ſphæræ alterius ad ipſam ſphæram, vt cubus diametri 1. ad ſuam ſphæram, liquet etiam id, quod ſecundo loco propoſitum eſt. b corol. 2. de Dimenſ. circuli. c 8. quinti.

2. HIS præmiſsis, ſequuntur regulę ad inueſtigandam tam ſuperficiem conuexam cuiuslibet ſphæræ, quam eiuſdem ſoliditatem.

I.

SVPERFICIEM conuexam propoſitæ ſphæræ adinuenire.

AREA maximi circuli datæ ſphærę quadruplicetur. Productus enim numerus conuexam ſphærę ſuperficiem exhibebit: propterea quod per propoſ. 31. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & Cylindro, ſuperficies ſphærę quadrupla eſt circuli maximi. *Superficies conuexa ſphæra.*

EADEM ſuperficies procreabitur, ſi diameter ſphęrę in circumferentiam circuli maximi ducatur: propterea quod per propoſ. 2. Num. 2. huius cap. rectangulum ſub diametro, & circumferentia maximi circuli comprehenſum ſuperficiei conuexę ſphęrę eſt ęquale.

II.

SOLIDITATEM propoſitæ ſphæræ exquirere.

1. SPHAERAE ſoliditas producitur ex eius ſemidiametro in tertiam partem ſuperficiei conuexe. Vel ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{2}{3}$. conuexæ ſuperficiei. *Soliditas ſphæra.*

2. ITEM ex duabus tertiis partibus diametri in aream circuli maximi.

3. VEL

3. VEL ex duabus tertiis partibus areæ circuli maximi in totam diametrum.
4. VEL ex ſemidiametro in quatuor tertias partes areæ circuli maximi.
5. VEL ex ſemiſſe areæ circuli maximi in quatuor tertias partes diametri.
6. VEL ex dupla diametro in tertiam partem areæ circuli maximi.
7. VEL ex diametro in 6. partem ſuperficiei ſphæræ.
8. VEL denique ex tertia parte diametri in ſemiſſem ſuperficiei conuexæ ſphæræ.

Demonſtratio primæ partis. PRIMVM demonſtratum à nobis eſt in commentariis in ſphęram, quam demonſtrationem repetemus lib. 7. de Iſoperimetris. Idem tamen aliter hac ratione demonſtrabimus. Concipiatur conus, cuius baſis maximus circulus ſphęrę, & altitudo ſemidiameter eiuſdem. Item alius conus, cuius baſis quadrupla ſit maximi circuli, & altitudo ſemidiameter eadem. Et quia prioris coni tam ſphęra, per propoſ. 32. lib. 1. Archimedis de ſphęra, & cylindro, quadrupla eſt, [a] quam poſterior conus: [b] erunt poſterior conus, & ſphęra inter ſe æquales.

[a] 11. duodec.
[b] 9. quinti.

RVRSVS quia circulus, cuius ſemidiameter ęqualis eſt toti diametro ſphęrę, quadruplus eſt circuli maximi. [c] (cum enim ſit circulus ad circulum, vt quadratum diametri ad quadratum diametri: quadratum autem prioris diametri quadruplum ſit quadrati diametri poſterioris, ex ſcholio propoſ. 4. lib. 2. Eucl. quòd illa diameter ſit huius dupla; quandoquidem ſemiſsis prioris diametri ſumpta eſt poſteriori diametro ęqualis; erit quoque circulus circuli quadruplus.) erit idem circulus, cuius ſemidiameter diametro ſphęrę ęqualis eſt, ęqualis baſi poſterioris coni, cum huius baſis quadrupla etiam poſita ſit maximi circuli. Quia verò etiam ſuperficies ſphæræ quadrupla eſt circuli maximi, ex propoſ. 31. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro: [d] Erunt ſuperficies ſphæræ, baſis poſterioris coni, & circulus ſemidiametrum habens æqualem diametro ſphæræ, inter ſe æquales.

[c] 2. duodec.
[d] 9. quinti.

POSTREMO concipiatur cylindrus, cuius baſis ſit prædictus circulus ſemidiametrum diametro ſphæræ habens æqualem, altitudo verò ſemidiameter ſphæræ. [e] Erit hic cylindrus triplus poſterioris coni prædicti: ac proinde & ſphæræ, quæ ei cono eſt oſtenſa æqualis. [f] Idem autem cylindrus triplus quoque eſt cylindri, qui eandem habeat altitudinem, & baſem tertiæ parti illius cylindri, hoc eſt, tertiæ parti ſuperficiei ſphæræ, æqualem. [g] Ergo poſterior cylindrus, (baſem habens tertiæ parti ſuperficiei ſphæræ æqualem, altitudinem verò ſemidiametro eiuſdem ſphæræ æqualem.) & ſphæra æquales ſunt. Cum ergo cylindrus hic poſterior contineatur ſub ſemidiametro ſphæræ, & tertia parte ſuperficiei ſphæricæ: liquidò conſtat, ſphæræ ſoliditatem gigni ex ſemidiametro in partem tertiam ſuperficiei ſphæræ. Vel ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{2}{3}$. ſuperficiei ſphæræ: cum hic numerus illi ſit æqualis. quod eſt primum.

[e] 10. duodec.
[f] 11. duodec.
[g] 9. quinti.

Demonſtratio ſecundæ partis. CONCIPIATVR rurſum cylindrus, cuius baſis maximus circulus ſphæræ, & altitudo diameter ſphæræ. Erit hic cylindrus ſeſquialter ſphæræ, ex coroll. propoſ. 32. libr. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro. Quod ſi ex parte ſuperiori per tertiam partem diametri ſphæræ, vel axis cylindri, ducatur baſibus cylindri planum parallelum: [h] erit totus cylindrus ad cylindrum abſciſſum, cuius axis duæ tertiæ partes ſunt totius axis, ſeſquialter; Ac proinde poſterior hic cylindrus abſciſſus, qui quidem continetur ſub maximo circulo, nempe ſub ſua baſi, & duabus tertiis partibus diametri ſphæræ, [i] ſphæræ æqualis erit. Patet igitur etiam ſecundum.

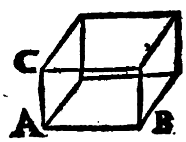
[h] 13. duodec.
[i] 9. quinti.

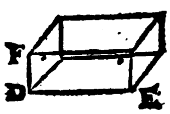
ALI-

ALITER.

SIT parallelepipedum A B C, comprehenſum ſub AC, duabus tertiis partibus diametri ſphærę, & ſub baſi AB, quę circulo maximo eiuſdem ſphærę ſit æqualis. Dico parallelepipedum A B C, ſphærę æquale eſſe. Sit enim aliud parallelepipedum D E F, contentum ſub DF, ſemidiametro ſphærę, & ſub baſe DE, quę tertię parti ſuperficiei ſphærę ſit æqualis. quod vt in prima parte huius 2. regulę demonſtrauimus, æquale erit ſphærę propoſitæ. Quia ergo baſis AB, circulo maximo ſpærę æqualis, eſt $\frac{1}{4}$. ſuperficiei ſphærę; erit ex coroll. propoſ. 1. huius cap. vt AB, hoc eſt, vt $\frac{1}{4}$. ſuperficiei ſphærę ad DE, id eſt, ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem ſuperficiei, ita DF, hoc eſt, ita $\frac{1}{2}$. diametri ſphærę, ad A C, id eſt, ad $\frac{2}{3}$. eiuſdem diametri. Ac proinde cum baſes AB, DE, cum altitudinibus DF, AC, reciprocentur, [a] parallelepipeda ABC, DEF, æqualia inter ſe erunt. Cum ergo DEF, ſphærę æquale ſit, vt dictum eſt, erit quoque ABC, eidem ſphærę æquale. quod eſt propoſitum.

[a] 34. vndec.





ALITER.

QVONIAM ex coroll. propoſ. 1. huius cap. eſt, vt $\frac{1}{4}$. ſuperficiei ſphærę ad $\frac{1}{3}$. eiuſdem ſuperficiei, ita $\frac{1}{2}$. diametri ad $\frac{2}{3}$. eiuſdem diametri: [b] idem numerus efficietur ex primo numero, nimirum ex $\frac{1}{4}$. ſuperficiei, id eſt, ex circulo maximo ſphærę, in quartum, nimirum in $\frac{2}{3}$. diametri, qui ex ſecundo, id eſt, ex $\frac{1}{3}$. ſuperficiei, in tertium, hoc eſt, in $\frac{1}{2}$. diametri. Sed ex $\frac{1}{3}$. ſuperficiei in $\frac{1}{2}$. diametri ſoliditas ſphærę procreatur, vt in prima parte huius 2. regulæ oſtenſum eſt. Igitur eadem ſoliditas ex circulo maximo in $\frac{2}{3}$. diametri gignetur. quod eſt propoſitum.

[b] 19. ſept.

Demonſtratio tertiæ partis.

RVRSVS quia cylindrus, cuius baſis circulus maximus ſphærę, & altitudo diameter eiuſdem, ſeſquialter eſt ipſius ſphærę, ex coroll. propoſ. 32. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro: [c] Idemque cylindrus ſeſquialter etiam cylindri, cuius baſis æqualis ſit duabus tertiis partibus circuli maximi, & altitudo eadem diameter; [d] erunt poſterior hic cylindrus, & ſphæra æquales: hoc eſt, ſphæra producetur ex $\frac{2}{3}$. areæ maximi circuli in diametrum ſphærę. quod eſt tertium.

[c] 11. duodec.
[d] 9. quinti.

Demonſtratio quartæ partis.

CONCIPIANTVR quoque duo parallelepipeda, quorum vnius baſis ſit $\frac{2}{3}$. areæ maximi circuli in ſphæra æqualis, & altitudo toti diametro: alterius verò baſis æqualis ſit $\frac{4}{3}$. areę circuli maximi, & altitudo ſemidiametro. Et quia horum parallelepipedorum baſes cum altitudinibus reciprocantur: quod tam prioris baſis ſubdupla ſit baſis poſterioris, quam altitudo poſterioris altitudinis prioris: [e] erunt ipſa parallelepipeda æqualia. Sed prius, per tertiam partem huius 2. regulę, ęquale eſt ſoliditati ſphęrę. Igitur & poſterius. Ideoque ſphęra producetur ex ſemidiametro in $\frac{4}{3}$. areę circuli maximi. quod quarto loco proponitur.

[e] 34. vndec.

Demonſtratio quintæ partis.

PRÆTEREA concipiantur duo parallelepipeda, quorum vnius baſis ęqualis ſit areę circuli in ſphęra maximi, & altitudo ęqualis $\frac{2}{3}$. diametri: alterius verò baſis ęqualis ſit $\frac{1}{2}$. areę circuli maximi, & altitudo $\frac{4}{3}$. diametri. Et quia horum parallelepipedorum baſes reciprocantur cum altitudinibus; quod tam baſis in priori dupla ſit baſis in poſteriori, quam altitudo in poſteriori altitudinis in

a 34. vndec.

priori: [a] æqualia erunt ipſa parallelepipeda: Sed prius eſt, per 2. partem huius 2. regulæ, æquale ſphærę. Igitur & poſterius: atque idcirco ſphæra gignetur ex $\frac{1}{2}$. areæ circuli maximi in $\frac{4}{3}$. diametri. quod eſt quintum.

Demonſtratio ſextæ partis.

ITEM intelligantur duo parallelepipeda, quorum vnius baſis æqualis ſit $\frac{2}{3}$. areæ circuli maximi in ſphæra, & altitudo diametro: alterius verò baſis æqualis ſit $\frac{1}{3}$. areæ maximi circuli, & altitudo duplæ diametro. Et quia horum parallelepipedorum baſes cum altitudinibus reciprocantur: quod tam baſis in priori ſit dupla baſis in poſteriori, quam altitudo in poſteriori altitudinis in priori: [b] erunt ipſa parallelepipeda æqualia: Sed prius per 3. partem huius 2. regulę, æquale eſt ipſi ſphærę. Igitur & poſterius: Ac proinde ſphæra ex dupla diametro in $\frac{1}{3}$. areæ circuli maximi procreabitur. quod ſexto loco eſt propoſitum.

b 34. vndec.

Demonſtratio ſeptimæ partis.

INTELLIGANTVR quoque duo parallelepipeda, quorum vnius baſis contineat $\frac{1}{3}$. ſuperficiei ſphærę, & altitudo $\frac{1}{2}$. diametri: alterius verò baſis comprehendat $\frac{1}{6}$. ſuperficiei, & altitudo æqualis ſit diametro. Et quoniam baſes cum altitudinibus ſunt reciprocę, quod ita ſit $\frac{1}{3}$. ſuperficiei baſis videlicet prioris parallelepipedi, ad $\frac{1}{6}$. ſuperficiei, id eſt, ad baſem poſterioris, vt altitudo poſterioris, nempe diameter, ad prioris altitudinem, nimirum ad $\frac{1}{2}$. diametri, cum vtraque proportio ſit dupla: [c] ipſa parallelepipeda æqualia erunt: Sed prius ipſi ſphærę, per 1. partem huius 2. regulæ æquale eſt. Igitur, & poſterius: hoc eſt, ſphærę ſoliditas producetur ex diametro in ſextam partem ſuperficiei, quod eſt ſeptimum.

c 34. vndec.

Demonſtratio octaua partis.

DENIQVE concipiantur duo parallelepipeda, quorum vnius baſis ſit $\frac{1}{3}$. ſuperficiei ſphæræ, & altitudo ſemidiameter: alterius autem baſis ſit $\frac{1}{2}$. ſuperficiei, & altitudo $\frac{1}{3}$. diametri. Quia verò baſes, & altitudines reciprocantur, quod ita ſit $\frac{1}{3}$. ſuperficiei ad $\frac{1}{2}$. ſuperficiei, nimirũ baſis prioris parallelepipedi ad baſem poſterioris, vt $\frac{1}{3}$. diametri ad $\frac{1}{2}$. diametri, altitudo videlicet poſterioris parallelepipedi ad altitudinem prioris; [d] æqualia erunt ipſa parallelepipeda. Cum ergo, per 1. partem huius 2. regulæ, prius ſit ſphæræ æquale, eidem quoque poſterius æquale erit: Ac propterea ſphæræ ſoliditas producetur ex tertia parte diametri in ſemiſſem conuexæ ſuperficiei. quod eſt octauum.

d 34. vndec.

3. IAM vero ex propoſ. 4. & 5. huius cap. Num. 1. colliguntur quatuor ſequentes regulæ, per quas ſuperficies ſphæræ conuexa inuenitur tum maior quam vera, tum minor, tam ex circumferentia, quam ex diametro circuli maximi.

I.

EX circumferentia circuli in ſphæra maximi ſuperficiem conuexam ſphęrę procreare vera maiorem.

Superficies ſphæræ maior, quam vera.

FIAT vt 223. ad 71. ita quadratum ex circumferentia maximi circuli data deſcriptum ad aliud, prodibitque ſphæræ ſuperficies maior quam vera. Cum enim per propoſ. 4. huius cap. Num. 1. maior ſit proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi ad ſuperficiem ſphæræ, quam 223. ad 71. ſit autem quadratum datæ circumferentiæ ad numerum procreatum, vt 223. ad 71. habebit quoque quadratum circumferentiæ datæ ad ſuperficiem ſphæræ veram, maiorem

rem proportionem, quàm idem quadratum ad numerum productum: [a] ideoque productus numerus maior erit ſuperficie vera. [a] *10. quinti.*

II.

EX circumferentia circuli in ſphæra maximi ſuperficiem ſphæræ conuexam vera minorem eruere.

FIAT vt 22. ad 7. ita quadratum ex circumferentia maximi circuli data deſcriptum ad aliud. Numerus enim genitus minor erit vera ſuperficie ſphæræ. Cum enim per propoſ. 4. huius cap. Num. 1. minor ſit proportio quadrati circumferentiæ circuli maximi ad ſuperficiem ſphæræ, quam 22. ad 7. Sit autem quadratum datæ circumferentiæ ad numerum genitum, vt 22. ad 7. habebit quoque quadratum datæ circumferentiæ ad ſuperficiem veram ſphæræ, minorem proportionem, quam idem quadratum ad numerum productum. [b] Quam ob rem numerus productus vera ſuperficie ſphæræ minor erit. *Superficies ſphæræ minor quam vera.* [b] *10. quinti.*

III.

EX diametro circuli in ſphęra maximi ſuperficiem ſphærę vera maiorem elicere.

FIAT vt 7. ad 22. ita quadratum diametri datæ circuli maximi ad aliud, gigneturque ſuperficies ſphæræ maior, quam vera. Nam cum, per propoſ. 5. huius cap. Num. 1. maior ſit proportio quadrati diametri circuli maximi ad ſuperficiem ſphæræ veram, quam 7. ad 22. Sit autem quadratum diametri datæ ad productum numerum, vt 7. ad 22. habebit quoque quadratum datæ diametri ad ſuperficiem veram ſphærę, maiorem proportionem, quam idem quadratum ad productum numerum. [c] Quocirca procreatus numerus maior erit, quam vera ſuperficies ſphærę. *Superficies ſphæræ maior quam vera.* [c] *10. quinti.*

IIII.

EX diametro circuli in ſphæra maximi ſuperficiem ſphærę vera minorem colligere.

FIAT vt 71. ad 223. ita quadratum datæ diametri circuli maximi ad aliud. Numerus namque genitus ſuperficiem ſphæræ vera minorem exhibebit. Quoniam enim per propoſ. 5. huius cap. Num. 1. minor eſt proportio quadrati diametri ad ſuperficiem ſphærę, quam 71. ad 223. Eſt autẽ quadratum datæ diametri ad productum numerum, vt 71. ad 223. Erit quoq; minor proportio quadrati datæ diametri ad veram ſuperficiem ſphærę quam eiuſdem quadrati ad numerum productum. [d] Quapropter minor erit productus numerus, quam vera ſuperficies ſphærę. *Superficies ſphæræ minor, quam vera.* [d] *10. quinti.*

4. PARI ratione ex propoſ. 6. & 7. huius cap. Nũ. 1. eliciuntur quatuor aliæ ſequentes regulę, per quas tam ex circũferentia, quam ex diametro maximi circuli in ſphæra, eruitur ſoliditas ſphærę tum maior, quam vera, tum minor.

I.

EX circumferentia circuli maximi in ſphæra ſoliditatem ſphæræ producere vera maiorem.

Soliditas ſphæræ maior, quã vera.

FIAT vt 298374. ad 5041. ita cubus ex data circumferentia maximi circuli deſcriptus ad aliud. Numerus enim genitus dabit ſphærę ſoliditatem vera maiorem. Nam cum, per propoſ. 6. huius cap. Num. 1. maior ſit proportio cubi datæ circumferentiæ ad ſphæram, quam 298374. ad 5041. Sit autem cubus datę circumferentię ad numerum procreatum, vt 298374. ad 5041. habebit quoque cubus datę circumferentię ad ſphærę ſoliditatem veram, maiorem proportionem, quam idem cubus ad productum numerum: [a] Ideoque productus numerus maior erit, quam vera ſoliditas ſphærę.

[a] 10. quinti.

II.

EX circumferentia circuli maximi in ſphæra ſoliditatem ſphærę vera minorem procreare.

Soliditas ſphæræ minor, quã vera.

FIAT, vt 2904. ad 49. ita cubus datę circumferentiæ ad aliud. Nam productus numerus offeret ſphærę ſoliditatem vera minorem. Cum enim per propoſ. 6. huius cap. Num. 1. minor ſit proportio cubi circumferentiæ datę ad ſphęram, quam 2904. ad 49. ſit autem cubus datę circumferentię ad numerum procreatum, vt 2904. ad 49. habebit quoque cubus datę circumferentiæ ad veram ſoliditatem ſphæræ, minorem proportionem, quàm idem cubus ad numerum productum. [b] Ideoque numerus productus minor erit vera ſoliditate ſphæræ.

[b] 10. quinti.

III.

EX diametro maximi circuli in ſphęra ſoliditatem ſphærę colligere vera maiorem.

Soliditas ſphæræ maior, quã vera.

FIAT vt 21. ad 11. ita cubus diametri datæ ad aliud. Procreatus namque numerus ſoliditatem ſphæræ dabit vera maiorem. Cum enim per propoſ. 7. huius cap. Num. 1. maior ſit proportio cubi diametri ſphæræ ad ſphæram, quàm 21. ad 11. Sit autem cubus datæ diametri ad numerum productum, vt 21. ad 11. habebit quoque maiorem proportionem cubus datæ diametri ad veram ſoliditatem ſphæræ, quam idem cubus ad numerum genitum. [c] Quapropter numerus procreatus maior erit vera ſoliditate ſphæræ.

[c] 10. quinti.

IIII.

EX diametro maximi circuli in ſphæra ſoliditatem ſphæræ concludere vera minorem.

Soliditas ſphæræ minor, quã vera.

FIAT vt 426. ad 223. ita cubus datę diametri ad aliud. Numerus enim proueniens minor erit, quàm vera ſoliditas ſphærę. Nam cum per propoſ. 7. huius

cap.

cap. Num. 1. minor ſit proportio cubi datæ diametri ad ſphæram, quàm 426. ad 223. Sit autem cubus diametri datæ ad procreatum numerum, vt 426. ad 223. habebit quoque cubus datæ diametri ad ſphæram, proportionem minorem, quàm idem cubus ad numerum genitum. ª Quare minor erit numerus productus, quàm vera ſoliditas ſphæræ.

ª *10. quinti.*

DE AREA SEGMENTOrum ſphæræ.

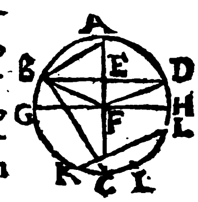
CAPVT VI.

Superficies cõuexa Hemiſpherii.

1. H*EMISPHERII ſuperficies conuexa, excluſa baſe, gignitur ex area maximi circuli per 2. multiplicata. Vel ex ſemidiametro in circumferentiã maximi circuli. Vel denique ex tota diametro in ſemiſſem circumferentiæ maximi circuli.* Quæ omnia perſpicua ſunt ex 1. regula Num. 2. capitis 5. propterea quod hi numeri producti ſunt ſemiſſes illorum, qui ſuperficiem conuexam totius ſphęræ in ea regula exhibuerunt.

Superficies cõuexa portionis ſphæræ.

2. *SVPERFICIES conuexa cuiuſlibet portionis ſphæræ hemiſpherio minoris, vel maioris, dempta baſe, æqualis eſt circulo, cuius ſemidiameter æqualis eſt recta linea, quæ à vertice portionis ad circumferentiam baſis ducitur. ex propoſ. 40. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro.* Sit enim maximus in ſphęra circulus ABCD, cuius diameter AC, quàm in E, ad angulos rectos ſecet B D, recta, per quam intelligatur duci planum diametro ad angulos rectos, ſecans ſphæram in duas portiones, quarum baſis communis circulus diametri BD, & A, vertex minoris portionis, maioris autem vertex C. Iunctis autem rectis AB, CB; erit circulus ſemidiametri A B, ſuperficiei conuexæ minoris portionis, & circulus ſemidiametri C B, conuexę ſuperficiei maioris portionis ęqualis, ex dicta propoſ. Archimedis. Quare ſi vtraque AB, CB, in partibus diametri A C, fiat nota, præſertim ope inſtrumenti partium cap. 1. lib. 1. conſtructi, & areę circulorum ad interualla ſemidiametrorum AB, CB, deſciptorum inueſtigentur, per ea, quę lib. 4. capit. 7. ſcripſimus; notæ erunt ſuperficies conuexæ dictarum portionum ſphęræ.



EADEM ſuperficies conuexa portionis ſphærę hemiſphęrio minoris, vel maioris, ita quoque cognoſcetur. Ex demonſtratis ab Archimede propoſ. 3. lib. 2. de ſphęra, & cylindro, eandem proportionem habet EC, ad EA, quam ſuperficies conuexa portionis ſphęræ baſem habentis circulum diametri BD, & verticẽ C, ad ſuperficiem conuexam portionis baſem habentis eundem circulum diametri BD, & verticem A. Igitur componendo quoq; erit, vt tota diameter AC, ad AE, ita ſuperficies conuexa totius ſphæræ ad ſuperficiem cõuexam portionis B A D. Eademq; ratione erit, vt tota diameter AC, ad EC, ita conuexa ſuperficies totius ſphęræ ad ſuperficiem conuexam portionis BCD. Quo circa inueſtigata proportione diametri A C, ad ſegmenta AE, EC, per inſtrumentum partium cap. 1. lib. 1. conſtructum; ſi fiat, vt diameter AC, ad AE, ita ſuperficies conuexa totius ſphęræ, (quæ ex regula 1. Nume. 2. cap. 5. huius lib. cognita fiet) ad aliud,

proueniet conuexa ſuperficies portionis minoris B AD. Similiq; modò ſuperficies conuexa maioris portionis B C D, cognoſcetur; ſi fiat, vt diameter A C, ad EC, ita ſuperficies conuexa totius ſphæræ ad aliud.

Et quia, vt ex Archimede oſtendimus, ita eſt diameter A C, ad A E, vel ad EC, vt tota ſuperficies ſphæræ ad ſuperficiẽ portionis BAD, vel BCD: erit quoque ita AF, ſemiſsis diametri ad AE, vel EC, vt hemiſphęrij ſuperficies GAH, ad ſuperficiem portionis B A D, vel B C D, quod oſtendetur eodem modo, quo ſcholium propoſ. 22. lib. 5. Euclid. eſt demonſtratum: Si fiat, vt ſemidiameter ſphæræ A F, ad A E, vel E C, altitudinem portionis, ita hemiſphęrij G A H, ſuperficies ad aliud; producetur rurſus conuexa ſuperficies portionis minoris B-AD, vel maioris BCD.

a corol. 19. quinti. Immo cum ſit vt AF, ſemidiameter ad AE, ita hemiſphęrij GAH, ſuperficies ad ſuperficiem portionis BAD, [a] erit per conuerſionem rationis, vt AF, ſemidiameter ad EF, ita ſuperficies hemiſphęrij GAH, ad ſuperficiem fruſti GBDH, demptis baſibus. Ergo EF, eadem pars erit, vel partes diametri A C, vel ſemidiametri AF, quæ pars eſt, vel partes ſuperficies fruſtri GBDH, demptis baſibus, ſuperficiei totius ſphęræ, vel hemiſphærij GAH. Quam ob rem cognito, quæ pars ſit EF, vel partes ſemidiametri AF, ſi ex ſuperficie hemiſphærij G A H, eadẽ pars auferatur, vel partes, reliqua fiet ſuperficies conuexa minoris portionis B A D. Et ſi ad hemiſphærij GCH, ſuperficiem adijciatur eadem pars, vel partes, conflabitur conuexa ſuperficies portionis maioris BCD. Verbi gratia, ſi E F, contineat $\frac{2}{5}$. ſemidiametri AF, & ex ſuperficie hemiſphærij G A H, tollantur $\frac{2}{5}$. reliqua fiet ſuperficies conuexa portionis minoris BAD: Et ſi $\frac{2}{5}$. ſuperficiei hemiſphærij adijciantur ad ſuperficiẽ hemiſpherij GCH, cõficietur ſuperficies cõuexa maioris portionis BCD. Sic ſi EF, eſſet ſemiſsis ſemidiametri, auferenda eſſet ex hemiſphærij ſuperficie ſemiſsis ipſius, vel adijcenda: Et ſic de cæteris.

Soliditas hemiſphærij. 3. Hemisphærii ſoliditas producitur ex ſemidiametro in tertiam partem ſuperficiei hemiſphærij: Vel in ſextam partem ſuperficiei totius ſphæræ. Vel ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{2}{3}$. ſuperficiei hemiſphærij.

Item ex duabus tertijs partibus diametri in ſemiſſem areæ circuli maximi.

Vel ex duabus tertijs partibus areæ circuli maximi in ſemidiametrum: Aut ex tertia parte areæ circuli maximi in totam diametrum.

Vel ex $\frac{1}{4}$. totius diametri in $\frac{4}{3}$. areæ circuli maximi.

Vel ex ſemiſſe areæ circuli maximi in $\frac{2}{3}$. diametri.

Vel ex dupla diametro in $\frac{1}{6}$. areæ circuli maximi.

Vel ex ſemidiametro in ſextam partem ſuperficiei ſphęræ.

Vel denique ex $\frac{1}{6}$. diametri in ſuperficiem hemiſphærij conuexam. quæ omnia ex 2. regula Num. 2. cap. 5. colliguntur: cum omnes hi numeri producti ſint ſemiſſes illorum, qui ſoliditatem totius ſphæræ in ea regula indicant.

Soliditas ſectoris ſphæræ. 4. Soliditas ſectoris ſphęræ (qui nimirum componitur ex minore portione ſphęræ, & cono baſem habente eandem cum portione, & altitudinem æqualem perpendiculari ex centro in baſem portionis deductæ; Vel qui relinquitur, ſi idem conus ex portione maiore ſubtrahitur. Vt in proxima figura, ſolidũ compoſitum ex portione ſphęræ B A D, baſem habente circulum diametri B D, & ex cono habente eandem baſem, & verticem in centro F: Item ſolidũ, quod relinquitur, ſi conus idem ex portione maiore B C D, dematur, appellamus ſectorem

ctorem ſphæræ.) hac ratione inueſtigabitur. Quoniam per propoſ.42.lib.1.Archimedis de ſphęra & cylindro, ſectori ſphęræ ęqualis eſt conus baſem habens circulum ęqualem ſuperficiei conuexæ portionis ſphęræ, altitudinem verò ſemidiametro ſphęræ ęqualem: Conus autem producitur, vt c.2. huius lib. Nu. 1. declarauimus, vel ex baſe in $\frac{1}{3}$. altitudinis: Vel ex tota altitudine in $\frac{1}{3}$. baſis; fit vt ſector ſphęræ gignatur vel ex ſuperficie conuexa portionis ſphęræ in $\frac{1}{3}$. ſemidiametri, hoc eſt, in $\frac{1}{6}$. totius diametri: Vel ex ſemidiametro in $\frac{1}{3}$. ſuperficiei conuexæ portionis ſphæræ.

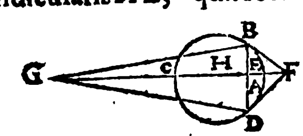
Soliditas cuiuslibet portionis ſphæra.

5. SOLIDITAS verò cuiuſcunque portionis ſphęræ hoc modo procreabitur. Inueſtigetur ſoliditas ſectoris ſphæræ, vt proximè traditum eſt. Nam ſi, quando portio propoſita minor eſt hemiſphærio, ex hoc ſectore dematur conus eandem habens cum portione baſem, altitudinem verò perpendicularem ex centro ſphęræ in baſem portionis cadentem, reliqua fiet ſoliditas portionis minoris: At verò ſi, quando portio propoſita hemiſphęrio maior eſt, idem conus ad ſectorem adijciatur, conflabitur ſoliditas portionis maioris. Id quod perſpicuum eſt in ſuperiori figura, cum conus BFD, ablatus ex ſectore ABFDA, reliquam faciat portionem minorem BAD: Idem vero conus BFD, additus ſectori CBFDC, conſtituat maiorem portionem BCD. Conus porrò prædictus BFD, cognitus fiet ex baſe, nimirum ex circulo diametri BD, & altitudine EF, cognitis, vt cap.2. huius lib. Num.1. docuimus.

ALITER.

SIT in ſphæra circulus maximus ABCD, & portiones ſphęræ, quarum baſis communis circulus diametri BD, & vertices A, C, quarum ſoliditates exquirendæ ſunt. Ex centro H, ducatur ad BD, perpendicularis HE, [a] quæ rectã BD, ſecabit biſariam, [b] ac proinde & vtrumque arcum BAD, BCD, biſariam, hoc eſt, per vertices A, C, tranſibit. [c] Fiat, vt CE, ad ſummam rectarum CH, CE, ita AE, ad EF: Item, vt AE, ad ſummam rectarum AH, AE, ita EC, ad EG. Intelliganturque duo coni, quorum baſis communis circulus diametri BD, & vertices F, G. Erit per propoſ. 2.lib.2. Archimedis de ſphæra, & cylindro, conus BFD, portioni minori BAD, & conus BGD, portioni maiori BCD, æqualis. Quocirca, inuentis horum conorum ſoliditatibus, vt cap.2. huius lib. Numer.1. traditum eſt inuentę quoque erunt ſoliditates portionum BAD, BCD. quod eſt propoſitum.

a 3. tertij. b ſchol. 27. tertij. c 12. ſexti.



Soliditas cuiuslibet fruſti ſphæra.

6. SOLIDITAS denique cuiuſcunque fruſti ſphęrę, ſiue baſes ſint parallelę, cuiuſmodi eſt in 1. figura huius cap. fruſtum BDHG, inter circulos diametrorum BD, GH, incluſum, ſiue non parallelę, quale eſt fruſtum BDLK, hoc pacto inuenietur. Inueſtigetur, vt Num.5. diximus, vtriuſque portionis ABD, AGH, ſoliditas. Minori enim detracta ex maiore, reliqua erit ſoliditas fruſti BDHG. Sic etiam, inuento I, vertice portionis KIL, ſi inueniatur ſoliditas vtriuſque portionis BCD, KLI, minorque ex maiore tollatur, remanebit ſoliditas fruſti BDLK, nota.

DE

DE AREA SPHÆROIDIS, EIVSDEMque portionum.

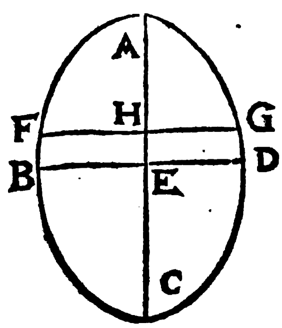
CAPVT VII.

1. SIt Ellipſis ABCD, cuius maior axis AC, minor B D, priorem ad angulos rectos ſecans. Soliditatem ergo Sphæroidis, id eſt, ſolidi ex circumuolutione Ellipſis circa axem effecti, ita nanciſcemur. Quoniam planum per BD, ductum, & rectum ad axem AC, circulum facit, vt à Federico Commandino ad propoſ.12. lib. Archimedis de Conoidibus, & Sphæroidib. demonſtratur. cuius diameter BD, & centrum E; erit per propoſ.29. lib. Archimedis de Conoid. & Sphæroid. ſemiſsis Sphæroidis A B D, dupla coni eandem baſem cum illa ſemiſſe, circulum videlicet diametri B D, habentis, & altitudinem eandem E A. Igitur ſi huius coni ſoliditas per capit. 2. huius lib. inueſtigetur, & duplicetur, exurget ſoliditas ſemiſsis Sphæroidis; quæ duplicata ſoliditatem totius Sphęroidis exhibebit.

Soliditas Sphæroidis.

2. DVCATVR minori axi B D, parallela F G, ſecans maiorem axem in H, ad rectos angulos. Si igitur per FG, ducatur planum rectum ad axem, fiet circulus in Sphæroide diametrum habens F G, & centrum H, vt Federicus Commandinus ad propoſ.12. lib. Archim. de Conoid. & Sphæroid. demonſtrauit; abſcindenturque portiones Sphæroidis F A G, minor & FCG, maior. Vtriuſq; ſoliditas ita fiet cognita. Quoniam per propoſ.31. libri Archimedis de Conoid. & Sphęroid. Conus, cuius baſis circulus diametri FG, & axis H A, ad minorem portionem ſphęroidis F A G, proportionẽ habet, quam maioris portionis axis HC, ad ſummam rectarum EC, HC: Si fiat, vt HC, maioris portionis axis ad ſummam rectarum E C, H C, ita conus prædictus ad aliud, (qui quidem conus ex cap.2. huius libri cognitus erit.) prodibit ſoliditas minoris portionis ſphęroidis FAG.

Soliditas portionum Sphæroidis.



RVRSVS quia per propoſ.33. libri Archim. de Conoid. & Sphæroid. conus, cuius baſis circulus diametri F G, & axis H C, ad maiorem portionem Sphęroidis FCG, proportionem habet, quam minoris portionis axis HA, ad ſummam rectarum EA, HA: ſi fiat, vt H A, minoris portionis axis ad ſummam rectarum EA, HA, ita prædictus conus (quem per cap.2. huius lib. metieris) ad aliud, procreabitur ſoliditas maioris portionis ſphęroidis FCG.

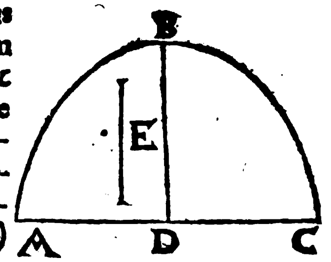
DE AREA CONOIDIS parabolici.

CAPVT VIII.

Soliditas Conoidis Parabolici.

1. SIt Parabola A B C, cuius axis B D, ad baſem A C, rectus. Soliditatem igitur Conoidis parabolici, quod parabola circa axem circumducta efficit, ita metiemur. Quoniam per ea, quæ ad propoſ.12. libri Archim. de Co-

de Conoid. & Sphæroid. Federicus Commandinus demonſtrauit, planum per AC, ductum, & rectum ad axem BD, circulum facit, cuius diameter A C, & centrum D: erit per propoſ. 23. libri Archim. de Conoid. & Sphæroid. Parabolicum Conoides A-BC, ſeſquialterum coni, cuius baſis circulus diametri AC, & axis BD. Igitur ſi fiat, vt 2. ad 3. ita prædictus conus (quem ex cap. 2. huius libri metiemur) ad aliud; proſiliet ſoliditas Conoidis Parabolici A-BC.



DE AREA CONOIDIS Hyperbolici.

CAPVT IX.

Soliditas Conoidis Hyperbolici.

CONCIPIATVR ſuperior figura eſſe Hyperbola, & recta E, æqualis ſemiſsi diametri tranſuerſæ inter duas hyperbolas oppoſitas, hoc eſt, rectæ ex centro hyperbolarum ad verticem B, ductæ. Fietque rurſus circulus, cuius diameter A C, à plano per AC, ducto, & ad axem recto, vt Federicus Commandinus ad propoſ. 12. libri Archim. de Conoid. & Sphæroid. demonſtrauit. Soliditatem igitur Conoidis Hyperbolici, quod ab hyperbola ABC, circa axem BD, circumuoluta efficitur, ita venabimur. Quoniam per propoſ. 27. lib. Archimedis de Conoid. & Sphæroid. Conoides Hyperbolicum A-BC, ad conum, cuius baſis eadem cum baſe Conoidis, circulus videlicet diametri AC, & axis idem B D, proportionem habet eandem, quam linea conflata ex axe B D, & tripla ipſius E, ad lineam conflatam ex axe BD, & dupla ipſius E. Si fiat, vt linea conflata ex axe B D, & dupla ipſius E, ad lineam conflatam ex axe BD, & tripla ipſius E, ita prædictus conus (quem ex cap. 2. huius libri dimetiemur) ad aliud; gignetur ſoliditas Conoidis Hyperbolici ABC.

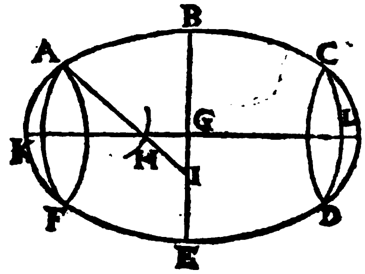
DE AREA DOLIORVM.

CAPVT X.

Capacitas dolii.

QVONIAM dolia non eandem formam vbiq; ſeruant, vix præſcribi poteſt ratio, qua dolij propoſiti capacitas accurate inueniatur. Argumento eſt, quod ſcriptores variè de eius Dimenſione ſcripſerunt. Dicam ergo etiam ego id, quod mihi veriſimile videtur. Sit dolium ABCDEF, in extremitatibus habens circulos AF, CD, orificium B, per quod cogitetur planum ductum rectum ad lineam KL, centra circulorum AF, CD, coniungentem, ſecans dolium bifariam. Si igitur aſſeres dolij in B, & E, curuentur, & deinde ſecundum lineas quaſi rectas extendantur, cuiuſmodi dolia non pauca Romæ vidi:

referent ſemiſſes dolij ABEF, CDEB, conos decurtatos: quos ſi per ea, quæ c. 3. huius libri ſcripta ſunt, metieris, dabit eorum ſumma dolij propoſiti capacitatem. Memor tamen eſto, profunditatem dolij B E, & diametrum circuli A F, menſurandam eſſe intra aſſeres, ita, vt eorum craſsities excludantur; vt habeatur decurtatus conus, cuius baſes ſint circuli BE, AF, &c.



2. Si vero aſſeres dolij verè ſint aliquo modo circulares, quod nonnulli aſſerunt, concipiendum erit dolium, tanquam fruſtum quoddam Sphæroidis. Nã curuitas aſſerum ſenſibiliter à curuitate Sphæroidis, cuius axes ſunt rectæ KL, BE, non different. Sed quia ſolum axis minor nimirum profunditas dolij, data eſt, reperiemus ex puncto A, in Ellipſi dato, maiorem axem KL, hoc modo. Interuallo ſemiſsis minoris axis B G, deſcribatur ex A, arcus ſecans in H, rectam G H, ad angulos rectos ipſi minori axi per eius punctum medium G, ductam: & ex A, per H, recta emittatur ſecans minorem axem in I. Recta enim A I, dabit ſemiſſes G K, G L, maioris axis, vt lib. 1. noſtri Aſtrolabij in ſcholio Lemmatis 50. demonſtrauimus. Itaq; ſi tam ſemiſsis ſphæroidis BKE, quam portio minor AKF, menſuretur, vt cap. 7. traditum eſt, & ſoliditas portionis AKF, ex ſoliditate ſemiſsis BKE, detrahatur, remanebit capacitas ſemiſsis dolij ABEF, quæ duplicata totius dolij capacitatem exhibebit. Vtramque hanc rationem dolij dimetiendi à vera dolij capacitate non longè abeſſe arbitror. Paratus tamen interim ſum, ſi quis accuratiorem inuenerit, eam libenti animo, & grato acceptare.

Capacitas dolij alio modo.

DE AREA CORPORVM omnino irregularium.

CAPVT XI.

1. TRADVNT ſcriptores nonnulli regulam quandã mechanicam ad corpora dimetienda, quæ omnino ſunt irregularia, ita vt ſub regulas Geometricas, quæ hactenus explicatæ ſunt, cadere non poſsint: cuiuſmodi ſunt ſtatuæ, vrnæ, amphoræ, fruſta ſaxorum, quæ neque vniformis ſunt craſsitiei, neque latera habent prorſus recta, aut ad baſes perpendicularia, &c. Hæc ergo regula, quæ nullo modo videtur aſpernanda, ita ſe habet.

Soliditas cuiuslibet corporis irregularis.

PARETVR arca lignea ex aſſeribus leuigatis, inſtar parallelepipedi cuiuſdã, quæ pice ita oblinatur, vt aquam continere poſsit. Arca hæc tantæ debet eſſe longitudinis, latitudinis, atq; altitudinis, vt corpus metiendum intra ipſam poſitum, aqua totum poſsit operiri. Poſita autem hac arca Horizonti æquidiſtante, beneficio libellæ, aut perpendiculi, infundatur in eam tantũ aquæ, quantum ſatis eſt, vt corpus impoſitum omnino tegat, notenturque diligenter ſuprema

latera

latera aquæ in aſſeribus arcæ, vt habeatur altitudo aquæ vſque ad arcæ fundũ. Extracto deinde corpore, ita tamen, vt nihil aquæ extra arcam cadat, notentur rurſum latera aquæ, poſtquam quieuerit. Quod ſi per cap. 1. huius lib. metiamur duo parallelepipeda, quorũ baſis communis eſt arcæ fundus, ſiue baſis, altitudines vero rectæ à lateribus aquæ notatis vſque ad baſem, & minus à maiore ſubtrahamus, relinquetur parallelepipedũ ſoliditati corporis propoſiti omnino æquale. quod parallelepipedũ etiam conſequeris, ſi altitudinem inter latera aquæ bis notata duces in baſem arcæ. Sunt, qui infuſa aqua in arcam, latera eius in aſſeribus primo loco notent. Deinde impoſito corpore, eiuſdem aquæ latera ſignent. Si enim altitudo inter poſteriora latera, ac priora ducatur in baſem arcæ, producetur ſoliditas corporis impoſiti.

2. Pro vrnis, atque amphoris, ſiue eæ lapideæ ſint, ſiue cretaceæ, ita faciemus. Impleatur vas arena, & eius orificium ita obturetur, vt aqua ingredi nullo modo poſsit. Impoſito deinde vaſe in aqua intra arcam contenta, ac ſi eſſet corpus quodpiam irregulare, inueſtigetur eius ſoliditas, vt Num. 1. diximus. Deinde extracta arena, notentur latera aquæ, antequam vas vacuum imponatur. Impoſito denique vaſe vacuo, ſignentur iterum latera aquæ. Si namque altitudo inter poſteriora, ac priora latera multiplicetur per baſem arcæ: procreabitur ſoliditas ſolius vaſis: quæ detracta ex priori ſoliditate, notam relinquet vaſis capacitatem.

DE SVPERFICIE CONVEXA coni & cylindri recti.

CAPVT XII.

1. QVONIAM ex Archimede demonſtrauimus, qua ratione ſuperficies conuexa, ſphæræ eiuſque portionum inueſtiganda ſit: non deerit fortaſſe, qui idem deſideret in cono, ac cylindro recto. quod ex ijs, quæ ab eodem Archimede in lib. 1. de ſphæra, & cylindro demonſtrata ſunt, obtinebit hoc modo. Propoſito cono recto quocunque, erit eius ſuperficies conuexa conica, ſecluſa baſe, æqualis circulo, cuius ſemidiameter eſt linea media proportionalis inter latus coni, & ſemidiametrum baſis eiuſdem coni, ex propoſ. 14. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro. *Superficies conica, dempta baſe, cui circulo ſit æqualis.*

2. QVOD ſi conus rectus ſecetur plano, quod baſi æquidiſtet, erit ſuperficies conuexa fruſti coni, demptis baſibus, æqualis circulo, cuius ſemidiameter eſt linea media proportionalis inter latus conicum fruſti, & rectam ex ſemidiametris duarũ baſium cõflatã, ex ꝓpoſ. 16. lib. 1. Archime. de ſphæra, & cylindro. *Superficies fruſti coni, demptis baſibus, cui circulo æqualis ſit.*

ITEM ſuperficies conica coni recti ad ſuam baſem, proportionẽ habet eandem, quam latus coni ad ſemidiametrum baſis coni eiuſdem, ex propoſ. 15. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro. *Proportio conicæ ſuperficiei ad ſuam baſem.*

4. DENIQVE ſuperficies conuexa cylindri recti, demptis baſibus, æqualis eſt circulo, cuius ſemidiameter eſt linea media proportionalis inter latus cylindri, & diametrũ baſis cylindri eiuſdem, ex propoſ. 13. lib. 1. Archimedis de ſphæra & cylindro. *Superficies cylindrica, demptis baſibus, cui circulo ſit æqualis.*

FINIS LIBRI QVINTI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER SEXTVS.

In quo de Geodæſia, & de figuris augendis, minuendiſque in data proportione: Item de duarum mediarum proportionalium inter duas datas rectas inuentione: Ac denique de radicum extractione agitur.

EXPEDITIS iis, quæ de magnitudinum dimenſionibus initio propoſuimus, reſtat vt de rectilinearũ ſuperficierum etiam diuiſione agamus: quæ Geometrię practicæ pars proprio nomine Geodæſia vocatur. Nã *δαίω* idem ſignificat, quod partior, vel diuido. Scio pleroſque partem etiam illam, quæ magnitudines, & terram metitur, appellare Geodæſiam; Sed hi, auctore Pediaſimo de menſuratione & partitione terræ, longè à veritate aberrant. ***Nam, inquit, terra menſuratio duas in partes diuiditur, Geometriam ſcilicet, & Geodaeſiam. Area namque ſecundum artem menſuratio, & terræ menſuratio eſt, & merito Geometria vocatur. vnius vero, & eiuſdem area, ſeu loci diuiſio inter diuerſas perſonas, partitio quadam eſt terra, & iure optimo Geodaeſia appellatur.*** Hæc Pediaſimus.

Geometria & Geodęſia quid.

EDIDIT quidem Federicus Commandinus anno 1570. libellũ de ſuperficierum diuiſionibus Machometo cuidam Bagdedino Arabi adſcriptum: ipſeque eadem de re alium breuiorem, & magis vniuerſalem conſcripſit: eſtque ſanè libellus vterque acutiſſimus, & eruditione re-

ne refertiſſimus. Idem verò poſtea argumentum alia via aggreſſus eſt, & meo certè iudicio, faciliori & magis generali, Simon Steuinius Brugenſis: ſed in qua aliquid deſiderari videatur, vt omnibus ſuperficiebus rectilineis (quod ipſe velle videtur) conuenire poſſit. quod facilè iudicabunt, qui illius problemata Geometrica attentè perlegerint. Res enim propoſita nulla ratione confici poteſt, niſi prius duæ propoſitiones demonſtrentur, quarum priorem ipſe ſine demonſtratione aſſumit pro principio, poſterioris verò ne meminit quidem, cum tamen admodum ſit neceſſaria, & quam Machometus Bagdedinus demonſtrauit, paulò aliter, quam nos. Has ergo duas propoſitiones ad initium huius lib. demonſtrabimus, & poſteriorem quidem longè generalius, quam à Machometo factum eſt. quod beneuolo Lectori iudicandum relinquo. Deinde ſuperficierum rectilinearum diuiſionem aggrediemur, inſiſtentes eiuſdem Steuinii veſtigiis, niſi quando generalius rem oportebit demonſtrare. Nihil autem de ratione Machometi, & Federici Commandini dicemus: tum quia libellus ipſorum in manibus omnium eſt, ac propterea eum, quicunque volet, legere poterit: tum quia propoſita aliqua figura multorum angulorum, non ſine difficultate, ac labore eam ſtudioſus diuidet, niſi diuiſionis omnium præcedentium figurarum memor ſit, quod in noſtra ratione non accidit: tum denique quia illorum ratio ſolum figuris ordinariis conuenit, quæ videlicet omnes angulos habent introrſum, tot nimirũ, quot latera figura ipſa continet, noſtra autem via figuras etiam illas complectitur, quæ angulos habent partim introrſum, & partim extrorſum vergentes.

THOREMA I. PROPOSITIO I.

SI magnitudo in quotuis partes ſecetur vtcunque, & alia quæpiam magnitudo in totidem partes ordine illis proportionales: habebunt quotlibet partes prioris magnitudinis ſimul ad reliquas omnes partes ſimul eandem proportionem, quam totidem partes poſterioris magnitudinis ſimul ad reliquas omnes partes ſimul. Et ſi quælibet pars prioris magnitudinis ſecetur in duas partes vtcunque, ſecetur autem & pars poſterioris magnitudinis illi parti reſpondens in alias duas partes duabus illis proportionales: erunt quoque ibidem totæ magnitudines ſectæ proportionaliter.

SIT magnitudo AB, ſecta in quotuis partes vtcunque AC, CD, DE, EF, FB: & alia magnitudo qualiſcunque GH, etiamſi diuerſi ſit generis, ſecta in

totidem partes GI, IK, KL, LM, MH, illis ordine proportionales. Dico ita eſſe, verbi gratia, duas partes AC, CD, ſimul ad reliquas tres DE, EF, FB, ſimul, vt ſunt duæ GI, IK, ſimul ad reliquas tres KL, LM, MH, ſimul, &c. Quoniam enim eſt, vt AC, ad CD, ita GI, ad IK, erit componendo etiam, vt AD, ad CD, ita GK, ad IK: Vt autem CD, ad DE, ita eſt IK, ad KL. Igitur ex æqualitate erit, vt AD, ad DE, ita GK, ad KL.

RVRSVS quia conuertendo eſt, vt BF, ad FE, ita HM, ad ML; erit quoque componendo, vt BE, ad FE, ita HL, ad ML: Vt autem FE, ad ED, ita eſt ML, ad LK. Igitur ex æqualitate erit, vt BE, ad ED, ita HL, ad LK; & com-



ponendo, vt BD, ad ED, ita HK, ad LK; & conuertendo, vt DE, ad DB, ita KL, ad KH. Itaque cum oſtenſum ſit, eſſe vt AD, ad DE, ita vt GK, ad KL, & vt DE, ad DB, ita KL, ad KH; erit ex æqualitate, vt AD, ad DB, ita GK, ad KH.

NON aliter oſtendemus eſſe, vt AC, ad CB, ita GI, ad IH. Nam rurſus conuertendo, componendo, & ex æqualitate erit vt BC, ad DC, ita HI, ad KI; & conuertendo, vt CD, ad CB, ita IK, ad IH. Cum ergo ſit, vt AC, ad CD, ita GI, ad IK, & vt CD, ad CB, ita IK, ad IH; erit ex æqualitate, vt AC, ad CB, ita GI, ad IH.

PARI ratione erit, vt AF, ad FB, ita GM, ad MH. Erit namque rurſus componendo, & ex æqualitate, vt AF, ad EF, ita GM, ad LM. Cum ergo ſit quoque, vt EF, ad FB, ita LM, ad MH: erit ex æqualitate, vt AF, ad FB, ita GM, ad MH; & ſic de cæteris. Conſtat igitur primum.

DEINDE pars v. g. tertia DE, ſecta ſit vtcunque in partes duas DN, NE; & tertia quoque pars KL, in duas KO, OL, illis proportionales. Dico eſſe quoque vt AN, ad NB, ita GO, ad OH. Erit enim conuertendo, vt EN, ad ND, ita LO, ad OK: & componendo, vt ED, ad DN, ita LK, ad KO. Quare cum ſit, vt CD, ad DE, ita IK, ad KL, & vt DE, ad DN, ita KL, ad KO: erit ex æqualitate, vt CD, ad DN, ita IK, ad KO, atque ita partes AC, CD, DN, partibus GI, IK, KO, proportionales ſunt.

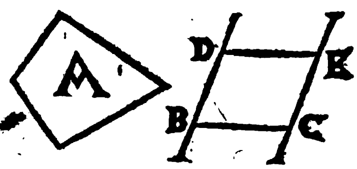
RVRSVS quia eſt conuertendo, vt FE, ad ED, ita ML, ad LK; & componendo, vt DE, ad NE, ita KL, ad OL; erit ex æqualitate, vt FE, ad EN, ita ML, ad LO; & conuertendo, vt NE, ad EF, ita OL, ad LM; ac proinde omnes partes AC, CD, DN, NE, EF, FB, omnibus partibus GI, IK, KO, OL, LM, MH, proportionales ſunt. Igitur vt in prima parte demonſtratum eſt, erit vt AN, ad NB, ita GO, ad OH. Conſtat ergo etiam ſecundum.

PROBL.

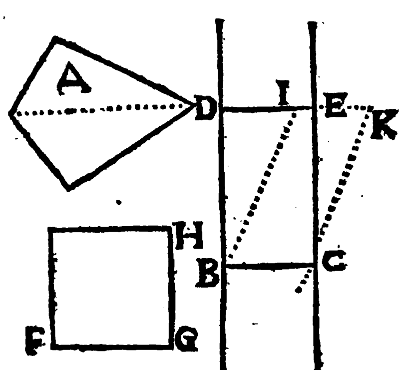
PROBLEMA 1. PROPOSITIO 2.

DATO rectilineo ſuper datam rectam inter alias duas rectas interceptam, conſtituere quadrilaterum æquale, cuius latus oppoſitum inter duas eaſdem rectas, interceptum datæ rectæ ſit parallelum. Et datis duobus rectilineis inæqualibus quibuſcunque, ex maiore per lineam vni lateri parallelam detrahere rectilineum minori æquale, quando id fieri poteſt, quod ex ipſa problematis ſolutione cognoſcetur.

SIT rectilineum datum A, & recta data BC, inter duas rectas BD, CE, intercepta: oporteatque primum conſtituere rectilineo A, æquale quadrilaterum ſuper datam rectam BC, cuius latus oppoſitum inter eaſdem rectas BD, CE, interceptum datæ rectæ BC, ſit parallelum. Et ſi quidem duæ rectæ BD, CE, ſint parallelæ (quod tum demum eueniet, cum duo anguli B, C, æquales ſunt, duobus rectis) efficietur problema, a ſi ſuper rectam BC, conſtituetur parallelogrammum BE, ſiue in angulo BCE, ſiue in angulo CBD, rectilineo A, æquale. a 45. primi.



2. QVANDO anguli B, C, recti ſunt, facilius problema efficiemus hac ratione. Rectilineo dato A, conſtituatur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius Geometriæ practicæ ſcripſimus, quadratum FGH, æquale: reſoluendo videlicet rectilineum in triangula, vel trapezia, & cuilibet triangulo, vel trapezio æquale qua-



dratum conſtituendo, ac tandem omnia illa quadrata ad vnum redigendo, vt locis citatis fuſè explicauimus. Deinde duabus rectis BC, FG, inueniatur tertia

tertia proportionalis BD, ac per D, ipſi BC, parallela agatur DE. Rectangulum enim BE, rectilineo dato A, æquale erit; [a] cum quadrato FGH, æquale ſit; propterea quod tres rectæ BC, FG, BD, continuè proportionales ſunt.

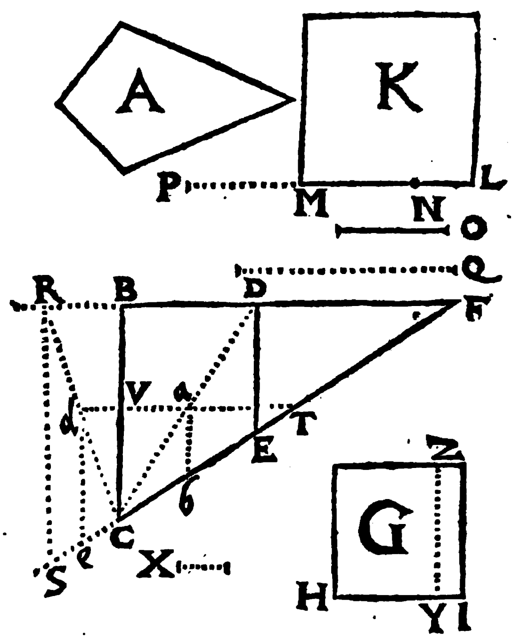
[a] 17. ſexti.

IMMO eodem hoc artificio vti poterimus, quando parallelæ BI, CK, non faciunt angulos rectos ad B, & C. Nam conſtituto rectangulo CD, æquali quadrato FH, id eſt, rectilineo A, vt dictum eſt: ſi producatur latus DE, donec ſecet rectas BI, CK, in I, K, [b] erit parallelogrammum BK, rectangulo CD, æquale, hoc eſt, rectilineo A.

[b] 35. primi.

3. SI verò duæ rectæ BD, CE, non ſint parallelæ, conueniant ad partes D, E, in F, (quod tum fiet, cum duo anguli DBC, ECB, minores ſunt duobus rectis) ſitque primum propoſitum ſuper BC, verſus F, conſtituere trapezium rectilineo A, æquale, habens latus rectæ BG, oppoſitum eidem BC, parallelum. quod vt fieri poſsit, neceſſe eſt, rectilineum A, minus eſſe triangulo BCF, vt patet.

RECTILINEO ergo A, conſtruatur per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib.



2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius, vt proximè diximus, æquale quadratum G, cuius latus HI. [c] Item triangulo BCF, æquale quadratum K, cuius latus LM. Deinde duabus rectis LM, HI: reperiatur tertia proportionalis LN. Inuenta autem recta O, media proportionali inter LM, & MN; fiat vt LM, ad O, ita BF, ad FD; ac tandem per D, ipſi BC, parallela agatur DE. Dico Trapezium BE, rectilineo A, æquale eſſe

[c] 14. ſecundi.

Quo-

[a] Quoniam enim triangulum B C F, ad triangulum D E F, duplicatam proportionem habet lateris B F, ad latus D F, hoc eſt, rectæ L M, ad rectam O: Habet autem & L M, ad M N, duplicatam proportionem eius, quam habet L M, ad O, quod L M, O, M N, ſint continuè proportionales. Igitur erit vt triangulum B C F, ad triangulum D E F, ita L M, ad M N; Et per conuerſionem rationis, vt triangulum B C F, ad Trapezium B E, ita L M, ad L N. [b] Cum ergo ſit, vt L M, ad L N, ita quadratum K, ad quadratum G, quod L M, H I, L N, continuè ſint proportionales, erit quoque vt triangulum B C F, ad trapezium B E, ita quadratum K, ad quadratum G, hoc eſt, ita triangulum B C F, quod ipſi K, æquale eſt, ad rectilineum A, ipſi G, æquale. Quocirca cum triangulum B C F, ad trapezium B E, & ad rectilineum A, eandem habeat proportionem; [c] æqualia erunt trapezium B E, & rectilineum A, quod eſt propoſitum.

[a] 19. ſexti. [b] coroll. 20. ſexti. [c] 9. quinti.

4. Sit deinde ſuper B C, verſus R, S, vbi anguli R B C, S C B, duobus rectis ſunt maiores, non autem verſus punctum concurſus F, conſtruendum trapezium rectilineo A, cuiuſcunque magnitudinis ſit, æquale, habens latus oppoſitum rectæ B C, parallelum. [d] Fiat rurſus triangulo B C F, æquale quadratum K, cuius latus L M; & rectilineo A, aliud quadratum G, æquale, cuius latus H I, per ea, quæ ad propoſitionem 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius docuimus. Deinde lateribus L M, H I, inueniatur tertia proportionalis M P, quæ ipſi L M, in continuum & directum ſit poſita: atque inter totam L P, & L M, reperta ſit media proportionalis Q: ac poſtremo, vt Q, ad L P, ita fiat F B, ad F R: ipſique B C, parallela agatur R S. Dico trapezium B S, rectilineo A, eſſe æquale. [e] Quoniam enim triangulum B C F, ad triangulum R S F, proportionem habet duplicatam lateris F B, ad latus F R, hoc eſt, proportionis Q, ad L P; Eſt autem & proportio L M, ad L P, duplicata proportionis L M, ad Q, vel Q, ad L P, quod tres rectæ L M, Q, L P, ſint continuè proportionales. Igitur erit vt triangulum B C F, ad triangulum R S F, ita L M, ad L P; ideoque etiam per diuiſionem rationis contrariam in ſcholio propoſ. 17. libr. 5. Euclid. à nobis demonſtratam, vt triangulum B C F, ad trapezium B S, ita L M, ad M P. [f] Vt autem L M, ad M P, ita eſt quadratum K, ad quadratum G, quod tres L M, H I, M P, ſint continuè proportionales. Igitur erit quoque, vt triangulum B C F, ad trapezium B S, ita quadratum K, ad quadratum G. Cum ergo triangulo B C F, conſtructum ſit æquale quadratum K: [g] erit quoque trapezium B S, quadrato G, æquale, hoc eſt, rectilineo A, cui quadratum G, conſtructum eſt æquale. quod eſt propoſitum.

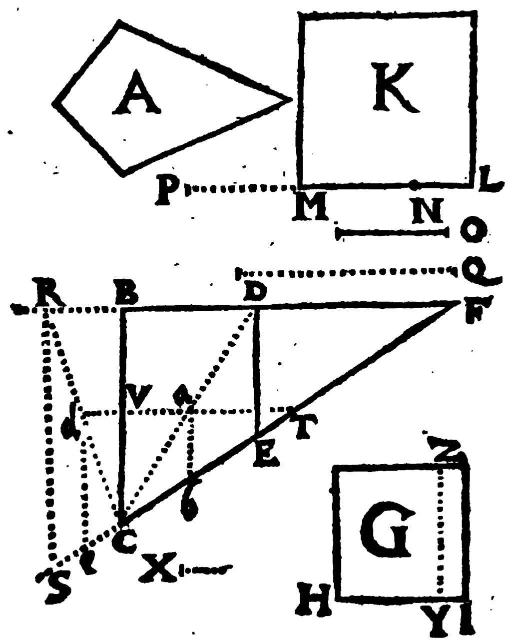
[d] 14. ſecundi. [e] 19. ſexti. [f] coroll. 20. ſexti. [g] 14. quinti.

Qvod ſi quando duæ rectæ B F, C F, in tam remoto puncto concurrant, vt vix haberi poſſit, (quod quidem tunc accidet, cum ipſæ rectæ ferè parallelæ ſunt) abſoluemus problema, etiamſi punctum concurſus F, non habeamus, hunc in modum. Sumpto vtcunque puncto T, in altera earum, nimirum in C F, agatur T V, alteri B F, parallela; & duabus B C, C V, inueniatur tertia proportionalis X. Conſtructo deinde ex ſcholio propoſ. 14. lib. 2. Euclid. vel potius, vt Num. 4. cap. 4. libr. 4. huius docuimus, quadrato G, æquali rectilineo A, inueniatur tribus B C, X, H I, quarta proportionalis I Y, agaturque Y Z, lateribus quadrati parallela. [h] Et quoniam eſt, vt triangulum B C F, (ſi perficeretur) ad triangulum V C T, ita recta B C, ad rectam X, hoc eſt, ita H I,

[h] coroll. 19. ſexti.

ad I Y,

[a] *1. ſexti.* ad IY, [a] hoc eſt, ita quadratum G, ad rectangulum I Z: Eſt autem triangulum B C F, maius quadrato G, ſiue rectilineo A: (quando enim ad partes angulorum, qui duobus rectis minores ſunt, conſtruendum eſt trapezium dato recti-



[b] *14. quinti.* lineo æquale, debet eſſe triangulum maius rectilineo) [b] erit quoque triangulum V C T, maius rectangulo I Z. Igitur vt Num. 3. traditum eſt, conſtruatur trapezium V b, rectangulo I Z, æquale: & tribus rectis C V, V a, C B, inuenta quarta proportionali B D, [c] (tranſibit autem recta ducta C a, per D, ſi quarta B D, ritè eſt inuenta, [d] ita vt viciſsim recta C a, ſi exquiſitè ducatur, exhibeat quartam proportionalem quæſitam B D,) demittatur D E, ipſi B C, parallela. Dico trapezium B E, dato rectilineo A, æquale eſſe. Quoniam enim trapezium B E, trapezio V b, ſimile eſt, per ea, quæ ad propoſ. 18. libr. 6. Euclid. demonſtrauimus; [e] erit trapezium B E, ad trapezium V b, vt recta B C, ad rectam X, hoc eſt, vt recta H I, ad I Y, [f] hoc eſt, vt quadratum G, ad rectangulum I Z. Cum ergo trapezium V b, rectangulo I Z, æquale ſit; [g] erit quoque trapezium B E, quadrato G, hoc eſt, rectilineo A, æquale. quod eſt propoſitum.

[c] *ſchol. 4. ſexti.*
[d] *4. ſexti.*
[e] *coroll. 20. ſexti.*
[f] *1. ſexti.*
[g] *14. quinti.*

6. Non aliter ex alia parte angulorum R B C, S C B, qui duobus rectis ſunt maiores, etiamſi punctum concurſus F, non habeatur, trapezium conſtituemus rectilineo T, æquale, cuiuſcunque magnitudinis illud ponatur. Neque enim in hoc caſu neceſſe eſt, ipſum eſſe minus triangulo B C F, ſi perficeretur. Ducta namque ex quolibet puncto T, rectæ C F, ipſi B F, parallella T V, eaque producta, inueniatur duabus rectis B C, C V, tertia proportionalis X. Conſtructo deinde

deinde quadrato G, quod rectilineo A, ſit æquale, reperiatur tribus rectis BC, X, & HI, quarta proportionalis IY, agaturque YZ, lateribus quadrati parallela, ita vt rurſus ſit triangulum BCF, ad triangulum VCT, ſicut quadratum G, ad rectangulum IZ. Poſt hæc, vt Num. 4. præcepimus, rectangulo IZ, conſtruatur trapezium æquale Ve, & tribus rectis CV, Vd, CB, inuenta quarta proportionali BR, [a] (tranſibit autem recta Cd, ducta per R: ſi quarta BR, rectè inuenta eſt: [b] ita vt viciſſim recta Cd, ſi accuratè ducatur, abſcindat quartam proportionalem quæſitam BR,) demittatur RS, ipſi BC, parallela. Dico trapezium BS, rectilineo A, æquale eſſe. Quoniam enim trapezium BS, trapezio Ve, ſimile eſt, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 18. lib. 6. Euclid. monſtrata ſunt à nobis; [c] erit trapezium BS, ad trapezium Ve, vt recta BC, ad rectam X, hoc eſt, vt recta HI, ad rectam IY, [d] hoc eſt, vt quadratum G, ad rectangulum IZ. Cum ergo trapezium Ve, rectangulo IZ, æquale ſit; [e] erit quoque trapezium BS, quadrato G, hoc eſt, rectilineo A, æquale. quod eſt propoſitum.

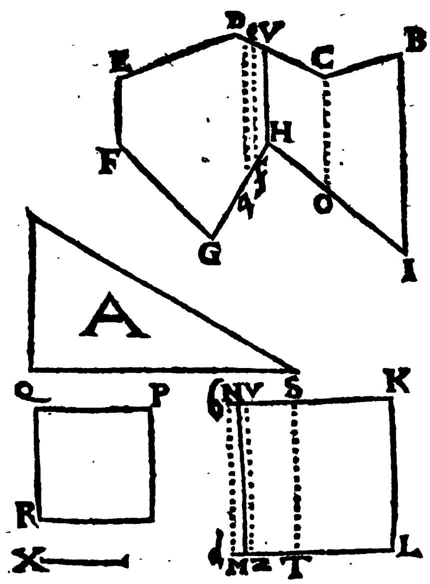
[a] *ſchol. 4. ſexti.*
[b] *4. ſexti.*
[c] *coroll. 20. ſexti.*
[d] *1. ſexti.*
[e] *14. quinti.*

7. IAM verò datis duobus rectilineis quibuſcunque A, & BCDEFGHI, ſit ex poſteriore: quod maius ponatur, auferendum rectilineum habens latus lateri BI, parallelum, æquale priori A, quod minus ſtatuatur, ſi fieri quidem id poterit. Fieri autem poterit ſemper in figuris omnes angulos habentibus introrſum, in aliis verò non ſemper. Per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14 lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius tradidimus, conſtruatur quadratum KM, rectilineo minori A, æquale. Deinde ex angulo C, qui lateri BI, proximus eſt, ducta lateri BI, parallela CO, conſtituatur rectilineo BO, eadem ratione quadratum æquale PQR; & duabus rectis KN, PQ, inuenta tertia proportionali KS, ducatur ST, ipſi KL, parallela: [f] Eritque rectangulum KT, contentum ſub prima linea KL, & tertia KS, quadrato mediæ PQ, hoc eſt, rectilineo BO, æquale. Et quoniam KS, inuenta eſt in hoc exemplo minor latere KN: ideoque & rectangulum KT, minus quadrato KM, hoc eſt, rectilineo A; erit etiam rectilineum BO, minus rectilineo A. Ex propinquiore ergo angulo H, ducta rurſum ipſi CO, vel BI, parallela HV, fiat iterum rectilineo CH, æquale quadratum, cuius latus X: Et duabus rectis KN, & X, inuenta tertia proportionali SN, quæ in hoc exemplo terminatur in extremo lateris KN; [g] erit rurſum rectangulum SM, ſub prima linea ST, & tertia SN, comprehenſum æquale quadrato mediæ X, hoc eſt, rectilineo CH. Cum ergo & KT, ipſi BO, ſit oſtenſum æquale: erit totum quadratum KM, hoc eſt, rectilineum A, toti rectilineo BCVHOI, æquale; ac proinde ex maiori rectilineo per rectam HV, lateri BI, parallelam rectilineum detraximus minori rectilineo A, æquale. quod faciendum erat.

[f] *17. ſexti.*
[g] *17. ſexti.*

8. QVOD ſi duabus rectis KN, & X, inuenta tertia proportionalis fuiſſet minor, quam SN, nimirum æqualis ipſi SY, ita vt rectangulum SZ, quadrato rectæ X, vel rectilineo CH, foret æquale: ducenda eſſet ex proximo angulo D, alia parallela Da, & rectilineo DH, conſtituendum quadratum æquale; atque rectæ KN, & lateri poſtremi huius quadrati inuenti adiungenda tertia proportionalis, & ei abſcindenda æqualis Yb. Et ſi YB, foret minor, quam YN, ducenda adhuc eſſet ex proximo angulo G, parallela lateri BI, & rectilineo inter hanc parallelam, & Da, comprehenſo efficiendum quadratum æquale: ac rectæ KN, & lateri huius quadrati adiungenda tertia proportionalis, &c. Atque ita progrediendum deinceps, donec inuenta ſit tertia propor-

tionalis S N, quæ terminetur in N, (qualis fuit tertia proportionalis S N, duabus K N, & X, inuenta) vel cuius terminus vltra N, cadat. Quando enim terminatur in N, erit rectilineum inter B I, & vltimam parallelam comprehenſum

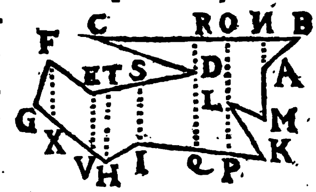


æquale quadrato K M, hoc eſt, rectilineo A, vt oſtenſum fuit de rectilineo B H, paulo ante hunc Num. 8. Quando autem terminus tertiæ proportionalis cadit vltra N, videlicet in b. ita vt rectangulum Y d, ſit æquale vltimo quadrato inuento, hoc eſt, rectilineo D H; ac proinde totum rectilineum inter B I, & vltimam parallelam, hoc eſt, rectangulum K d, maius quadrato K M, vel rectilineo A; erit vltimum rectilineum D H, maius rectangulo N d, propterea quod K Z, ipſi B H, æquale eſt, & Y d, ipſi D H. Quare ſi ſuper rectam D a, inter rectas D V, a H, conſtituatur trapezium D f, per parallelam e f, rectangulo N d, æquale, vt ſupra Num. 3. traditum eſt: erit rectilineum inter B I, & e f, parallelas contentum æquale quadrato K M, hoc eſt, rectilineo A.

Cæterum non eſt neceſſe, vt ſemper à proximo angulo parallela ducatur in figura B F. Quando namque ſenſus iudicaret plus minus, parallelam ex aliquo angulo non proximo ductam auferre rectilineum minus quadrato K M, vel non multò maius, ducenda eſſet parallela ex eo angulo, & rectilineo abſciſſo conſtruendum æquale quadratum; & reliqua perficienda, vt prius.

Denique ſi aliquando deprehenderetur, rectilineum abſciſſum non eſſe multo minus quadrato, conſtituendum eſſet, vt Num. 3. docuimus, ſuper parallelam illam trapezium æquale rectangulo, quo quadratum K M, rectilineum abſciſſum ſuperat.

9. Ex his puto ſatis ſtudioſum Lectorem intelligere, quo pacto in alijs exemplis ſe gerere debeat. Nam ſi verbi gratia ex hoc propoſito rectilineo irregulariſsimo per lineam lateri AM, parallelam abſcindenda ſit portio æqualis alteri cuipiam rectilineo minori, producemus MA, vſque ad N. Et ſi quidem deprehenſum fuerit triangulum ABN, eſſe æquale dato rectilineo minori, (quod ſcietur, ſi quadratum triangulo æquale conſtructum, fuerit æquale quadrato, quod dato rectilineo minori conſtruitur æquale) recta AN, problema efficiet. Si verò maius, conſtruemus ſuper AN, verſus B, trapezium per parallelam ipſi AN, æquale exceſſui: At ſi minus, ducemus LO, parallelam. Nam ſi fuerit deprehenſum rectilineum NL, æquale defectui, problema efficiet parallela LO: Si verò maius, conſtituemus ſuper LO, verſus MN, per parallelam ipſi MN, trapezium exceſſui æquale. Ea enim parallela problema ſoluet: At ſi minus, producemus OL, ad P: Etſi quidem triangulum KLP, fuerit æquale defectui, tota parallela OP, quæſtioni ſatisfaciet: Si verò maius, [a] conſtituemus in angulo K, triangulum ſimile triangulo KLP, & exceſſui æquale; ita vt hoc triangulum vna cum rectilineo per parallelam LO, abſciſſo ſit dato rectilineo minori æquale. Ex quo colliges, problema in hoc caſu ſolui non poſſe, cum duæ parallelæ, nimirum LO, & illa, quæ triangulum ipſi KLP, ſimile aufert, reſecent ex toto rectilineo BG, partem dato rectilineo minori æqualem. At ſi triangulum KLP, fuerit minus defectu prædicto, ita vt hoc triangulum vna cum rectilineo per parallelam LO, abſciſſo ſit minus dato rectilineo minore, ducemus per D, parallelam QR. Et ſi quidem rectilineum PR, æquale fuerit defectui, quo figura KPLMABNO, à dato rectilineo minore deficit, factum erit per parallelam QR, quod iubetur: Si verò maius, parallela, quæ cum QR, verſus OP, auferet rectilineum huic exceſſui æquale, ſatisfaciet problemati: At ſi rectilineum PR, fuerit minus prædicto defectu, & triangulum CDR, inuentũ fuerit vltimo huic defectui, quo rectilineum PR, à prædicto defectu deficit, æquale, parallela DQ quæſtionem diſſoluet: Si autem triangulum CDR, fuerit maius hoc vltimo defectu, [b] ſi ad C, conſtituatur triangulum exceſſui æquale, & ſimile triangulo CDR, ſatisfacient quæſtioni duæ parallelæ; videlicet DQ & baſis prædicti trianguli conſtituti; atque in hoc caſu per vnicam parallelam ſatisfieri problemati nequit: Si denique triangulum CDR, minus extiterit eodem illo vltimo defectu, ducemus parallelam IS. Et ſi quidẽ rectilineum DI, æquale fuerit illi, quo triangulum CDR, minus eſt vltimo illo defectu, erit totum rectilineum ISDCBAMLKI, dato minori rectilineo æquale: Si autem rectilineum DI, inæquale fuerit, progrediemur vlterius, vt iam ſæpius dictum eſt, donec rectilineum inueniamus dato minori rectilineo æquale; Inuenietur autem omnino vnum æquale, cum totũ rectilineum BG, maius ponatur. Vides igitur, facilè conijci poſſe, quando problema per vnicam parallelam ſolui poſsit, & quando non, ſed per duas: Quotieſcunque enim incidemus in eiuſmodi triangulum in ipſa conſtructione, qualia fuerunt KLP, & CDR, ex quo auferendum ſit triangulum ſimile, & æquale exceſſui alicui, ſolui problema nequit, niſi per duas parallelas.



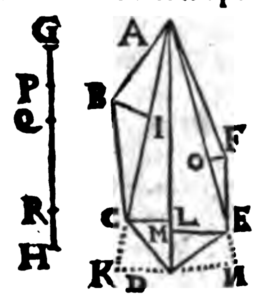
[a] 25. ſexti.

[b] 25. ſexti.

PROBL. 2. PROPOS. 3.

DIVISO rectilineo quolibet in triangula ex vno aliquo puncto, rectas lineas ipſis triangulis ordine proportionales inuenire.

SIT rectilineum quodlibet A B C D E F, diuiſum in triangula A B C, A C D, A D E, A E F, per rectas ex angulo A, (vel aliquo puncto aſsignato in vno latere) ad omnes angulos oppoſitos ductas: atque hiſce triangulis inueniendæ ſint ordine totidem rectæ proportionales. Ex omnibus angulis dempto angulo A, ad



rectas ex A, egredientes ducantur perpendiculares B I, CL, DK, DN, EM, F O, pro altitudinibus triangulorũ. (Nihil autem refert, ſi interdum perpendiculares cadant in rectas extra triangula productas, cuiuſmodi hic ſunt DK, DN,) ita vt ſingula triangula binas habeant altitudines, præter duo extrema, quæ ſingulas duntaxat habent. Deinde in recta quacunque GH, accipiatur G P, æqualis altitudini BI, primi trianguli ABC; & P Q, æqualis altitudini D K, ſecundi trianguli A C D, reſpectu eiuſdem baſis AC. Poſt hæc fiat, [a] vt CL, altitudo ſecundi trianguli reſpectu baſis A D, ad E M, altitudinẽ tertij trianguli ADE, reſpectu eiuſdem baſis AD, ita P Q, ad QR; Et vt DN, altitudo tertij trianguli ADE, reſpectu baſis AE, ad FO, altitudinem quarti trianguli AEF, reſpectu eiuſdem baſis AE, ita QR, ad RH, atque ita deinceps, ſi plura fuerint triangula, ſumendo ſemper duas altitudines ad communem baſem demiſſas, &c. Dico quatuor rectas G P, PQ, QR, R H, eſſe quatuor triangulis ordine proportionales. Nam vt in ſcholio propoſ. 1. lib. 6. Euclid demonſtratum eſt, à nobis, ita eſt triangulum A B C, ad triangulum ACD, vt altitudo BI, ad altitudinem D K, propter baſem communem AC, hoc eſt, vt GP, ad PQ, cum hæ ſumptæ ſint illis altitudinibus æquales. Eadem de cauſa ita eſt triangulum ACD, ad triangulum ADE, vt altitudo C L, ad altitudinem E M, hoc eſt, vt P Q, ad QR, cum ex conſtructione ſit, vt C L, ad EM, ita P Q, ad QR. Pari denique ratione ita eſt triangulum ADE, ad triangulum AEF, vt altitudo DN, ad altitudinem, FO, hoc eſt, vt QR, ad R H, cum ſit per conſtructionem, vt DM, ad F O, ita QR, ad RH. Conſtat ergo id, quod propoſitum fuit.

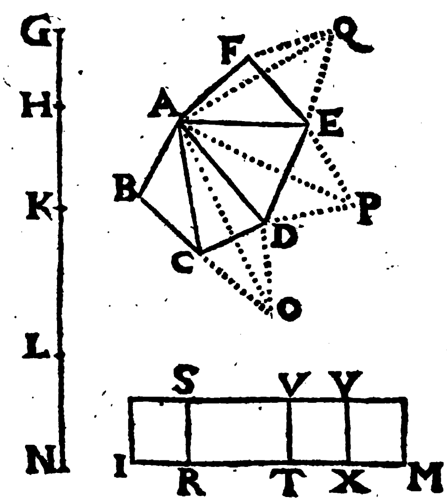
[a] 12. ſexti.

ALITER.

SIT rurſus rectilineum ABCDEF, diuiſum in triangula ABC, ACD, ADE, AEF, ex puncto A. Quoniam bina proxima triangula conſtituunt quadrilaterum, cuius diameter eſt latus vtrique triangulo commune, cuiuſmodi eſt ABCD, ducemus diametro AC, ex D, parallelam D O, quæ ſecet latus BC, productum in O. Sic in quadrilatero ACDE, diametro AD, parallelam ducemus EP, quæ ſecet latus CD, protractum in P. Itemque in quadrilatero ADEF, diametro AE, parallelam ducemus FQ, quæ latus DE, productum ſecet in Q. Deinde in recta quauis GN, ſumantur G H, H K, ipſis B C, C O, æquales. Et tribus

CD,

CD, DP, HK, reperiatur quarta proportionalis KL. Ac tandem tribus DE, EQ, KL, quarta proportionalis inueniatur LN. Dico inuentas eſſe quatuor rectas GH, HK, KL, LN, quatuor triangulis proportionales. Ductis enim ex A, ad O, P, Q, puncta concurſuum rectis AO, AP, AQ, a erit triangulum ACD, trian- a 37. primi.



gulo ACO; & triangulum ADE, triangulo ADP; & triangulum AEF, triangulo AEQ, æquale. b Cum ergo ſit, vt BC, ad CO, hoc eſt, vt GH, ad HK, ita triangulum ABC, ad triangulum ACO, hoc eſt, ad triangulum ACD: Item vt CD, ad DP, hoc eſt, vt HK, ad KL, ita triangulum ACD, ad triangulum ADP, hoc eſt, ad triangulum ADE: Et vt DE, ad EQ, hoc eſt, vt KL, ad LN, ita triangulum ADE, ad triangulum AEQ, hoc eſt, ad triangulum AEF: perſpicuum eſt id, quod proponitur. b 1. ſexti.

ALITER.

RATIONES duæ expoſitæ, quæ expeditiſsimè ſunt, propria eſt triangulorum, in quæ diuiditur figura per rectas ab vno aliquo puncto in quouis latere dato, vel ab aliquo angulo emiſſas: poteſt tamen idem hoc problema abſolui alio modo, qui in quaslibet figuras conuenit, licet non ſit tam expeditus. Ita ergo agemus: Sit eadem figura proxima diuiſa in triangula, vel etiam in plurium laterum figuras. c Et primo triangulo ABC, vel primæ figuræ, rectangulum, vel quoduis aliud parallelogrammum non rectangulum æquale conſtruatur IS: Et ſuper rectam RS, aliud parallelogrammum ST, ſecundo triangulo ACD, vel ſecundæ figuræ æquale, habens angulum SRT, angulo I, æqualem. Itē ſuper rectā TV, aliud VX, tertio triāgulo ADE, vel tertiæ figuræ æquale, angulū habēs VTX, æqualē eidem angulo I: Ac deniq; ſuper rectam XY, aliud YM, quarto triangulo AEF, vel quartæ figuræ æquale, angulum YXM, habens æqualem eidem angulo I: atque ita deinceps, ſi plura fuerint triangula, vel figuræ. Dico rectas IR, RT, TX, XM, triangulis, vel figuris eſſe proportionales. Nam ex quatuor c 44. vel 45. primi.

tuor

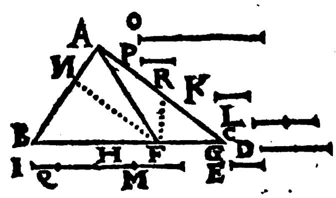
tuor rectangulis, vel parallelogrammis conſtituitur vnum totum, vt ex demõſtratione propoſ. 45. lib. 1. Euclid. manifeſtum eſt, propter angulos I, S R T, V-TX, YXM, æquales: ac proinde omnia quatuor eandem habent altitudinem. [a] Igitur rectæ IR, RT, TX, XM, proportionales ſunt parallelogrammis, ideoque & triangulis, ſiue figuris. quod eſt propoſitum.

[a] 1. ſexti.

PROBL. 3. PROPOS. 4.

DATVM rectilineum per rectam à quouis angulo, vel puncto in aliquo latere ductam in proportionem datam diuidere: ita vt antecedens proportionis, in quam malueris partem, vergat.

Sit primum triangulum quodcunque ABC, per rectam ex angulo A, diuidendum in duas partes: ita vt pars ad B, vergẽs ad reliquam partẽ habeat proportionem datam D, ad E. Secetur latus B C, dato angulo oppoſitum, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 10. lib. 6. Euclid. docuimus, in F, ita vt eadem ſit proportio BF, ad FC, quæ D, ad E, ducaturque recta A F. Dico eſſe vt D, ad E, ita triangulum ABF, ad triangulum AFC. [b] Eſt enim triangulum ABF, ad triangulum AFC, vt BF, ad FC, hoc eſt, vt D, ad E.



[b] 1. ſexti.

Deinde ſit idem triangulum ABC, diuidendum in duas partes, per rectam ex puncto F, dato in latere BC, ita vt pars verſus B, ad reliquam partem habeat proportionem datam D, ad E. Ducta ex dato puncto F, ad angulum oppoſitum A, recta FA, vt totum triangulum in duo triangula ſit ſectum: [c] reperiantur duæ rectæ GH, HI, habentes eandem proportionem, quam triangulum ABF, ad triangulum AFC: totaque GI, ſecetur in H, vt eadem ſit proportio GH, ad H I, quæ D, ad E. Et quia punctum H, cadit in extremum primæ lineæ G H; eſtque vt GH, ad HI, hoc eſt, vt D, ad E, ita triangulum ABF, ad triangulum AFC: diuidet recta FA, ex dato puncto F, ad oppoſitum angulum A, ducta triangulum ABC, in duas partes in data proportione D, ad E.

[c] 3. huius.

Sit rurſus data proportio K, ad L, diuidendumque ſit triangulum ABC, ex puncto F, in duas partes eiuſdem proportionis. Diuidatur tota G I, in M, ita vt eadem ſit proportio GM, ad MI, quæ K, ad L. Et quoniam diuiſionis punctum M, cadit in primam partem GH, totius lineæ GI, ſecabimus BA, baſem primi trianguli dato puncto F, oppoſitam, in N, vt eadem ſit proportio BN, ad NA, quæ GM, ad MH. Dico ductam rectam FN, problema efficere, hoc eſt, ita eſſe triangulum BFN, ad trapezium FNAC, vt K, ad L. Quoniam enim rectæ GH, HI, triangulis ABF, AFC, proportionales inuentæ ſunt: & tam primam partem GH, in M, quam primum triangulum ABF, per rectam FN, ſecuimus proportionaliter, [d] cum ſit triangulum BFN, ad triangulum NFA, vt BN, ad NA, hoc eſt, vt GM, ad MH, [e] erit vt GM, ad MI, id eſt, vt K, ad L, ita BFN, triangulum ad trapezium FNAC. quod eſt propoſitum.

[d] 1. ſexti.
[e] 1. huius.

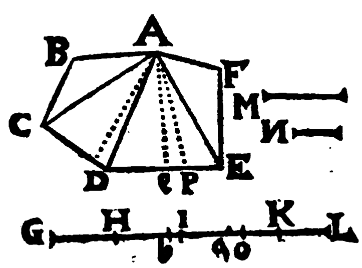
Denique data ſit proportio O, ad P, ſecandumque ſit triangulum ABC, in duas partes eiuſdem proportionis. Diuiſa tota G I, in Q, ita vt eadem ſit

proportio

proportio GQ,ad QI,quæ O,ad P: quoniam punctum diuiſionis Q,cadit in ſecundam partem HI,totius lineę GI,diuidemus AC,baſem ſecundi trianguli dato puncto F, oppoſitam in R, vt eadem ſit proportio AR,ad RC, quæ HQ,ad QI. Dico ductam rectam ER,problema efficere,hoc eſt,ita eſſe trapezium ABFR,ad triangulum RFC,vt O,ad P. Quoniam enim rectæ GH,HI,repertæ ſunt triangulis ABF,AFC,proportionales; & tam ſecundam partem HI,in Q,quam ſecundum triangulum AFC,per rectam FR,ſecuimus proportionaliter: [a] cum ſit triangulum AFR,ad triangulum CFR,vt AR,ad RC,hoc eſt, vt HQ,ad QI: [b] Erit vt GQ,ad QI, hoc eſt,vt O,ad P,ita trapezium ABFR, ad triangulũ RFC. quod eſt propoſitum. a 1. ſexti. b 7. huius.

IAM verò ſi antecedens proportionis vergere debeat verſus C, proportioque data ſit O,ad P; fiet id commodiſsimè, ſi triangulum ex F, diuidatur ſecũdum proportionem P,ad O,ita vt antecedens vergat verſus B,ſicut docuimus. Nam tunc pars verſus C,ad reliquam habebit proportionem, quam O,ad P,per conuerſam proportionalitatem. Quod etiam in alijs figuris intelligi volo.

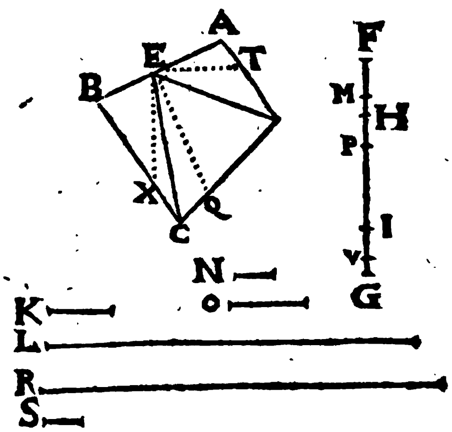
SIT deinde multilatera figura quæcunque ABCDEF, per rectam ex angulo A, ductam ſecanda in duas partes, ita vt pars ad B, vergens ad reliquam partem proportionem habeat datam M,ad N. Ductis ex dato angulo A,ad omnes angulos oppoſitos rectis partientibus figuram in quatuor triangula; [c] inueniantur ipſis quatuor rectæ proportionales GH,HI,IK,KL. Tota deinde GL,ſecetur in O,vt eadem ſit proportio GO,ad OL,quæ M,ad N. Et quoniam diuiſionis punctum O,cadit in tertiam lineam IK, ſecabimus tertij trianguli baſem DE,dato angulo A,oppoſitam in P, vt ſecta eſt IK, in O, ducemuſque rectam c 3. huius.



AP. Dico eſſe rectilineum ABCDPA,ad rectilineum APEFA, vt GO,ad OL, hoc eſt vt M,ad N. Quoniam enim triangula rectilinei dati proportionalia ſunt ordine rectis GH,HI,IK,KL,per conſtructionem, tertiumq; triangulum ADE, & lineam tertiam IK,diuiſimus proportionaliter per rectam AP, & in puncto O; [d] cum ſit vt DP,ad PE,hoc eſt, vt IO,ad OK,ita triangulum ADP,ad triangulum APE; [e] Erunt totæ quoque magnitudines ſectæ proportionaliter, hoc eſt, erit ABCDPA, ad APEFA, vt GO,ad OL,hoc eſt, vt M, ad N. quod eſt propoſitum. d 1. ſexti. e 1. huius.

QVOD ſi punctum O,diuidens rectam GL,in duas partes proportionis datæ M,ad N,caderet in aliquod punctorum H,I,K,vt in I, terminum ſecundæ lineæ HI,diuideret recta AD,terminans ſecundum triangulum ACD, totum rectilineum in datam proportionem. Nam tunc per primam partem propoſ. 1. huius lib. eſſet ABCDA,ad ADEFA, vt M,ad N,vt peſpicuum eſt.

DATVM præterea ſit rectilineum ABCD, ex puncto E, dato in latere AB, diuidendum in duas partes, quarum prior ad B, vergens ad poſteriorem partem habeat proportionem datam K, ad L. Ductis ex dato puncto E, ad omnes an-



gulos oppoſitos rectis diuidentibus rectilineum in tot triangula vno minus, quot latera figura habet; [a] inueniantur rectæ FH, HI, IG, triangulis EBC, ECD, EDA, proportionales. Secta deinde tota FG, in M, ſecundum datam proportionem K, ad L: quoniam diuiſionis punctum M, incidit in primam linea FH, diuidemus primi trianguli EBC, baſem BC, dato puncto E, oppoſitam in X, vt FH, ſecta eſt in M. Iuncta namq; recta EX, [b] erit triangulum EBX, ad figuram EXCDAE, vt FM, ad MG, hoc eſt, vt K, ad L: propterea quod triangula EBC, ECD, EDA, rectis FH, HI, IG, proportionalia ſunt ex conſtructione; & primæ partes EBC, FH, ſectæ ſunt per rectam EX, & in M, proportionaliter; [c] cum ſit EBX, ad EXC, vt BX, ad XC, hoc eſt, vt FM, ad MH. Conſtat ergo propoſitũ.

[a] 5. huius.
[b] 1. huius.
[c] 1. ſexti.

SI proportio data ſit N, ad O; ſecta FG, in P, ſecundum proportionem N, ad O, cadet diuiſionis punctum P, in ſecundam lineam HI. Igitur ſi ſecundi trianguli ECD, baſis CD, dato puncto E, oppoſita ſecetur in Q, vt ſecta eſt HI, in P, nectaturque recta EQ, [d] erit rurſus figura EBCQE, ad figuram EQDA, vt FP, ad PG, hoc eſt, vt N, ad O.

[d] 1. huius.

SI denique data ſit proportio R, ad S; ſecta FG, in V, ſecundum proportionem R, ad S, cadet diuiſionis punctum V, in tertiam lineam IG. Quamobrem ſi tertij trianguli EDA, baſis DA, dato puncto E, oppoſita ſecetur in T, vt ſecta eſt IG, in V, iungaturque recta ET; [e] erit rurſus figura EBCDTE, ad triangulum ETA, vt FV, ad VG, hoc eſt, vt R, ad S.

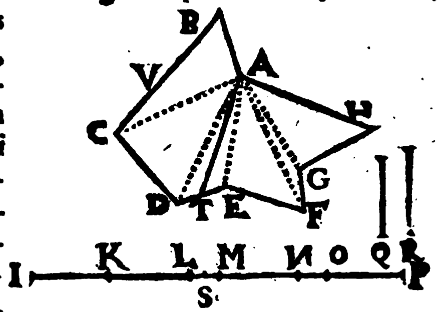
[e] 1. huius.

ATQVE hac via procedendum eſt in omnibus alijs figuris, quæ latera totidem habeant, quot angulos, id eſt, in quibus omnes anguli introrſum vergant.

IDEM hoc problema efficiemus in rectilineo, cuius anguli partim extrorſum vergant, & partim introrſum, dummodo ab angulo, vel puncto dato in latere duci poſsint lineæ rectæ diuidentes rectilineum in triangula quæ nullũ ipſius latus ſecent. Vt in hac figura octo laterum ABCDEFGH, cuius quinque anguli B, C, D, F, H, introrſum vergunt, & reliqui tres BAH, DEF, FGH, extrorſum, ductæ ſunt rectæ ex angulo A, ad omnes angulos, præterquam ad duos proxi-

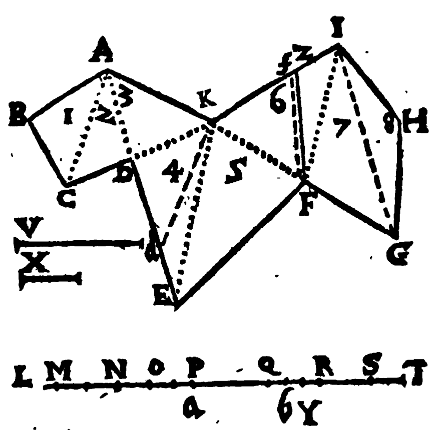
mos

mos B, H, nullum figuræ latus interſecantes. a Si igitur reperiantur ſex rectæ IK, a 3. huius.
KL, LM, MN, NO, OP, ſex triangulis ABC, ACD, ADE, AEF, AFG, AGH, proportionales; & tota linea LP, ſecetur in S, ſecundum datam proportionem Q, ad R; atque baſis DE, tertij trianguli (Nam diuiſionis punctum S, in tertiam lineam LM, incidit) dato puncto A, oppoſita diuidatur in T, vt linea LM, in S, diuiſa eſt, ducaturque recta AT: b Erit figura ABCDTA, ad figurā ATEFGHA, vt IS, ad SP, hoc eſt, vt Q, ad R. b 1. huius.



Ex angulo B, vel H, non poterit propoſita figura in quamcunque proportionem diuidi: quia lineæ ex eorum vtrolibet ad oppoſitos angulos emiſſæ partim ſecant latera, & partim cadunt extra figuram. Quod ſi data proportio minor eſſet, quam figuræ BCDEB, (ſi nimirum intelligatur ducta recta BE,) ad figuram BEFGHAB, tum demum diuidi poſſet ex B, tota figura in datam proportionem: propterea quod fierent duo triangula BCD, (ducta videlicet recta BD,) BDE, ad punctum B, quorum baſes ſunt latera figuræ CD, DE; alia vero quatuor ABE, AEF, AFG, AGH, ad punctum A, quorum etiam baſes ſunt figuræ latera AB, EF, FG, GH, &c.

Eodem modo quamcunque figuram rectilineam, etiam irregulariſſimam, partiemur in datam proportionem, non quidem ex quolibet angulo, vel puncto dato, (niſi ex eo duci poſſint rectæ ad omnes angulos oppoſitos, exceptis duobus proximis, quæ nullum figuræ latus interſecent: cuiuſmo-



di eſſet punctum V, in antecedenti figura) ſed ex aliquo puncto particulari; ſi prius figura diuidatur in triangula ex pluribus punctis, ita vt quodlibet triangulum habeat ſaltem vnum latus, quod etiam ſit latus figuræ. Vt ſi figura hæc ABCDEFGHIKA, diuidatur in octo triangula, & illis in recta LT c inueniantur totidem lineæ proportionales, totaq; linea LT, ſecetur in Y, c 3. huius.

 ſecun-

ſecundum datam proportionem V, ad X; & baſis IK, ſexti trianguli (quod punctum Y, cadat in ſextam lineam QR,) ſecetur in Z, vt ſecta eſt QR, in Y; a ita vt ducta recta FZ, triangulum FIK, ſectum ſit, vt ſecta eſt baſis IK, hoc eſt recta QR: b Erit figura ABCDEFZKA, ad figuram FZIHGF, vt LY, ad YT, hoc eſt, vt V, ad X, Et ſic de cæteris.

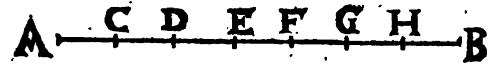
a 1. ſexti.
b 1. huius.

SCHOLIVM.

Quo pacto figura data ſecetur ex dato angulo vel puncto in latere, in quotuis partes æquales.

His ritè intellectis, licebit nobis quamlibet figuram ſecare in quotuis partes æquales ex dato angulo, vel pũcto in latere, ex quo duci poſsint ad omnes angulos, exceptis proximis duobus, rectæ lineæ, ita vt nullum figuræ latus ſecent. Nam ſi propoſita figura ſit ſecanda, verbi gratia in 7. partes æquales, diuidemus eam ſecundum proportionem 1. ad 6. nimirum ſecundum ſub multiplicem denominatam à denominatore partium, minus vno, in quas figura diuidenda eſt. Ita enim prior pars erit $\frac{1}{7}$. totius figuræ, cum poſterior 6. eiuſmodi partes complectatur. Hanc deinde poſteriorem partem ſecabimus ſecundum proportionem 1. ad 5. ita vt prior pars contineat $\frac{1}{6}$. ipſius, hoc eſt, $\frac{1}{7}$. totius figuræ. Poſt hæc poſteriorem huius ſecundæ diuiſionis partem partiemur ſecũdum proportionem 1. ad 4. Ac rurſus partem huius tertiæ diuiſionis poſteriorem diuidemus ſecundum proportionem 1. ad 3. Atq; poſteriorem huius quartæ diuiſionis partem ſecabimus ſecundum proportionem 1. ad 2. Ac poſtremo partem poſteriorem huius quintæ diuiſionis partiemur in duas partes æquales, nimirum ſecundum proportionem 1. ad 1.

Non aliter figuram irregularem, in qua à nullo angulo, vel puncto in latere, duci poſſunt rectæ ad angulos oppoſitos, quin aliqua figuræ latera ſecentur, diuidere licebit in partes quotuis æquales, ex diuerſis angulis, vel punctis. Nam ſi verbi gratia vltima figura huius propoſitionis diuidenda ſit in 5. partes æquales; reſecabimus ex ea, ab aliquo angulo, vel puncto, quintã partem. Deinde ex maiore parte complectente $\frac{4}{5}$. totius figuræ, ab aliquo eius angulo, vel puncto, detrahemus quartam partem: Item tertiam partem ex maiore parte huius diuiſionis: Ac tandem ſemiſſem ex vltima parte poſtremæ huius diuiſionis. Hac enim ratione diuiſa erit tota figura in 5. partes: non ſecus atq; in linea recta AB, contingit. Si namque eam partiri iubeamur in 7. partes æquales, efficiemus

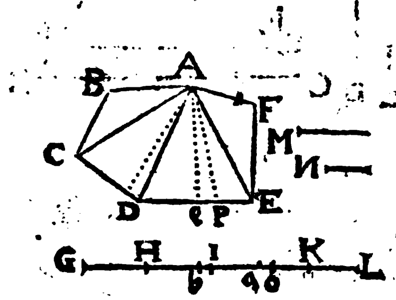


id, ſi primo loco ſeptimam partem AC, detrahemus; deinde $\frac{1}{6}$. CD, ex reliqua linea CB; & ex reliqua DB, quintam partem DE: & ex reliqua EB, quartam partem DE: & ex reliqua FB, tertiam partem FG: Ac deniq; relinquam lineam GB, biſariam ſecabimus in H, hoc eſt, ſemiſſem GH, ex ea abſcindemus.

Facilius idem exequemur, quando ex dato angulo, vel puncto, duci poſſunt rectæ ad omnes angulos, duobus proximis exceptis, nullum figuræ latus ſecantes, hac ratione. Lineam ex rectis, quę triangulis figuræ proportionales ſunt, cõflatã ſecabim⁹ in tot partes æquales, in quot figurã partiri iubemur. Si

enim

enim baſes triangulorum dato angulo, vel puncto oppoſitas, quæ lineis, in quas puncta diuiſionum cadunt, reſpondent, ita diuidemus, vt ſectæ ſunt reſpondentes lineæ, atque ex dato angulo, vel puncto, ad diuiſionum puncta rectas ducemus, factum erit, quod proponitur. Vt ſi ſecunda figura huius propoſ. ſecanda ſit in 5. partes æquales, partiemur lineam GI, in 5. æquales partes GH, Hb, ba, aK, KL. Et quoniam primum punctum H, cadit in H, erit triangulum ABC, quintæ figuræ pars; [a] cum ſit vt GH, ad HL, ita triangulum ABC, ad reliquam partem figuræ. Deinde ſecabimus baſem ſecundi trianguli in d, vt ſecunda linea HI, ſecta eſt in b: Et baſem tertii trianguli in e, vt tertia linea IK, ſecta eſt in a; rectaſque ducemus A d, A e. Quia verò quartum punctum K, cadit in K, terminum quartæ lineæ IK, erit figura diuiſa in 5. partes æquales ABC, [a] 1. huius.



A C d, A d D e, A e E, AEF: [b] propterea quod hæ partes partibus GH, Hb, b a, a K, K L, proportionales ſunt. [b] 1. huius.

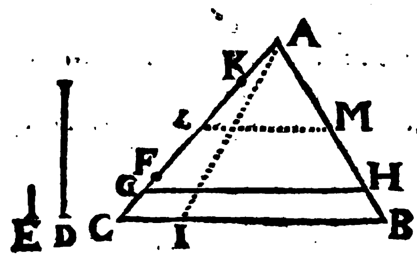
NEQVE verò difficile erit hanc eandem rationem figuris irregularibus, qualis eſt vltima huius propoſ. accommodare. Si enim ea diuidenda ſit, verbi gratia in tres partes æquales, ſecanda erit linea L T, in tres æquales partes L a, a b, b T. Et quarti trianguli baſis DE, diuidenda in d, vt quarta linea O P, diuiſa eſt in a: Item ſexti trianguli baſis KI, ſecanda in f, vt ſexta linea QR, in b, ſecta eſt. Nam ſi ex K, angulo baſi D E, oppoſito recta ducatur K d: Item ex angulo F, baſi KI, oppoſito recta F f, erunt tres partes figuræ ABCD d KA, K d E F f K, f FGHI f, inter ſe æquales: [c] cum ſint rectis L a, a b, b T, proportionales. Eademque de cæteris ratio eſt. [c] 1. huius.

PROBLEMA 4. PROPOSITIO 5.

DATVM rectilineum per rectam lineam datæ rectæ parallelam in datam proportionem diuidere, ita vt antecedens proportionis in quam elegeris partem vergat.

SIT primo triangulum A B C; diuidendum in duas partes per lineam lateri B C, parallelam, vt pars verſus A, ad reliquam habeat proportionem datam D, ad E. Alterutro laterũ, cui linea diuidens æquidiſtare non debet, videlicet A C, diuiſo in F, vt eadem ſit proportio AF, ad FC, quæ D, ad E, initio facto ab angulo A, verſus quem antecedens proportionis vergere debet, reperiatur inter totum latus AC, & eius partem AF, quæ terminatur in angulo A, qui lateri oppo-

nitur, cui æquidiſtans ducenda eſt, media proportionalis AG, agaturque per G ipſi BC, parallela GH. Dico hanc parallelam problema efficere, id eſt, eandem eſſe proportionem trianguli AGH, ad trapezium BCGH, quæ eſt D, ad E.
[a] coroll. 19. ſexti.
[a] Quoniam enim triangulum ABC, ad triangulum AGH, eſt vt latus AC, ad rectam AF, quod tres rectæ AC, AG, AF, continuè proportionales ſint, & triangu-



la ABC, AGH, ſuper AC, AG, ſimilia ſimiliterque poſita; Erit per conuerſionem rationis triangulum ABC, ad trapezium BCGH, vt AC, ad FC. Ergo diuidendo erit triangulum AGH, ad trapezium BCGH, vt AF, ad FC, hoc eſt, vt D, ad E. quod eſt propoſitum. Quod etiam ita colligemus.
[b] coroll. 19. ſexti.
[b] Quoniam eſt triangulum ABC, ad triangulum AGH, vt recta AC, ad AF; erit diuidendo trapezium BG, ad triangulum AGH, vt FC, ad AF: Et conuertendo triangulum AGH, ad trapezium BG, vt AF ad FC, hoc eſt, vt D, ad E.

ALITER.

[c] 1. ſexti.
[d] 2. huius.
[e] 7. quinti.

DIVISO latere quocunque, nimirum BC, in I, ſecundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta AI: [c] erit triangulum ABI, ad triangulum AIC, vt BI, ad IC; id eſt, vt D, ad E. [d] Si igitur ſuper BC, inter rectas BA, CA, conſtituatur trapezium BG, per parallelam GH, æquale triangulo AIC, quod eſt conſequens; erit reliquum triangulum AGH, reliquo triangulo ABI, æquale. [e] Quare erit triangulum AGH, ad trapezium BG, vt triangulum ABI, ad triangulum AIC, hoc eſt, vt BI, ad IC, vel vt D, ad E. Sed prior via expeditior eſt: placuit tamen hanc alteram etiam proponere; quia generalis fermè eſt, & in omnes figuras multilateras quadrat, vt infra patebit.

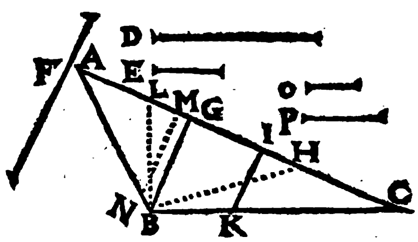
NON ſecus id, quod propoſitum eſt, exequemur, ſi antecedens proportionis vergere debeat ad latus BC, cui recta ducenda eſt parallela. Diuiſo enim rurſus latere AC, in K, ſecundum datam proportionem D, ad E, ita vt antecedens proportionis incipiat à latere BC; inueniatur inter totam AC, & eius partem AK, quæ eſt conſequens proportionis, media proportionalis AL, agaturque per L, lateri BC, parallela LM. Dico hanc parallelam problema efficere, hoc eſt, eandem eſſe proportionem trapezij BL, ad triangulum ALM, quæ eſt D, ad E.
[f] coroll. 19. ſexti.
[f] Quia enim eſt, vt triangulum ABC, ad triangulum ALM, ita CA, ad AK: quod tres rectæ AC, AL, AK, continuè ſint proportionales, & triangula ABC, ALM, ſuper AC, AL, ſimilia ſimiliterque poſita; Erit diuidendo trapezium BL, ad triangulum ALM, vt CK, ad AK, hoc eſt, vt D, ad E, quod eſt propoſitum. Hoc idem effici etiam poteſt via illa altera generali, quamuis non ita expeditè. Di-

uiſo

uiſo enim quocunque latere, nimirum B C, in I, ſecundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta AI, [a] erit triangulum ABI, ad triangulum AIC, vt BI, ad IC, id eſt, vt D, ad E. [b] Si igitur ſuper BC, inter rectas BA, CA, conſtituatur trapezium BL, per parallelam LM, æquale triangulo ABI, quod eſt antecedens: erit reliquum triangulum ALM, reliquo triangulo AIC, æquale. [c] Quare erit trapezium B L, ad triangulum A L M, vt triangulum ABI, ad triangulum AIC, hoc eſt, vt BI, ad IC, vel vt D, ad E.

a 1. ſexti.
b 2. huius.
c 7. quinti.

SED diuidendum iam ſit triangulum ABC, in datam proportionem D, ad E, per lineam parallelam cuicunque lineæ F: quæ ſi æquidiſtet vni laterum, partiemur triangulum in datam proportionem, per rectam illi lateri parallelam,



vt iam tradidimus, ſiue antecedens vergere debeat ad angulum lateri illi oppoſitum, ſiue ad ipſummet latus: factumque erit, quod iubetur; [d] cum parallela illa æquidiſtet etiam datæ rectæ lineæ.

d 30. primi.

SI verò data recta F, nulli laterum æquidiſtet, ducatur illi ex aliquo angulo parallela intra triangulum cadens, qualis eſt BG. Si igitur antecedens proportionis ſtatuendum ſit ad partes A, ſecabimus latus A C, in H, in datam proportionem D, ad E. Cadat autem primo punctum H, inter G, & C; inueniaturque inter GC, & eius partem CH, terminatam in angulo C, parallelæ BG, oppoſito media proportionalis C I; & per I, ipſi BG, vel ipſi F, parallela agatur IK; quam dico, problema efficere: hoc eſt, eſſe trapezium A B K I, ad triangulum IKC, vt D, ad E. [e] Quoniam enim eſt (ducta recta BH,) vt triangulum GBC, ad triangulum IKC, ita GC, ad CH; quod tres GC, CI, CH, ſint continuè proportionales, & triangula ſimilia ſimiliterque poſita: [f] Vt autem GC, ad CH, ita eſt quoque triangulum G B C, ad triangulum H B C; [g] erunt triangula I K C, HBC, æqualia: Ac proinde & reliquum trapezium A B K I, reliquo triangulo ABH, æquale erit. [h] Igitur erit vt trapezium ABKI, ad triangulum ICK, ita triangulum ABH, ad triangulum HBC: hoc eſt, ita AH, ad HC, vel ita D, ad E. quod eſt propoſitum.

e coroll. 19. ſexti.
f 1. ſexti.
g 9. quinti.
h 7. quinti.

CADAT deinde punctum L, (Ponimus iam datam proportionem E, ad D; diuiſamque eſſe A C, in L, ſecundum datam proportionem) inter A, & G. Inuenta ergo inter G A, & eius partem AL, terminatã in angulo A, parallelæ BG, oppoſito, media proportionali AM, agatur per M, ipſi GB, ideoque & ipſi F, parallela MN: quam dico problema efficere, hoc eſt, eſſe triangulum A M N, ad trapezium M N B C, vt E, ad D. Iuncta namque recta B L, [i] quoniam eſt, vt triangulum A B G, ad triangulum A M N, ita AG, ad AL: quod tres AG, AM, AL, continuè proportionales ſint, & triangula ſimilia ſimiliterque poſita: [k] Vt autem

i coroll. 19. ſexti.
k 1. ſexti.

[a] 9. *quinti.* autem AG, ad AL, ita eſt idẽ quoq; triangulũ ABG, ad triangulum ABL; [a] erunt triangula AMN, ABL, æqualia: ac proinde & reliquum trapezium MNBC, reliquo triangulo LBC, æquale erit. [b] Quapropter erit triangulum AMN, ad trapezium MNBC, vt triangulum ABL, ad triangulum L B C, [c] hoc eſt, vt AL, ad LC, vel E, ad D. quod eſt propoſitum,

[b] 7. *quinti.* [c] 1. *ſexti.*

Qvod ſi punctum diuiſionis caderet in G, quod contingeret, ſi data eſſet proportio O, ad P; Ipſamet parallela BG, problema efficeret; [d] cum ſit triangulum ABG, ad triangulum GBC, vt AG, GC, hoc eſt, vt O, ad P. Et ſi antecedens ſtatui debet verſus C, & data proportio eſſet P, ad O; [e] erit quoque triangulum CBG, ad triangulum ABG, vt CG, ad GA, vel vt P, ad O.

[d] 1. *ſexti.* [e] 1. *ſext.*

ALITER.

Diviso quouis latere, videlicet in AC, in H, ſecundum datam proportionem D, ad E, iunctaque recta BH; quia punctum H, cadit inter G, & C, fiat ſuper B G, inter rectas B C, G C, trapezium B I, per parallelam IK, æquale triangulo BGH: Eritque propterea totum trapezium ABKI, toti triangulo ABH, æquale, atque idcirco & reliquum triangulum IKC, reliquo triangulo BCH. [g] Quocirca erit trapezium ABKI, ad triangulum IKC, vt triangulum ABH, ad triangulum BCH, [h] hoc eſt, vt AH, ad HC, vel vt D, ad E.

[f] 2. *huius.* [g] 7. *quinti.* [h] 1. *ſexti.*

Diviso rurſus latere AC, in L, ſecundum datam proportionem E, ad D, iunctaque recta BL, quoniam punctum L, cadit inter A, & G. [i] fiat ſuper BG, inter rectas B A, GA, trapezium BM, per parallelam MN, æquale triangulo BGL; Eritque propterea & totum trapezium MNBC, toti triangulo L B C, & reliquum triangulum AMN, reliquo triangulo ABL, æquale, [k] Quam ob rem erit triangulum AMN, ad trapezium MNBC, vt triangulum ABL, ad triangulum LBC, [l] hoc eſt, vt AL, ad LC, vel vt E, ad D. quod erat faciendum.

[i] 2. *huius.* [k] 7. *quinti.* [l] 1. *ſexti.*

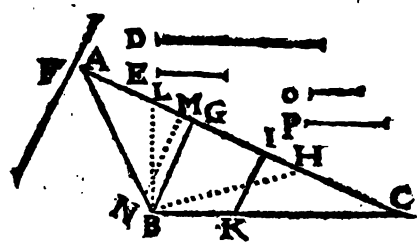
Non aliter problema abſoluemus, ſi antecedens proportionis vergere debeat ad partes C. Diuiſo namque latere C A, in L, in proportionem datam D, ad E: Quoniam punctum L, cadit inter A, & G: inueniemus inter GA, AL, mediam proportionalem A M, & per M, ipſi B G, parallelam ducemus MN, quam dico problema efficere, id eſt, ita eſſe trapezium MNBC, ad triangulum AMN, vt D, ad E. Iuncta namque recta BL: [m] quoniam triangulum ABG, ad triangulum AMN, eſt, vt AG, ad AL, quod tres AG, AM, AL, continuè ſint proportionales, & triangula ſimilia ſimiliterque poſita: [n] Vt autem AG, ad AL, ita eſt quoque idem triangulum ABG, ad triangulum ABL; [o] æqualia erunt triangula AMN, ABL; ac proinde & reliquum trapezium MNBC, reliquo triangulo L B C, æquale erit. Igitur erit trapezium MNBC, ad triangulum AMN, vt triangulum LBC, ad triangulum ABL, [p] hoc eſt, vt CL, ad LA, vel vt D, ad E.

[m] *coroll.* 19. *ſexti.* [n] 1. *ſexti.* [o] 9. *quinti.* [p] 1. *ſexti.*

Qvod ſi proportio data ſit E, ad D; diuiſo eodem latere CA, in H, in proportionem datam E, ad D, ductaque recta BH; quoniam punctum H, cadit inter G, & C, reperiemus inter GC, CH, mediam proportionalem CI, & per I, parallelam ipſi BG, agemus IK: quam dico problema efficere, hoc eſt, eſſe triangulum CIK, ad trapezium IKBA, vt CH, ad HA, vel vt E, ad D. Iuncta enim recta BH; [q] quoniam eſt triangulum CBG, ad triangulum CIK, vt CG, ad CH; quod tres CG, CI, CH, ſint continuè proportionales, & triangula ſimilia ſimiliterque

[q] *coroll.* 19. *ſexti.*

literque poſita: [a] Vt autem CG, ad CH, ita quoque eſt idem triangulum CBG; [a] *1. ſexti.*
ad triangulum CBH; [b] æqualia erunt triangula CIK, CBH: ideoque & reli- [b] *9. quinti.*



quum trapezium IKBA, reliquo triangulo HBA, æquale erit. [c] Quocirca erit [c] *7. quinti.*
triangulum CIK, ad trapezium IKBA, vt triangulum CBH, ad triangulum HBA,
[d] hoc eſt, vt CH, ad HA, vel vt E, ad D. quod faciendum erat. [d] *1. ſexti.*

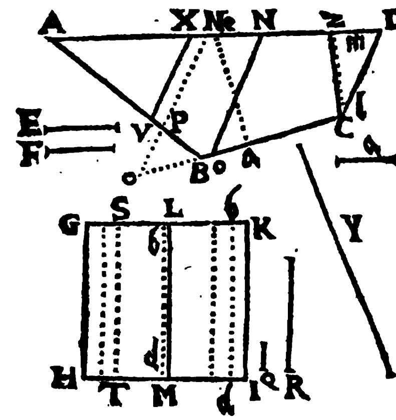
FIET idem quoque aliter, ſi cadente puncto diuiſionis L, inter A, & G,
[e] conſtruatur trapezium GN, per parallelam MN, æquale triangulo BGL; Ca- [e] *2. huius.*
dente verò puncto diuiſionis H, inter G, & C, trapezium conſtituatur BI, æqua-
le triangulo BGH, per parallelam IK, &c.

PRÆTEREA quadrilaterum ABCD, diuidendum ſit per lineam lateri
CD, parallelam in duas partes, vt pars verſus A, ad reliquam habeat datam pro-
portionem E, ad F. Per ea, quæ in ſcholio propoſ. 14. lib. 2. Euclid. vel potius per
ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius tradidimus, quadrilatero ABCD, conſtrua-
tur quadratum æquale GHIK; ſeceturque latus GK, in L, in proportionem E,
ad F, datam, & per L, ipſi GH, parallela agatur LM. Deinde ſuper CD, inter re-
ctas CB, DA, [f] fiat rectilineo LI, æquale quadrilaterum DO, habens latus NO, [f] *2. huius.*
lateri CD, parallelum: Et ſi quidem punctum O, cadit in latus CB, vel in ipſum
punctum B, recta NO, problema efficiet. Cum enim quadratum GI, toti qua-
drilatero AC, æquale ſit, & rectangulum ablatum LI, quadrilatero ablato DO;
erit quoque reliquum rectangulum GM, reliquo rectilineo ANO, æquale. [g] *7. quinti.*
[g] Quapropter erit ANO, ad DO, vt GM, ad MK; [h] hoc eſt, vt GL, ad LK, vel [h] *1. ſexti.*
vt E, ad F. quod eſt propoſitum.

SI verò punctum O, cadit in CB, latus productum, (quod hic fiet, ſi propor-
tio data ſit Q, ad R. Diuiſo enim latere GK, in S, in datam proportionem Q, ad
R; ductaque ST, parallela lateri GH; ſi ſuper CD, inter rectas DA, CB, [i] fiat re- [i] *2. huius.*
ctangulo KT, æquale quadrilaterum DO, cadet O, vltra B, & parallela NO, ſe-
cabit latus AB, in P.) [k] conſtituemus ſuper NP, inter rectas NA, PA, per paralle- [k] *2. huius.*
lam VX, trapezium NV, triangulo BOP, æquale, factum erit, quod iubetur. Ad-
dito enim communi rectilineo CDNPB; erit totum rectilineum CDXVB, toti
rectilineo DO, hoc eſt, rectangulo KT, æquale; ideoque & reliquum triangu-
lum AVX, reliquo rectangulo GT, æquale. [l] Quare erit triangulum AVX, ad [l] *7. quinti.*
rectilineum CDXVB, vt GT, ad KT, [m] hoc eſt, vt GS, ad SK, vel vt Q, ad R. [m] *1. ſexti.*
quod erat faciendum.

NON alia ratione problema abſoluemus, ſi antecedens proportionis ſtatuen-

dum ſit ad partes CD. Sit namque data proportio F, ad E, vel R, ad Q. Diuiſo ergo latere KG, quadrati GI, quod quadrilatero AC, factum eſt æquale, in L, ſe-



cundum propoꝛtionem datam F, ad E; vel in S, ſecundum datam proportionem R, ad Q, ductaque parallela LM, vel ST: [a] ſi ſuper CD, inter rectas DA, CB, conſtituemus rectilineum DO, rectangulo KM, vel rectilineum CDXVB, rectangulo KT, æquale per parallelam NO, vel XV, vt paulò ante dictum eſt, ſolutum erit problema, vt liquet.

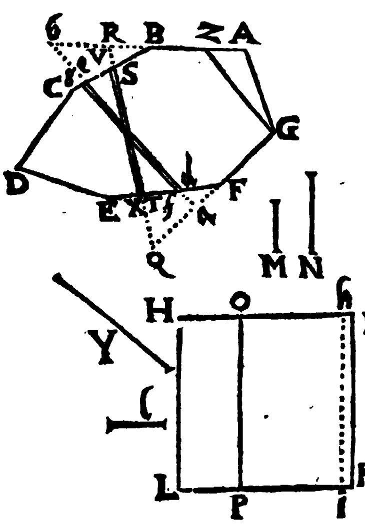
[a] 2. huius.

VERVM idem quadrilaterum ABCD, diuidendum ſit per parallelam cuilibet alteri lineæ Y, in proportionem E, ad F, ita vt antecedens proportionis vergat ad A; Si igitur data recta Y, æquidiſtet vni lateri, partiemur datum quadrilaterum in datam proportionem per lineam illi lateri, proindeque & rectæ Y, parallelam, vt proximè ſcripſimus. Si verò nulli lateri recta Y, æquidiſtet, ducemus ei ex aliquo angulo, vt ex C, parallelam CZ, quæ intra quadrilaterum cadat; & ablato triangulo CDZ, vel rectilineo ablato, auferemus ex quadrato GI, quod toti quadrilatero ſit æquale, rectangulum æquale Kd. (quod fiet, ſi triangulo, vel rectilineo CDZ, fiat æquale quadratum, cuius latus a; & duabus KI, & a, tertia proportionalis reperiatur Kb. Ducta enim bd, ipſi KI, parallela, [b] erit rectangulum Kd, quadrato lateris a, hoc eſt, rectilineo CDZ, æquale.) Et ſi quidem parallela bd, cadit inter KI, & LM, [c] conſtituemus ſuper CZ, inter rectas CB, ZA, rectilineum Caez, rectangulo bM æquale, cuius latus ae, lateri CZ, hoc eſt, datæ rectæ Y, æquidiſtet; factumque erit, quod præcipitur. Erit enim totum rectilineum CDea, toti rectangulo KM; ac propterea & reliquum ABae, reliquo GM, æquale. [d] Quapropter erit ABae, ad eaCD, vt GM, ad KM; [e] hoc eſt, vt GL, ad LK, vel vt E, ad F. Si verò parallela bd, coincidit cum recta LM, efficiet problema recta CZ: quia cum KM, rectilineo CDZ, ſit æquale, erit reliquum rectangulum GM, reliquo rectilineo ABCZ, æquale; [f] atque idcirco erit ABCZ, ad CDZ, vt GM, ad KM, [g] hoc eſt, vt GL, ad LK, vel vt E, ad F. Si denique parallela bd, cadit inter LM, & GH; erit rectilineum, vel triangulum ablatum CDZ, maius rectangulo KM. [h] Si igitur ſuper CZ, inter rectas CD, ZD, conſtruetur rectilineum Cm, rectangulo Ld, æquale; erit reliquum Dlm, reliquo rectangulo Gd, æquale: ac propterea

[b] 17. ſexti.
[c] 2. huius.
[d] 7. quinti.
[e] 1. ſexti.
[f] 7. quinti.
[g] 1. ſexti.
[h] 2. huius.

pterea ad reliquum m l C B A, reliquo rectangulo KM. [a] Igitur erit A B C l m, ad l m D, vt G M, ad KM: hoc eſt vt G L, ad L K, vel vt E, ad F. quod eſt propoſitum. [a] 7. quinti.

Eodem prorſus modo quamlibet aliam figuram, quotquot habeat latera, in datam proportionem ſecabimus per lineam, quæ vni lateri vel cuiuis alij rectæ lineæ æquidiſtet. Sit enim datum heptagonum qualecunque ABCDEFG, ſecandum per lineam lateri AG, parallelam, in duas partes, vt ea, quæ ad D, vergit, ad reliquam habeat proportionem eandem, quam M, ad N habet. Conſtituto quadrato H I K L, æquali ipſi heptagono, per ea, quæ in ſchol. propoſ. 14. lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quæ Num. 4. cap. 4. lib. 4. huius ſcripſimus; & diuiſo latere HI, in O, in proportionem M, ad N, ductaque OP, lateri HL, parallela: [b] fiat ſuper rectam A G, inter rectas A B, G F, rectangulo I P, æquale rectilineum A G Q R, habens latus Q R, lateri A G, parallelum. Et quoniam Q R, cadit vltra F, B, [c] conſtituemus rurſum ſuper rectam S T, inter rectas S C, T E, per rectam V X, ipſi S T, parallelam, rectilineum æquale triangulis F Q T, B R S, extra heptagonum exiſtentibus; factumque erit quod proponitur. Cum enim rectilineum A G Q R, ac proinde & rectilineum ABVXFG, rectangulo IP, ſit æquale, erit quoque reliquum DEXVC, reliquo rectangulo O L, æquale. [d] Igitur erit D E X V C, ad ABVXFG, vt O L, ad I P, [e] hoc eſt, vt HO, ad OI, vel vt M, ad N, quod erat faciendum. [b] 2. huius. [c] 2. huius. [d] 7. quinti. [e] 1. ſexti.



Qvod ſi latus rectilinei ex heptagono abſciſsi æquidiſtare debeat rectæ Y, q̃ nulli lateri heptagoni æqdiſtet (ſi náq; æquidiſtaret, vni lateri, abſolueretur problema, vt proximè traditũ eſt) ducta ex angulo G, rectæ Y, parallela GZ, quæ intra figurã cadat; [f] cõſtruemus rectilineo AGZ, ſuper rectã IK, æquale rectangulũ hK; quod fiet, ſi rectilineo AGZ, fiat æquale quadratum, cuius latus l, & duabus IK, & l, tertia proportionalis reperiatur I h. Ducta enim h i, ipſi I K, parallela, [g] erit rectangulum h K, quadrato lateris l, hoc eſt, rectilineo A G Z, æquale. [h] Deinde ſuper rectam G Z, inter rectas G F, Z B, conſtituemus rectangulo h P, per parallelam b a, æquale rectilineum G Z b a. [i] Nam ſi triangulis B b e, F a d, ſuper rectam d e, inter rectas e C, d E, fiat per parallelam f g, rectilineum d e g f, æquale; factum erit, quod in problemate proponitur, vt ex dictis perſpicuum eſt. Eademque omninò ratio eſt in omnibus aliis rectilineis quamuis irregularibus, dummodo in iis duci poſsit vna linea parallela datæ rectæ, quæ rectilineum auferat dato rectilineo æquale. Non enim ſemper hoc fieri poſſe in figuris, cuius anguli partim introrſum, & partim extrorſum vergant, ad finem propoſ. 2. huius lib. declarauimus. Id quod conſtructio ipſa problematis perſpicuè nos docebit. [f] 2. huius. [g] 17. ſexti. [h] 2. huius. [i] 2. huius.

SCHOLIVM.

Quo pacto figura data ſecetur per lineas parallelas in quotuis partes æquales.

DIVIDI ergo poterit quælibet figura rectilinea in quotuis partes æquales per lineas, quæ datæ cuiuis rectæ lineæ æquidiſtent. Nam ſi verbi gratia data figura ſecanda ſit in 8. partes æquales per lineas datæ rectæ parallelas, diuidemus eam primum in duas partes inter ſe proportionem habentes 1. ad 7. Ita namque prior pars erit $\frac{1}{8}$. totius figuræ. Deinde poſteriorem partem ſecabimus in proportionem 1. ad 6. ita vt prior pars huius diuiſionis ſit $\frac{1}{7}$. illius partis diuiſæ, hoc eſt, $\frac{1}{7}$. totius figuræ, cum pars illa diuiſa complectatur $\frac{7}{8}$. totius figuræ. Poſtea partem poſteriorem proximæ diuiſionis partiemur in proportionem 1. ad 5. Et poſteriorem huius diuiſionis partem in proportionem 1. ad 4. Atque ita deinceps, minuendo ſemper, donec ad partem deueniamus, quæ ſecanda ſit in proportionem 1. ad 1. hoc eſt, in partes æquales.

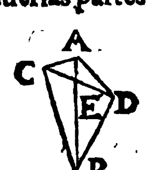
HOC idem effici poterit ea ratione, quam ad finem ſcholij propoſ. 4. expoſuimus: ſi videlicet latus quadrati HI, quod rectilineo dato conſtructum eſt æquale, in tot æquales partes ſecetur, in quot partes datum rectilineum diuidendum eſt, & primo rectilineum diuidatur in proportionem primæ partis ad reliquas: Deinde poſterior pars rectilinei in proportionem ſecundæ partis lateris HI, ad reliquas: atque ita deinceps, &c.

ATQVE hic finem habet noſtra Geodæſia complectens diuiſionem omnium figurarum rectilinearum: ſequuntur iam particulares nonnullæ diuiſiones quarundam figurarum, quæ tum, quia ſubtiles acutaſque demonſtrationes continent, tum quia pleraſque earum eruditi quoque Geometræ, vt Leonardus Piſanus, Frater Lucas Pacciolus, & Nicolaus Tartalea tradiderunt, omittendæ nullo modo viſæ ſunt: Vt autem Geometricè eas demonſtremus, præmittenda ſunt Theoremata nonnulla, quorum primum ſit hoc.

THEOREMA 2. PROPOS. 6.

SI duo triangula æqualia habeant vnum latus commune, & in diuerſas partes vergant: Recta oppoſitos angulos connectens à latere illo communi bifariam ſecatur.

SINT æqualia duo triangula ABC, ABD, habentia latus AB, commune, & in diuerſas partes vergentia. Dico rectam CD, oppoſitos angulos C, D, iungentem ſecari in E, bifariam à latere comuni AB. [a] Quoniã enim eſt tam triangulum ACE, ad triangulum ADE, quàm triangulum BCE, ad triangulum BDE, vt CE, ad ED; [b] erit triangulum ACE, ad triangulum ADE, vt triangulum BCE, ad triangulum BDE. [c] Igitur erunt quoque duo triangula ſimul ACE, BCE, hoc eſt, totum triangulum ABC, ad duo triangula ſimul ADE, BDE, id eſt, ad totum triangulum ABD, vt ACE, ad ADE, hoc eſt, vt CE, ad ED. Cum ergo triangula ABC, ABD, ponantur æqualia; erunt quoque rectæ CE, ED, æquales, ac proinde CD, in E, ſecta eſt bifariam. quod erat oſtendendum.



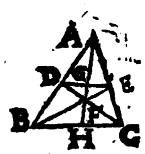
[a] 1. ſexti.
[b] 11. quinti.
[c] 12. quinti.

THEOR.

THEOR. 3. PROPOS. 7.

SI in triangulo baſi parallela ducatur, & extrema parallelarum rectis iungantur ſe ſe interſecantibus: habebit vtriuſuis harum rectarum ſegmentum ab angulo incipiens ad reliquum in latere terminatum eandem proportionem, quam latus ab illa recta diuiſum ad partem eius ſuperiorem. Recta autem ex tertio angulo per interſectionem dictarum rectarum extenſa ſecabit vtramque parallelam bifariam.

IN triangulo ABC, ducta ſit DE, baſi BC, parallela, & iunctæ rectæ BE, CD, ſe interſecent in F. Dico eſſe BF, ad FE, vt AC, ad AE: Item CF, ad FD, vt AB, ad AD. Et iunctam rectam AF, ſecare parallelas DE, BC, bifariam in G, & H. [a] Quoniam enim triangula B D C, C E B, æqualia ſunt; ablato communi BFC, reliqua BDF, CEF, æqualia quoque erunt. [b] Quia verò eſt, vt B D, ad D A, ita C E, ad EA: [c] Vt autem BD, ad DA, ita eſt triangulum BFD, ad triangulum AFD: Et vt CE, ad EA, ita triangulum CFE, ad triangulum AFE; erit quoque triangulum BFD, ad triangulum AFD, vt triangulum CFE, ad triangulum AFE. Cum ergo triangulum BFD, triangulo CFE, oſtenſum ſit æquale; [d] erit quoque triangulum AFD, triangulo A F E, æquale. [e] Igitur DE, in G, ſecta eſt bifariam: [f] ac proinde & parallela BC, ſecta erit bifariam in H. [g] Et quoniam triangulum AFB, ad triangula æqualia AFD, AFE, eandem habet proportionem; [h] eſtque vt AFB, ad AFD, ita AB, ad AD: Et vt AFB, ad AFE, ita BF, ad FE: erit quoque BA, ad AD, ideoque AC, ad AE, vt BF, ad FE: Eademque ratione erit A B, ad AD, vel A C, ad A E, vt C F, ad F D. quod etiam inde patet; [i] cum ſit vt C F, ad F D, ita C F E, ad D E F, hoc eſt, ita B F D, ipſi CFE, æquale ad idem DEF, [k] hoc eſt, ita BF, ad FE. quod erat demonſtrandum.



[a] 37. primi.
[b] 2. ſexti.
[c] 1. ſexti.
[d] 14. quinti.
[e] 6. huius.
[f] ſchol. 4. ſexti.
[g] 7. quinti.
[h] 1. ſexti.
[i] 1. ſexti.
[k] 1. ſexti.

THEOR. 4. PROPOS. 8.

SI in triangulo à duobus angulis duæ rectæ ducantur ad media puncta oppoſitorum laterum: Recta ex angulo reliquo per interſectionem earum deducta ſecat quoque reliquum latus bifariam. Cuiuslibet autem illarum trium linearum ſegmentum prope angulum ad reliquum ſegmentum duplam habet proportionem. Triangulum denique per rectas ab interſectione ad angulos ductas in tria triangula æqualia diuiditur.



IN triangulo præcedentis propoſ. ABC, duæ rectæ BE, CD, ſecent latera AC, AB, bifariam in E, D, ſe autem mutuo interſecent in F. Dico rectam ductam AF, ſecare quoque latus BC, bifariam in H, &c. [l] Iuncta enim recta D E, parallela erit ipſi B C, cum ſecet latera A B, A C, proportionaliter, in partes videlicet æquales: [m] Quamobrem A F, vtramque parallelam D E, B C, bifariam ſecabit. quod eſt primum.

[l] 2. ſexti.
[m] 7. huius.

[a] 7. *huius.* DEINDE [a] quia eſt,vt AB,ad AD,ita CF,ad FD: Eſt autem AB, ipſius AD, dupla; erit quoque CF,ipſius FD,dupla. Eademque ratione & BF, ipſius FE; & AF,ipſius FH,dupla erit. quod eſt ſecundum.

[b] 1. *ſexti.* POSTREMO [b] quia eſt vt AF,ad FH,ita triangulum A F B, ad triangulum BFH: Eſt autem AF,ipſius F H, oſtenſa dupla; erit quoque triangulum A F B,

[c] 38. *primi.* trianguli B F H ,duplum. Eſt autem & triangulum B F C, eiuſdem trianguli B-FH,duplum; [c] quod triangula B F H,C F H,æqualia ſint. Igitur æqualia erunt triangula AFB,BFC. Eodemq; modo triangulum AFC, eidem triangulo BFC, æquale erit: ac proinde omnia tria AFB, BFC, CFA , æqualia erunt. quod eſt tertium.

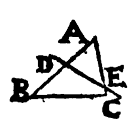
COROLLARIVM.

ITAQVE facilè inueniri poteſt punctum intra triangulum, à quo tres rectæ ad tres angulos ductæ ipſum triangulum in tria æqualia triangula partiantur. Huiuſmodi enim punctum in propoſito triangulo eſt F, vbi duæ rectæ ex duobus quibuſuis angulis ad media puncta oppoſitorum laterum ductæ ſe interſecant;vt in tertia parte huius propoſ. oſtendimus.

THEOR. 5. PROPOS. 9.

SI in triangulo ducatur recta vtcunque duo latera ſecans: Erit totum triangulum ad abſciſſum triangulum, vt rectangulum ſub duobus lateribus ſectis totius trianguli comprehenſum, ad rectangulum ſub duobus lateribus trianguli abſciſſi,quæ priorum ſegmenta ſunt,comprehenſum.

IN triangulo ABC,recta D E,ſecet latera A B,A C,in D, E. Dico eſſe vt rectangulum ſub AB, AC, ad rectangulum ſub AD, AE,ita triangulum ABC,ad triangulum ADE. Quoniam enim triangula ABC,ADE,angulum habent communem A;habebunt per propoſ. 4. ſchol. propoſ. 23. lib. 6. Euclid. eandem proportionem, quam rectangula ſub lateribus AB, A C, & ſub A D, AE,comprehenſa. quod oſtendendum erat.

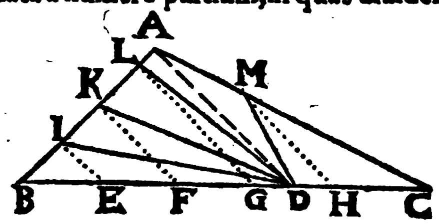


PROBL. 5. PROPOS. 10.

DATVM triangulum ex dato puncto in eius latere in quotlibet partes æquales diuidere.

PROPOSITIONE quartadecima ſcholij propoſ. 33. lib. 6. Euclid. tradidimus regulam, qua triangulum in duas partes ſecundum datam proportionem diuidendum ſit: Et quo pacto ex triangulo pars imperata ſit auferenda. Si igitur triangulum ex dato puncto in eius latere quouis ſecandum ſit in quotlibet partes

partes æquales, detrahenda primum erit per lineam rectam ex dato puncto ductam pars denominata à numero partium, in quas diuidendum eſt triangulum.



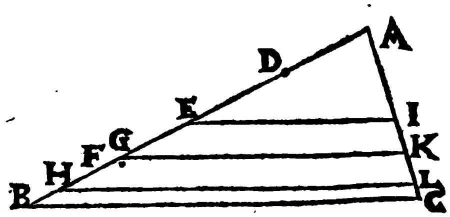
Deinde duæ tales partes: poſtea tres, atque ita deinceps, donec tot partes, vna minus, detractæ ſint, in quot partes diuidendum proponitur triangulum. Vt ſi triangulum ABC, ex puncto D, diuidendum ſit in quinque partes æquales, diuidemus latus BC, in quo datum punctum eſt, in quinque partes æquales, in punctis E, F, G, H. Iuncta deinde recta DA, ducemus ei parallelas EI, FK, GL, HM. Si namque connectantur rectæ DI, DK, DL, DM, diuiſum erit triangulum in quinque partes æquales. Nam vt in dicta propoſ. 14. ſcholij propoſ. 33. lib. 6. Euclid. oſtenſum eſt, triangulum DBI, eſt $\frac{1}{5}$. totius trianguli, hoc eſt, ita ſe habet DBI, ad ABC, vt BE, ad BC. Triangulum autem DBK, continet $\frac{2}{5}$. totius trianguli, id eſt, ita ſe habet DBK, ad ABC, vt BF, ad BC. At vero triangulum DBL, complectitur $\frac{3}{5}$. totius trianguli, id eſt, ita ſe habet DBL, ad ABC, vt BG, ad BC. Quadrilaterum denique ABDM, comprehendit $\frac{4}{5}$. totius trianguli, hoc eſt, ita ſe habet ABDM, ad ABC, vt BH, ad BC. Ex quo fit, reliquum triangulum DMC, eſſe $\frac{1}{5}$. eiuſdem trianguli ABC.

QVANDO punctum datum eſt in vno angulo, manifeſtum eſt, ſi latus oppoſitum in tot partes ſecetur, in quot triangulum diuidendum eſt, [a] rectas ex eo angulo ad puncta diuiſionum eductas ſecare triangulum in propoſitas partes æquales. [a] 1. ſexti.

PROBL. 6. PROPOS. 11.

DATVM triangulum per lineas vni lateri parallelas in quotlibet æquales partes diuidere,

SIT triangulum ABC, diuidendum verbi gratia in quatuor partes æquales per lineas lateri BC, æquidiſtantes. Secetur vtrumuis reliquorum laterum ni-



mirum AB, in 4. partes æquales, in tot videlicet, in quot triangulũ diuidendum eſt, in punctis D, E, F. Et inter AB, AD, inuenta media proportionali AE;

atque

atque inter AB; AE, media proportionali A G; ac denique inter AB, AF, media proportionali AH; ducantur EI, GK, HL, lateri BC, parallelæ, quas dico triangulum partiri in 4. partes æquales. [a] Quoniam enim triangulum ABC, triangulo AEI, ſimile eſt; [b] erit triangulum ABC, ad triangulum A E I, vt A B, ad AD, quod tres A B, A E, A D, ſint continuè proportionales. Eſt autem A D, quarta pars ipſius AB. Igitur & triangulum AEI, quarta pars eſt trianguli ABC.

a corell. 4. ſexti.
b corell. 19. ſexti.
c corell. 19. ſexti.

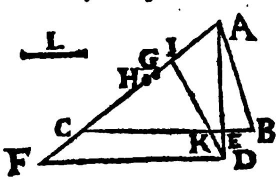
[c] NON aliter oſtendemus, eſſe triangulum A B C, ad triangulum A G K, vt AB, ad AE, quod etiam tres AB, AG, AE, ſint continue proportionales. Quare cum AE, contineat ½. rectæ AB, continebit etiam AGK, triangulum ½. trianguli ABC: Ideoq; cum AEI, ſit ¼. trianguli ABC, vt oſtendimus, erit EIKG, ¼. eiuſdem trianguli A B C. Deniq; eadem ratione erit triangulum A B C, ad triangulum AHL, vt AB, ad AF, quod etiam tres AB, AH, AF, ſint continue proportionales: ac proinde triangulum AHL, complectetur ¾. trianguli ABC; quemadmodum AF, continet ¾. ipſius AB: ideoq; BHLC, erit ¼. trianguli ABC, &c.

PROBL. 7. PROPOS. 12.

DATVM triangulum per rectam ex puncto extra triangulum dato ductam in duas partes æquales diuidere.

d 38. primi.
e 16. ſexti.
f 1. ſexti.
g 17. ſexti.

Ex puncto D, extra triangulum A B C, dato ducenda ſit linea diuidens triangulum bifariam. Ducta recta D A, ad angulum oppoſitum ſecante latus B C, in E: ſi quidem B C, in E, diuiditur bifariam, factum erit, quod iubetur: [d] quod tunc triangula ABE, ACE, ſint æqualia. Si vero B C, non bifariam diuiditur in E, ſit ſegmentum CE, maius, cui ducatur parallela DF, occurrens lateri AC, producto in F. Secto latere AC, bifariam in G, inueniatur tribus DF. BC, CG, quarta proportionalis CH; [e] Eritque rectangulum ſub DF, CH, æquale rectangulo ſub B C, C G; hoc eſt ſemiſsi rectanguli ſub B C, C A: [f] cum rectangulum ſub B C, C A, duplum ſit rectanguli ſub B C, C G. Deinde



inuenta L, media proportionali inter FC, CH, [g] vt quadratum ex L, æquale ſit rectangulo ſub FC, CH, adiūgatur ipſi CH, recta HI, vt rectangulum ſub tota CI, & adiuncta HI, ęquale ſit quadrato ex L, ſiue rectangulo ſub F C, C H, quemadmodum ad finem ſcholij propoſ. 36. lib. 3. Euclid. ſcripſimus: ducaturque recta DI, ſecans BC, in K. Dico rectam DI, ſecare triangulum ABC, in duas partes ABKI, IKC, æquales. Quoniam enim per conſtructionem rectangulū ſub CI, IH, æquale eſt rectangulo ſub CF, CH, [h] erit vt CI, ad CF, ita CH, ad IH; Et cōuertendo, vt CF, ad CI, ita IH, ad CH: & cōponēdo vt IF, ad CI, ita CI, ad CH. [i] Vt aūt IF, ad CI, ita eſt FD, ad CK. Igitur erit quoq; FD, ad CK, vt CI, ad CH: [k] Ac pinde rectangulū ſub FD, CH, æquale erit rectangulo ſub CK, CI: Erat aūt rectangulū ſub FD, CH, per conſtructionē æquale ſemiſsi rectanguli ſub BC, CA. Igitur & rectangulum ſub C K, C I, æquale erit ſemiſsi rectanguli ſub B C, CA. Vt autem rectangulum ſub CK, CI, ad rectangulum ſub BC, CA, [l] ita eſt triangulum CK I, ad triangulum ABC. Igitur triangulum CK I, æquale quoque erit

h 16. ſexti.
i 4. ſexti & permutando.
k 16. ſexti.
l 9. huius.

erit ſemiſsi trianguli ABC: ac proinde quadrilaterum ABKI, reliquæ ſemiſsi trianguli ABC, æquale erit. quod eſt propoſitum.

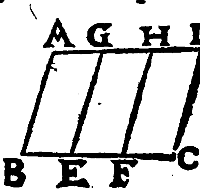
EADEM ratione, ſi pro CG, ſumamus $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{4}$. vel quamcumque partem lateris AC, & reliqua fiant, vt ſupra, auferemus per rectam ex D, ductam $\frac{1}{3}$. vel $\frac{1}{4}$. vel deniq; talē partem ex triangulo ABC, qualis ſumpta eſt C G, ipſius A C, vt perſpicuum eſt.

LEONARDVS Piſanus, & Nicolaus Tartalea, idem hoc problema ſoluūt, quando datum punctum eſt extra triangulum in tali loco, vt vnum latus trianguli productum, in illud incidat, cuiuſmodi eſſet punctum F, datum. Item quando eſt inter duo latera producta: Vt ſi triangulum foret AEC, punctū autem inter B, & D, exiſteret, ita vt ab eo ſolum per angulum E, duci poſſet linea ſecans latus A C: quippe cum rectæ ab eo ad angulos A, C, ductæ nullum latus interſecarent. Verum quia hęc curioſa magis, quam vtilia ſunt, dedita opera à nobis omittuntur. Qui autem ea deſiderat, auctores prædictos legere poterit. Pari ratione abſtinemus ab eo problemate, quando punctum datum eſt intra triangulum (quod tamen iidem auctores ſoluere conantur) quia non ſemper per punctum interius duci poteſt linea, quæ triangulū bifariam ſecet, vt experientia conſtat.

PROBL. 8. PROPOS. 13.

DATVM parallelogrammum in quotcunq; partes æquales per lineas duobus lateribus oppoſitis æquidiſtantes diuidere.

SIT parallelogrammum ABCD, diuidendum verbi gratia in tres partes æquales per lineas lateribus AB, DC, æquidiſtantes. Diuiſo alterutro reliquorum duorum laterum, nimirum B C, in tres partes æquales, in quot videlicet parallelogrammum proponitur diuidendum, in E, & F, punctis, ducantur EG, FH, ipſis AB, DC, parallelæ: factumque erit, quod iubetur; [a] quod parallelogramma A E, E H, H C, ęqualia ſint, propter æquales baſes BE, EF, FC.



[a] 1. ſexti vel 38. primi.

COROLLARIVM.

ITAQVE ſi ex latere auferatur $\frac{1}{2}$. vel $\frac{1}{3}$. vel $\frac{3}{4}$. vel denique qualiſcunque pars, vel partes, & per extremum eius punctum parallela lateri AB, ducatur, ablata erit ex toto parallelogrammo eadem pars, vel eædem partes. Ita vides AE, eſſe partem tertiam parallelogrammi A C, quemadmodum & B E, tertia pars eſt lateris B C, &c.

PROBL. 9. PROPOS. 14.

DATVM parallelogrammum per rectam ex puncto ſiue extra, ſiue intra ipſum, ſiue in aliquo latere dato ductam, bifariam diuidere.

Sit primò parallelogrammum A B C D, per rectam ex puncto E, exteriori ductam ſecundum bifariam. Ducta diametro B D, eaque ſecta bifariam in F, ducatur ex E, per F, recta EH, quam dico parallelogrammum partiri bifariam. Nam vt in ſcholio Propoſ. 34. lib. 1. Euclid. demonſtrauimus, recta G H, diuidens diametrum B D, in F, bifariam, ſecat parallelogrammum bifariam. Idem fiet, ſi recta IK, latera AD, BC, ſecans bifariam, diuidatur bifariam in F, & per F, extendatur recta E F, propterea quod I K, diametrum ſecat bifariam, ac proinde per F, punctum medium diametri tranſit.



a 29. primi.
b 26. primi.

a Cum enim anguli IDF, F I D, angulis alternis KBF, F K B, æquales ſint, & latera I D, KB, quibus adiacent, æqualia; b erunt tam latera D F, quam I F, K F, inter ſe æqualia.

Eodem modo ex puncto interiori L; Item ex puncto G, in latere BC, recta ducta LF, vel GF, parallelogrammum bifariam diuidet.

PROBL. 10. PROPOS. 15.

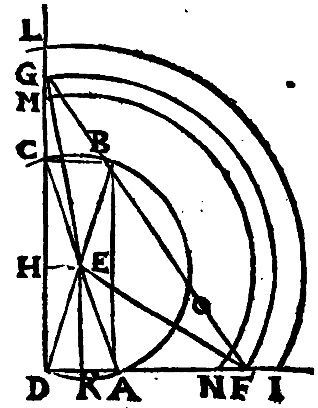
INTER datas duas rectas, duas medias proportionales prope verum inuenire.

Exposita Geodæſia noſtra prioribus quinq; propoſitionibus huius lib. & nouem alijs propoſitionibus, ijs demonſtratis, quæ addenda eſſe cenſuimus ad idem argumentum ſpectantia: agendum iam eſſet de augendis minuendisq; figuris in data proportione, vt in titulo huius lib. 6. propoſuimus. Verum quia ſicut id in planis figuris effici non poteſt ſine inuentione mediæ proportionalis inter duas rectas propoſitas, quam inuentionem Euclid. lib. 6. propoſ. 13. nobis tradidit: ita idem abſolui in figuris ſolidis nulla ratione poteſt, niſi inter duas rectas datas duæ mediæ reperiantur proportionales. Quocirca prius in hac propoſ. in medium afferemus, quæ antiqui Geometræ nobis hac de re ſcripta relinquerunt. Multorum enim ingenia res hæc exercuit, atque torſit, quamuis nemo ad hanc vſque diem, verè, ac Geometricè duas medias proportionales inter duas rectas datas inuenerit. Prætermiſsis autem modis Eratoſthenis; Platonis; Pappi Alexandrini; Spori; menechmi tum beneficio Hyperbolę, ac parabolę, tum ope duarum parabolarum; & Architæ Tarentini, quamuis acutiſsimis ſubtiliſsimiſque: ſolum quatuor ab Herone, Apollonio Pergæo, Philone Byſantio, Philoppono, Diocle, & Nicomede traditos explicabimus, quos cõmodiores, facilioreſque, & errori minus obnoxios iudicauimus. Qui aliorum rationes deſiderat, legere eas poterit in Commentarijs Eutocij Aſcalonitæ in librum 2. Archimedis de Sphęra, & Cylindro: Item in libello Ioannis Verneri Norimbergenſis de ſectionibus Conicis. Hinc itaque exordiamur.

MODVS HERONIS IN MECHANICIS introductionibus, & telis fabricandis: qui etiam Apollonio Pergæo aſcribitur.

Sint duæ lineę rectę AB, BC, inter quas oporteat duas medias proportionales inquirere. Conſtituantur ad angulum rectum B, & perficiatur rectangulũ ABCD.

ABCD, cum diametris AC, BD, [a] quæ ſe mutuo biſariam diuident in E. Satis eſſet vnam tantum diametrum ducere, eamque in E, ſecare biſariam. Protractis autem lateribus DA, DC, intelligatur circa punctum B, moueri regula hinc inde, donec ita ſecet DA, DC, productas in F, & G, vt rectæ emiſſæ EF, EG, ęquales ſint. Vel certè, vt vult Apollonius, ex E, plures circuli deſcribantur LI, GF, MN, donec chorda arcus vnius pręciſè per punctum B, incedat, qualis eſt GF. Quod ſi chorda ſupra B, tranſeat, cuiuſmodi eſt chorda LI, deſcribendus erit circulus ĩ.L; Si verò infra punctũ B, tranſeat, qualis eſt chorda MN, deſcribēdus erit circul⁹ s̃.M. Atque hoc opus toties iterandum, donec aliqua chorda, qualis eſt GF, per B, incedat. Erunt enim hac ratione EF, EG, ex centro E, ad circumferentiam GF, inter ſe ęquales. Quibus ita constructis. Dico AF, CG, eſſe medio loco proportionales inter AB, BC: hoc eſt, ita eſſe AB, ad AF, vt AF, ad CG, & CG, ad CB. Diuiſis enim AD, CD, biſariam in K, & H; [b] erunt ductę EK, EH, ad AD, CD, perpendiculares. [c] Quoniam verò rectangulum ſub DF, AF, vna cum quadrato ex AK, quadrato ex KF, ęquale eſt; addito communi quadrato ex EK, erit rectangulum ſub DF, AF, vna cum quadratis ex AK, EK, [d] hoc eſt, vna cũ quadrato ex EA, ęquale quadratis ex KF, EF, [e] hoc eſt, quadrato ex EF, hoc eſt, quadrato ex EG, quę ipſi EF, eſt æqualis. Eadem ratione oſtendemus, rectangulum ſub DG, GC, vna cum quadrato ex CE, id eſt, ex EA, ęquale eſſe eidem quadrato ex EG. Igitur rectangulum ſub DF, AF, vna cum quadrato ex EA, ęquale erit rectangulo ſub DG, GC, vna cum quadrato ex EA: demptoque communi quadrato EA; remanebit rectangulum ſub DG, GC, rectangulo ſub DF, AF, ęquale. [f] Quocirca erit DG, ad DF, vt AF, ad CG: [g] Vt autem DG, ad DF, ita eſt AB, ad AF. Ergo erit vt AB, ad AF, ita AF, ad CG: hoc eſt, tres AB, AF, CG, continuè proportionales erunt. [h] Sed rurſus eſt, vt DG, ad DF, ita CG, ad CB. Igitur erit quoque CG, ad CB, vt AB, ad AF; ideoq; vt AF ad CG. Quare erunt quatuor AB, AF, CG, CB, continuè proportionales. quod erat demonſtrandum.



[a] ſchol. 34. primi.
[b] ſchol. 26. primi.
[c] 6. ſecundi.
[d] 47. primi.
[e] 47. primi.
[f] 16. ſexti.
[g] 4. ſexti.
[h] 4. ſexti.

MODVS PHILONIS BYSANTII, qui Philoppono quoque tribuitur.

SINT rurſus in eadem figura inter rectas AB, BC, inueniendę duę medię proportionales. Conſtituto rectangulo ABCD, vna cum diametro CA, productiſq; lateribus DA, DC, vt ſupra; deſcribatur ex E, medio puncto diametri circulus CBA, ad interuallum EC, vel EA, [i] qui neceſſario per angulum rectum B, tranſibit. Deinde circa punctum B, regula hinc inde moueatur, ſecans DA, DC, protractas in F, & G, & circumferentiam in O, donec BG, OF, ęquales ſint. Quod fiet, ſi per B, plurimę lineę occultę ducantur. Vna enim earum habebit ſegmentum inter rectam DG, & circulum æquale ſegmento inter DF, & eundē

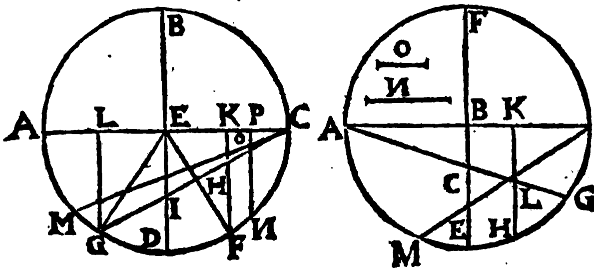
[i] ſchol. 31. tertij.

circulum. Quibus peractis, dico AF, CG, medias proportionales eſſe inter AB, CB. Quoniam enim æquales ſunt GB, FO; addita communi BO, æquales quoque erunt GO, FB: ideoque rectangulum ſub GO, GB, rectangulo ſub FB, FO, æquale erit. [a] Sed illud rectangulo ſub DG, GC, & hoc rectangulo ſub DF, AF, eſt æquale. Igitur & rectangulum ſub DG, GC, rectangulo ſub DF, AF, æquale erit. Quamobrem, vt in præcedenti modo, oſtendemus; AB, AF, CG, CB, eſſe continue proportionales. quod eſt propoſitum.

[a] 1. coroll. 36. tertij.

MODIS DIOCLIS IN LIBRO DE Piriis pulcherrimus.

PRÆMITTIT prius Diocles Lemma tale. Deſcribatur circulus ABCD, cuius centrum E, cum diametris AC, BD, ſeſe ad angulos rectos ſecantibus in centro E. Sumptis deinde duobus arcubus æqualibus DF, DG, iungatur recta CG, & per F, ipſi BD, parallela agatur FK, ſecans CG, in H. Hoc facto, erunt



FK, KC, mediæ proportionales inter AK, KH. Ducta namque GL, parallela ipſi BD, iunctiſque rectis EF, EG, [b] quoniam anguli LEG, KEF, inſiſtentes arcubus æqualibus AG, CF, æquales ſunt, [c] & anguli L, K, recti, lateraque EG, EF, æqualia; [d] erunt & GL, FK, & EL, EK, inter ſe æquales: ideoque & reliquæ AL, CK; Immo addita communi LK, & totæ AK, CL, æquales inter ſe erunt. [e] Quoniam igitur eſt CL, ad LG, vt CK, ad KH: eſtque vt CL, ad LG, ita AK, ad KF, quod hæ illis æquales ſint: erit quoque AK, ad KF, vt CK, ad KH. [f] Vt autem AK, ad KF, ita eſt KF, ad CK. Igitur erit AK, ad KF, vt KF, ad CK, & CK, ad KH, hoc eſt, KF, CK, mediæ proportionales erunt inter AK, KH. quod eſt propoſitum. Pari ratione, ſi, ſumptis arcubus æqualibus DM, DN, iunctaq; recta CM, ducatur NP, ipſi BD, parallela ſecans CM, in O; erunt PN, CP, inter AP, PO, mediæ proportionales, &c.

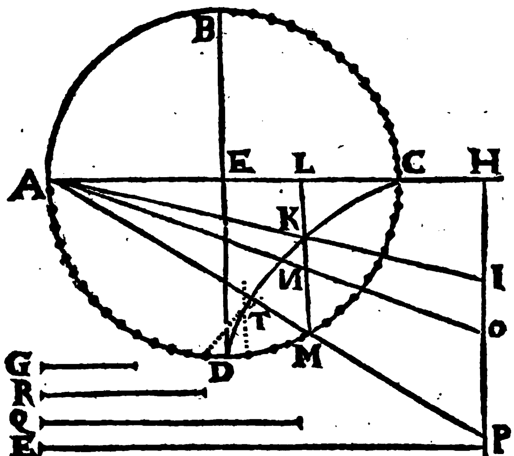
[b] 27. tertij.
[c] 27. primi.
[d] 26. primi.
[e] 4. ſexti.
[f] ſchol. 13. ſexti.

HOC lemmate præmiſſo, ſint inter rectas AB, BC, reperiendæ duæ mediæ proportionales. Conſtituantur in altera figura ad angulum rectum B, & centro B, ad interuallum maioris BA, deſcribatur circulus AFDE, ad cuius circumferentiam vſque protendantur AB, BC. Deinde ex A, per C, ducta recta ACG, ſumatur in quadrante DE, punctum H, in tali ſitu, vt ducta HK, ipſi EF, parallela ſecante ipſam AG, in L; recta ex D, per L, emiſſa auferat arcũ EM, arcui EH, æqualem. Nam hac ratione, per lemma præmiſſum, erunt KH, DK, mediæ proportionales inter AK, KL. [g] Et quoniam eſt vt AK, ad KL, ita AB, ad BC: ſi fiat, vt AK, ad KH, ita AB, ad N; & vt KH, ad DK, ita N, ad O; erunt quoque N, O, mediæ proportionales inter AB, BC. Neque enim dubitandum eſt, eſſe & O, ad BC, vt DK, ad KL. Cum enim ſit, vt AK, ad KL, ita AB, ad BC: habeat

[g] 4. ſexti.

habeat autem AK, ad KL, proportionem triplicatã AK, ad HK, hoc eſt, AB, ad N; habebit etiam AB, ad BC, triplicatam proportionẽ AB, ad N. Cum ergo proportio AB, ad N, ſit æqualis proportioni N, ad O; erit eidem æqualis proportio O, ad B C, vt tres æquales proportiones exiſtant inter A B, & B C. Igitur quatuor AB, N, O, BC, continuè proportionales ſunt, quemadmodum quatuor AK, KH, DK, KL. quod eſt propoſitum.

VERVM, quia difficile viſum fuit Diocli accipere in poſteriori figura punctum H, in tali ſitu, vt recta DM, ſecans AG, & parallelam HK, in L, auferat arcum EM, arcui EH, æqualem: deſcripſit lineam quandam inflexam ad hanc rem aptiſsimam, hac ratione. Deſcribatur circulus A B C D, cuius centrum E, cum diametris AC, BD, ſeſe ad angulos rectos in E, ſecantibus. Deinde in quadrante CD, capiantur quotcunque puncta parum inter ſe diſtantia, quæ ex D, & B, ordine in quadrantes D A, BC, transferantur. Poſt hæc applicata regula ad bina puncta quadrantum DC, BC, æqualiter à B, D, diſtantia, ducantur rectæ occul-



tæ,[a] quæ ipſi BD, parallelę erunt. Et ex C, ad ſingula puncta quadrantis D A, rectę occultæ emittantur, notenturque harum interſectiones cum prædictis parallelis occultis; nimirum punctum T, vbi recta ex C, ad proximum punctum ipſi D, ducta interſecat proximam parallelam ipſi B D, & ſic deinceps. Nam ſi omnia hæc interſectionum puncta ritè per lineam inflexam coniungantur, qualis eſt CKTD, conſtructa erit figura mediis duabus proportionalibus inueniendis aptiſsima. Sint enim inter duas F, G, duæ mediæ proportinales inueniendæ. In diametro AC, etiam producta, ſi opus eſt, ſumatur AH, maiori F, æqualis. Ducta deinde perpendiculari HP, abſcindatur HI, minori G, ęqualis. Ducta autem AI, ſecante lineam inflexam in K, agatur per K, ipſi BD, parallela LM. Denique ſumpta L N, ipſi LC, æquali, ducantur per N, & M, rectæ AN, AM, ſecantes HP, in O, P. Dico HP, HO, eſſe medias proportionales inter AH, HI, hoc eſt, inter F, & G. Quoniam enim punctum K, lineæ inflexæ inuentum eſt per rectam ad punctum quadrantis D A, ductã, quod tanto interuallo à puncto D, abeſt, quanto punctum M, ab eodem diſtat, vt ex deſcriptione lineæ inflexæ liquet; erunt ex lemmate Dioclis quatuor rectæ AL, L M, LC, vel LN, & LK, continuè proportionales.

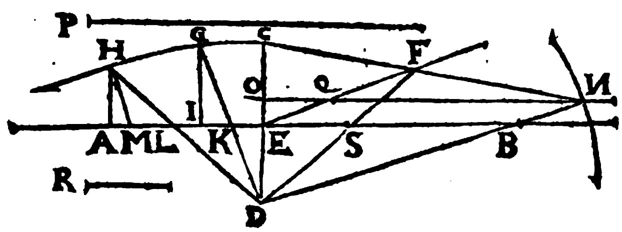
[a] ſchol. 27. tertii.

 [b]Cum

a 4. ſexti. a Cum ergo hiſce quatuor rectis proportionales ſint quatuor rectæ AH, HP, HO, HI; erunt hæ quoque continue proportionales. quod eſt propoſitum.

MODVS NICOMEDIS IN libro de lineis Conchoidibus.

NICOMEDES conſtruit prius inſtrumentum quoddam, quo lineam inflexam deſcribit, quam Conchilem, vel Conchoideos appellat. Sed nos omiſſo eo inſtrumento, eandem, (quod ad noſtrum inſtitutum ſatis eſt) per puncta delineabimus, hac ratione. Sit recta linea AB, & ad eam perpendicularis CD, in puncto E. Sumatur deinde infra E, punctum D, pro polo lineæ deſcribendæ, & ſupra E, aliud punctum C, vt libet. In vſu lineæ deſcriptæ conſtabit, quantum tam punctum D, quam punctum C, à puncto E, abeſſe debeat. Si igitur ex D, ducantur plurimæ lineæ occultę parum inter ſe diſtantes, & ex ſingulis ab-



ſcindantur portiones rectæ EC, æquales, initio ſemper facto à recta AB; extrema autem harum portionum puncta per lineam inflexam coniungantur deſcripta erit linea conchilis. Exemplum habes in quatuor lineis DH, DG, DF, DN, in quibus ſumptæ ſunt LH, KG, SF, BN, ipſi EC, æquales, per quarum extrema puncta H, G, F, N, inflexa linea incedit. Et quo plures lineæ occultę ex D, educentur, eo crebriora puncta inuenientur, per quæ tranſire debet linea inflexa.

SEQVITVR ex deſcriptione huius lineæ, eam nunquã poſſe cum recta AB, conuenire, licet vtraque in infinitum producatur: quia puncta, per quæ incedit, ſunt omnia ſupra rectam AB, terminantia nimirum ſegmenta rectarum ex D, prodeuntium (b quæ quidem omnes rectam AB, interſecant) ipſi EC, æqualia.

b pronunciatum 11. lib. 1.

DEMONSTRAT deinde Nicomedes duas proprietates huius lineæ inſignes. Prima eſt. Quodlibet eius punctum à puncto C, diuerſum minus diſtat à recta AB, quam punctum C: Aliorum autem punctorum, quod remotius eſt à C, minus diſtat ab eadem recta AB, quam quod minus remotum eſt. Ducta enim recta quacunque DG, demittatur perpendicularis GI. c Et quia KG, maior eſt quam GI; erit quoque perpendicularis EC, (ipſi KG, æqualis) maior quam perpendicularis IG, hoc eſt, punctum C, magis diſtabit à recta AB, quam punctum G. Eademq; ratione magis à recta AB, diſtabit punctum C, quam quoduis aliud. Sumatur deinde aliud punctum H, remotius à C, quam punctum G, demittaturque perpendicularis HA. Dico punctum H, minus diſtare à recta AB, quam punctum G, hoc eſt, perpendicularem HA, minorem eſſe perpendiculari

c 19. primi.

culari

culari GI. Ducta namque recta DH, [a] erit angulus DKE, maior angulo DLE. [a] *16. primi.*
[b] hoc eſt angulus GKI, angulo HLA. Cum ergo recti I, A, æquales ſint; [c] erit [b] *15. primi*
reliquus G, reliquo AHL, minor. Si igitur ipſi G, fiat æqualis AHM; erunt trian- [c] *32. primi.*
gula KGI, MHA, æquiangula; [d] ideoque erit, vt MH, ad HA, ita KG, ad GI. [d] *4. ſexti.*
[e] Et quia LH, maior eſt, quam MH, [f] (quod angulus HML, maior ſit recto A, [e] *19. primi.*
[g] & HLM, minor) [h] erit maior proportio LH, ad HA, quam HM, ad HA, hoc [f] *16. primi.*
eſt, quam GK, ad GI: ac proinde cum GK, HL, æquales ſint, erit quoque ma- [g] *17. primi.*
ior proportio HL, ad HA, quam HL, ad GI; [i] ideoque HA, minor erit quam [h] *8. quinti.*
GI. quod eſt propoſitum. [i] *10. quinti.*

ALTERA proprietas eſt. Quamuis Conchilis CF, nunquam conueniat cum recta EB, tamen cum qualibet alia recta, etiam ipſi EB, propinquiſsima conuenit. Sit enim primum recta NO, ipſi EB, parallela, ſecans EC, in O. Fiat vt EO, ad OD, ita EC, ad P. Et quoniam EO, minor eſt quam EC: [k] erit quoque OD, minor quam P. Si igitur ex D, ad interuallum rectę P, deſcribatur arcus circuli, ſecabit is rectam ON, in aliquo puncto, vt in N. Dico Conchilem CF, prolongatam coire cum ON, in N. Ducta enim recta DN, ſecante EB, in B, quæ ipſi P, æqualis erit; [l] quoniam eſt vt EO, ad OD, ita BN, ad ND; hoc eſt, ad ſibi æqualem P. Fuit autem etiam, vt EO, ad OD, ita EC, ad P. Igitur BN, EC, ad P, eandem proportionem habebunt: [m] ac proinde inter ſe æquales erunt; ideoque Conchilis per N, tranſibit. [k] *14. quinti.* [l] *4. ſexti.* [m] *9. quinti.*

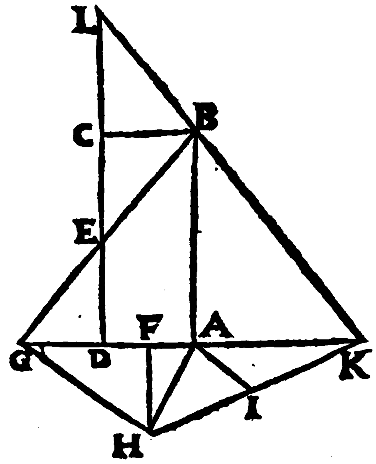
SIT deinde recta QF, non parallela ipſi EB, ſed eam ſecet in E, vergatque verſus Conchilem. Quia igitur Conchilis cum recta ON, conuenit, conueniet prius cum ipſa QF, in F, vt perſpicuum eſt.

POST hæc Nicomedes diſſoluit huiuſmodi problema. Dato quouis angulo rectilineo, & puncto extra lineas angulum datum comprehendentes: Ab illo puncto educere rectam ſecantem rectas datum continentes angulum, ita vt eius portio inter illas rectas intercepta æqualis ſit datæ rectę. In eadem namque figura rectæ EB, EF, angulum contineant BEF, ducendaque ſit ex D, linea, ita vt eius portio inter EB, EF, æqualis ſit datæ rectæ, R. Ex O, ad inferiorem lineam EB, ducatur perpendicularis DE, ſumaturque EC, datæ rectæ R, æqualis: & polo D, interuallo verò EC, Conchilis deſcribatur, quæ per ſecundam proprietatem rectam EF, ſecabit in F. Ducta ergo recta DF, ſecante EB, in S; erit SF, ipſi EC, hoc eſt, ipſi R, æqualis, vt ex deſcriptione Conchilis liquet.

HIS præmiſsis, ſint duæ rectæ AB. BC, ad angulum rectum B, coniunctæ, inter quas reperiendæ ſint duę lineæ medię proportionales. Compleatur rectangulum AC, cuius duo latera AD, CD, bifariam ſecentur in F, E. Ducta autem ex B, per E, recta ſecante AD, productam in G; [n] erit DG, ipſi CB, hoc eſt, ipſi DA, æqualis; propterea quod anguli D, E, trianguli DEG, angulis CE, trianguli CEB, æquales ſunt, & latera quoque DE, CE, quibus adiacent, æqualia. Rurſus ductam perpendicularem FH, ſecet AH, ipſi CE, æqualis, quod fiet, ſi ex A, ad interuallum CE, arcus delineetur ſecans FH, in H. Deinde iuncta recta GH, ducatur ei parallela AI: atq; producta DA; ex H, per problema præcedens, ducatur recta HK, vtramque AI, AK, ita ſecans, vt intercepta IK, ipſi AH, vel CE, æqualis ſit. quod fiet, ſi ex H, plurimæ rectæ ducentur occultæ, donec vnius portio intercepta æqualis ſit ipſi AH, vel CE. Poſtremò ex K, per B, recta exten- [n] *26. primi.*

extendatur ſecans DC, productam in L. Dico duas AK, CL, medias proportionales eſſe inter AB, BC. [a] Quoniam enim eſt LC, ad CD, vt LB, ad BK, hoc eſt, vt DA, ad AK; Et vt CD, ad CE, ita eſt GA, ad DA, quod vtraque CD, GA, ſecta ſit bifariam in E, D: erit ex proportione perturbata LC, ad

a 2. ſexti.



L C.	G A.
C D.	D A.
C E.	A K.

CE, vt GA ad AK, vt in hac formula apparet: hoc eſt, vt HI, ad IK. Cum ergo CE, ipſi IK, ſit æqualis per conſtructionem, [b] erit quoque LC, ipſi HI, æqualis, & tota LE, tôti HK. [c] Deinde quia rectangulum ſub DK, KA, vna cum quadrato ex AF, æquale eſt quadrato FK; addito communi quadrato ex FH, erit rectangulum ſub DK, KA, vnà cum quadratis ex AF, FH, [d] hoc eſt, vna cum quadrato ex AH, vel ex CE, æquale quadratis ex KF, FH, hoc eſt, quadrato ex HK, id eſt, ex LE, ipſi HK, æquali. [e] Sed & rectãgulum ſub DL, LC, vna cum eodem quadrato ex CE, æquale quoq; eſt eidem quadrato ex LE. Igitur rectangulum ſub DK, AK, vna cum quadrato ex CE, æquale erit rectangulo ſub DL, LC, vna cum eodem quadrato ex CE; Et dempto communi quadrato CE, reliquum rectangulum ſub DL, LC, reliquo rectangulo ſub DK, AK, æquale erit. [f] Igitur erit DL, ad DK, [g] hoc eſt, AB, ad AK, vt AK, ad LC. [h] Vt autem AB, ad AK, ita eſt quoque LC, ad CB. Igitur erit AB, ad AK, vt AK, ad LC, & vt LC, ad CB: ac proinde AK, LC, mediæ proportionales erunt inter datas AB, BC, quod eſt propoſitum.

b 14. quinti. c 6. ſecundi. d 47. primi. e 6 ſecundi. f 16. ſexti. g 4. ſexti. h 4. ſexti.

QVOD ſi datę duę rectæ ſint nimis longę, accipi poterunt earum ſemiſſes, vel tertię partes, &c. atque inter eas duę medię inquirendę. Nam ſi inuentę duplicentur, vel triplicentur, &c. habebuntur duę medię inter datas duas. Quod etiam in aliis modis intelligendum eſt.

PROBL. II. PROPOS. 16.

DATAM figuram planam, vel circulum augere, vel minuere in data proportione.

Hoc problema, quod ad figuras planas rectilineas attinet, explicauimus propoſ. 15. ſcholij propoſ. 33. lib. 6. Euclid. Nunc idem ad circulos quoque extendemus. Sit ergo rectilineum, cuius latus AB, vel circulus, cuius diameter AB, oporteatque conſtituere maius rectilineum, vel circulum maiorem in proportione, C, ad D, nimirum ſub tripla. Tribus lineis C, D, AB, inueniatur quarta pro-

ta proportionalis E, atque inter AB, & E, reperiatur media proportionalis FG, & ſupra FG, figura conſtruatur ſimilis datæ figuræ AB, ſimiliterque poſita. Item circulus deſcribatur circa diametrum FG. Dico tam rectilineum AB, eſſe tertiam partem rectilinei FG, quam circulum AB, circuli FG, nimirum eandem habere proportionem AB, ad FG, quam habet C, ad D. Quoniam enim tres rectæ AB, FG, & E, continuè proportionales ſunt, [a] erit figura AB, ad figuram FG, vt AB, ad E, hoc eſt, vt C, ad D. [b] Quia verò eſt, vt quadratum ex AB, ad quadratum FG, ita circulus AB, ad circulum FG; eſtque quadratum AB, ad quadratum FG, vt AB, ad E; erit quoque circulus AB, ad circulum FG, vt AB, ad E, vel vt C, ad D.

a coroll. 19. vel 20. ſexti.
b 2. duodec.

SIT deinde figura, vel circulus HI, oporteatque conſtruere minorem figuram, vel circulum in proportione K, ad L, nimirum tripla. Tribus rectis K, L, HI, inueniatur quarta proportionalis M: atque inter HI, & M, media proportionalis inueniatur NO, ſupra quam conſtruatur figura ſimilis ſimiliterque poſita figuræ HI: Item circulus deſcribatur circa diametrum NO. Dico tam figuram HI, ad figuram NO, quam circulum HI, ad circulum NO, habere proportionem triplam, eandem videlicet, quam habet K, ad L. Quoniam enim tres rectæ HI, NO, & M, continuè ſunt proportionales; [c] erit figura HI, ad figuram NO, vt recta HI, ad M, hoc eſt, vt K, ad L. [d] Et quia eſt, vt quadratum HI, ad quadratum NO, ita circulus HI, ad circulum NO, eſtque quadratum HI, ad quadratum NO, vt recta HI, ad M; erit quoque circulus HI, ad circulum NO, vt recta HI, ad M, vel vt K, ad L.

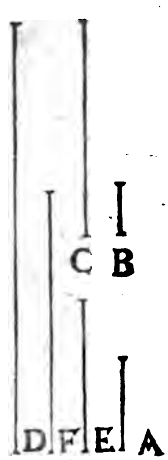
c coroll. 19. vel 20. ſexti.
d 2. duodec.

Ex his conſtat, qua ratione, dato foramine rotundo, vel etiam quadrato alicuius fontis, aliud foramen rotundum, vel quadratum maius, vel minus in quacunque proportione conſtruendum ſit.

PROBL. 12. PROPOS. 17.

DATAM figuram ſolidam qualemcunque ex iis, de quibus Eucl. in lib. Stereometriæ agit, augere vel minuere in proportione data.

HVIVSMODI figuræ ſolidæ ſunt parallelepipedum, Pyramis, Priſma, ſphæra, Conus, Cylindrus, & quinque corpora regularia.



SIT ergo figura ſolida, cuius latus A, vel ſphæra, cuius diameter A, augenda primum in proportione B, ad C. Tribus rectis B, C, A, inueniatur quarta proportionalis D: atque inter A, & D, reperiantur duæ mediæ proportionales E, F. Dico ſolidum lateris A, ad ſolidum ſupra latus E, nimirum ſupra mediam proportionalem, quæ propinquior eſt lateri dato A, conſtructum ſimile, ſimiliterque poſitum ſolido ſupra latus A, conſtituto, habere proportionem, quam B, habet ad C. Item ſphæram datam diametri A, ad ſphæram diametri E, eſſe, vt B, ad C. Quoniam enim figura ſolida lateris A, ad figuram ſolidam lateris E, ſimilem ſimiliterque poſitam habet proportionem triplicatam lateris A, ad latus E, vt lib. 11. & 12. Eucl. demonſtra-

monſtratum eſt: Similiter Conus & Cylindrus, cuius baſis diameter A, ad Conum & Cylindrum ſimilem, cuius diameter E: Nec non ſphæra diametri A, ad ſphæram diametri E; Eſt autem, ex defin. 10. lib. 5. Euclid. proportio quoque A, ad D, triplicata proportionis A, ad E: Erit ſolidum A, ad ſolidum E, vt A, ad D, hoc eſt, vt B, ad C. quod eſt propoſitum.

SIT deinde ſolidum lateris, vel diametri D, minuendum in proportione data C, ad B. Tribus C, B, D, inueniatur quarta proportionalis A; atque inter D, & A, reperiantur duæ mediæ proportionales F, E. Dico ſolidum lateris, vel diametri D, ad ſolidum ſimile ſimiliterque deſcriptum ſupra F, nimirum ſupra mediam proportionalem, quæ lateri dato D propinquior eſt, proportionem habere, quam C, ad B. Quoniam enim ſolidum D, ad ſimile ſimiliterque deſcriptum ſolidum F, proportionem habet triplicatam lateris D, ad latus F: qualem etiam habet ex defin. 10. lib. 5. Eucl. recta D, ad rectam A: erit ſolidum D, ad ſolidum F, vt D, ad A, id eſt, vt C, ad B. quod eſt propoſitum.

CONSTAT ex his, qua ratione Cubus non ſolum duplicandus ſit (quod veteres inquirebant) ſed etiam augendus minuenduſue in quacunque proportione: Item quo pacto pylæ bombardarum maiores, aut minores fieri debeant ſecundum proportionem datam.

SCHOLIVM.

FIGVRAS ſolidas ſimiliterque poſitas habere proportionem triplicatam homologorum laterum, demonſtratum eſt de parallelepipedis quidem lib. 11. Eucl. propoſ. 33. De pyramidibus verò lib. 12. propoſ. 8. eiuſque coroll. & de Priſmatis, in eiuſdem ſcholio. De ſphæra autem lib. eodem 12. propoſ. 18. De Conis deinde & Cylindris eodem lib. 12. propoſ. 12. ſi pro lateribus homologis ſumantur diametri ſphærarum, & diametri baſium Conorum, & Cylindrorum. Ac tandem de quinque corporibus regularibus in coroll. propoſ. 17. lib. 12. quippe cum omnia hæc corpora in ſphæris deſcribi poſſint.

QVAMVIS autem problema hoc de ſupradictis corporibus duntaxat propoſuerimus, idem tamen etiam locum habet in aliis cuiuſque generis corporibus ſimilibus, ſimiliterque poſitis, vt perſpicuum eſt; propterea quod diuidi poſſunt in pyramides ſimiles, æquales numero; [a] quæ quidem proportionem habent laterum homologorum triplicatam. [b] Cum ergo ſit, vt vna pyramis ad vnam pyramidem, ita omnes ad omnes, id eſt, ita ſolidum ad ſolidum; ſintque eadem latera homologa ſolidorum, quæ pyramidum ſimilium, conſtat propoſitum.

[a] *8. duodec. eiuſq; coroll.*
[b] *12. quinti.*

PROBL. 13. PROPOS. 18.

INTER duos numeros datos tum vnum, tum duos medios proportionales reperire.

NON rarò figura ſiue plana, ſiue ſolida augenda, vel minuenda eſt per numeros, quod quidem ſine inuentione vnius medij proportionalis, vel duorum mediorum inter datos duos numeros perfici non poteſt; idcirco artem præſcribe-

ſcribemus, qua huiuſmodi medias inuenire poſsimus. Propoſitis igitur primum duobus numeris quibuſcunque 9. & 25. inter quos reperiendus ſit vnus medius proportionalis; ſi multiplicentur inter ſe, & producti numeri 225. radix quadrata eruatur 15. vt in Arithmetica practica cap. 26. docuimus: [a] erit radix hæc quadrata medio loco proportionalis inter datos numeros, vt hic 9. 15. 25. quippe cum quadratum medij numeri æquale ſit rectangulo ſub extremis comprehenſo. Sic inter 5. & 13. medius proportionalis erit radix quadrata numeri 65. qui ex multiplicatione datorum numerorum gignitur, quæ radix paulò maior eſt, quam $8\frac{1}{17}$. & paulò minor, quam $8\frac{1}{16}$. *a 17. ſexti, vel 20. ſept.*

SINT deinde duo numeri 2. & 54. inter quos inueniendi ſint duo medij proportionales. Multiplicetur quadratus minoris in maiorem. Producti namque numeri 216. radix cubica 6. erit primus medius iuxta minorem collocandus. Et ſi maioris quadratus ducatur in minorem, erit producti numeri 5832. radix cubica 18. alter medius iuxta maiorem ſtatuendus, vt hic 2. 6. 18. 54. Ratio huius rei eſt, quod datis quatuor lineis continuè proportionalibus, parallelepipedum ſub quadrato alterutrius extremarum, & ſub altera extrema comprehenſum, æquale eſt cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremo aſſumpto propinquior eſt, vt in ſequenti Lemmate demonſtrabimus. Quoniam verò, vt in ſcholio propoſ. 19. lib. 8. Euclid. oſtendimus, propoſitis hiſce tribus numeris 2. 2. 54. idem procreatur numerus, ſiue prius ducantur 2. in 2. deinde productus 4. in 54. ſiue prius 2. in 54. deinde productus 108. in 2. Item datis hiſce tribus numeris 54. 54. 2. idem numerus gignitur, ſiue prius ducantur 54. in 54. deinde productus 2916. in 2. ſiue prius 54. in 2. deinde productus 108. in 54. manifeſto colligitur, ſi minor 2. ducatur in maiorem 54. & productus 108. in minorem 2. produci quoque cubum medij proportionalis iuxta minorem conſtituendi: Item ſi maior 54. ducatur in minorem 2. & productus 108. in maiorem 54. procreari cubum medij proportionalis iuxta maiorem ſcribendi. Sic inter 4. & 100. erunt duo medij proportionales, Radix cubica numeri 1600. & Radix cubica numeri 40000. Cæterum inuento altero mediorum numerorum, reperietur alter etiam, ſi inuentus per extremum remotiorem multiplicetur & producti numeri radix quadrata capiatur. Vt in dato exemplo 2. 6. 18. 54. ſi medius inuentus 6. ducatur in 54. erit producti numeri 324. radix quadrata 18. alter medius: Item inuentus medius 18. ſi multiplicetur per 2. erit producti numeri 36. radix quadrata 6. alter medius: propterea quod tam 2. 6. 18. quam 6. 18. 54. ſunt tres continuè proportionales.

LEMMA.

SI ſint quatuor lineæ continuè proportionales: parallelepipedum ſub quadrato alterutrius extremarum, & altera extrema comprehenſum, æquale eſt cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremæ aſſumptæ propinquior eſt.

REPETATVR figura propoſ. 17. in qua lineæ quatuor continuè proportionales ſunt A, E, F, D. Dico parallelepipedum ſub quadrato extremæ A, &

altera D, contentum, cubo rectæ E, æquale eſſe. [a] Quoniam enim quadratum rectæ A, ad quadratum rectæ E proportionem habet, quam A, ad F, id eſt, quam E, ad D, reciprocabuntur baſes cum altitudinibus, cum baſis parallelepipedi ſit quadratum rectæ A, & eiuſdem altitudo recta D: cubi autem baſis quadratum rectæ E, & altitudo ipſamet recta E. [b] Igitur æqualia erunt parallelepipedum, & cubus. Eadem ratione erit parallelepipedum ſub quadrato extremæ D, & ſub altera extrema A, contentum æquale cubo rectæ F. [c] Nam cum ſit, vt quadratum rectæ D, ad quadratum rectæ F, id eſt, vt baſis dicti parallelepipedi ad baſem dicti cubi, ita D, ad E, hoc eſt, ita F, ad A, hoc eſt, ita altitudo cubi, ad altitudinem parallelepipedi; reciprocabuntur quoque baſes cum altitudinibus: [d] ideoque æqualia erunt parallelepipedum, & cubus. quod eſt propoſitum.

[a] coroll. 20. ſexti. *[b] 34. vndecimi.* *[c] coroll. 20. ſexti.* *[d] 34. vndecimi.*

QVIA verò in noſtra Arithmetica practica ſolum radicis quadratæ extractionem explicauimus, operæ me pretium facturum puto, radicis cubicæ extractionem hoc loco, quamuis fortaſſe alieno, inſerere: quandoquidem ea neceſſaria omninò eſt, vt problema hoc 13. ad opus poſsit deduci. Hoc autem efficiam, ſi præſcribam artem quandam generalem, qua cuiuſcunque generis radicem extrahere poſsimus, ex libro eximij cuiuſdam Arithmetici Germani depromptam fermè totam: quod quidem ſtudioſo Lectori non iniucundum, aut ingratum fore confido.

PROBL. 14. PROPOS. 19.

RADICEM cuiuslibet generis extrahere.

Extractio radicis quid.

EXTRACTIO radicis eſt inuentio numeri ex propoſito numero, qui multiplicatione aliqua in ſe numerum propoſitum producat. Vt extractio quadratæ radicis eſt inuentio numeri ex numero quadrato, qui quadratè multiplicatus ipſum producat: Et extractio radicis cubicæ, eſt inuentio numeri, qui in ſe ductus cubicè producat cubum propoſitum, &c. Quid autem ſit multiplicare numerum quadratè, aut cubicè, aut alio modo, mox explicabo.

Infinita ſpecies radicum.

QVEMADMODVM igitur infinitæ ſunt ſpecies multiplicationum numerorum in ſe, vt ſtatim dicam, ex quibus oriuntur numeri quadrati; & ſolidi, vt cubi, Zenſicenſi, Surdeſolidi, &c. qui à Iunioribus nonnullis in Algebra explicari ſolent: ſic etiam infinitæ ſunt radicum ſpecies iuxta varias numerorum appellationes, qui conſurgunt ex varia radicum multiplicatione. Quæ omnia pulchrè nobis repræſentat naturalis numerorum progreſsio, inſeruiens progreſsionibus Geometricis ab vnitate incipientibus: vt hic.

0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10. &c.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024. &c.
	Radix	Quadratus	Cubus.	Zenſizenſus	Surdeſolidus.	Zenſicubus	B, ſurdeſolidus.	Zenſizenzenſus	Cubicubus	Zenſurdeſolidus.

PRIMVM numeri ſuperioris progreſsionis ſignificant ſpecies multiplicationum. Vt 2. ſupra quadratum ſignificat, multiplicationem quadratam fieri, dum radix bis ponitur, & ſic multiplicatur, vt 2. 2. facit 4. Sic 3. ſignificat, multiplicationem cubicam fieri, dum radix ter ponitur, atque ita multiplicatur, vt 2. 2. 2. facit 8. Pari ratione 4. oſtendit multiplicationem Zenſizenſicam: Et 5. ſurdeſolidam, &c.

DEINDE iidem numeri ſignificant radicum ſpecies. Vt 2. ſignificat, radicem quadratam producere quadratum per multiplicationem quadratam: Et 3. denotat, radicem Cubicam procreare Cubum per multiplicationem cubicam: Et ſic deinceps.

IN extractionibus igitur radicum obſeruanda eſt ſignatio figurarum per puncta in numero, ex quo radix aliqua extrahenda eſt, hoc modo.

IN extractione radicis quadratæ ſignantur omnes figuræ in locis imparibus, incipiendo à dextris: ita vt alternatim ſemper vna figura omittatur, quæ non ſignetur.

IN extractione cubica omittuntur ſemper duæ figuræ. In Zenſizenſica tres. In ſurdeſolida quatuor. Et ſic deinceps in infinitum. Vt in appoſitis exemplis vides. *Quo modo figuræ per puncta ſignentur.*

```
Pro quadrata.
6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6
.   .   .   .   .   .
Pro cubica.
6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6
  .     .     .     .
Zenſizenſica.
6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6
    .       .       .
Pro ſurdeſolida.
6 8 7 1 9 4 7 6 7 3 6
.         .         .
```

RESPONDENT autem hæ ſignationes medijs proportionalibus. Vt quoniam inter duos quadratos cadit vnus medius, ideo in extractione radicis quadratę omittitur ſemper vna figura: Inter duos verò Cubos cadunt duo medij, idcirco omittuntur ſemper duæ figuræ, & ſic de cæteris.

PRO qualibet autem ſpecie radicis extrahendę inſeruiunt quidam numeri peculiares: qui per ſequentem tabulam inueniuntur, quæ hoc modò conſtruitur. Prima columna continet ſeriem naturalē numerorū. Ex hac colūna naſcit̃ ſecūda: tertia ex ſecūda: & quarta ex tertia, hoc modo. Relictis duab. cellulis primæ colūnæ, repetit̃ numerus tertiæ cellulæ in ſecunda columna. Deinde ex additione duorum numerorum, id eſt, ex tertio primæ columnæ, & primo ſecundæ columnæ, fit̃ ſecundus numerus ſecundæ columnæ. Eodem modo ex ſecundo numero ſecundæ columnæ, & ex eius collaterali conficitur tertius ſecundæ columnæ: Atque ex tertio numero ſecundæ columnę, & ex eius collaterali fit quartus eiuſdem ſecundę columnæ,

Conſtructio tabulæ mirificæ.

1									
2									
3	3								
4	6								
5	10	10							
6	15	20							
7	21	35	35						
8	28	56	70						
9	36	84	126	126					
10	45	120	210	252					
11	55	165	330	462	462				
12	66	220	495	792	924				
13	78	286	715	1287	1716	1716			
14	91	364	100	2002	3003	3432			
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435		
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870		
17	136	680	2380	6188	12376	16448	24310	24310	

& ſic deinceps. Continentur autem in ſecunda columna omnes numeri triangulares. Non aliter tertia columna ex ſecunda oritur, & quarta ex tertia, &c. Semper enim in qualibet columna relinquuntur duæ primæ cellulæ, & numerus tertiæ cellulæ repetitur pro primo numero ſequentis columnæ: atque ex additione eius numeri cum collaterali præcedentis columnæ conflatur ſecundus numerus, &c.

Quo pacto ex ſuperiori tabula deſumantur numeri pro ſingulis radicum ſpeciebus.

HAC extructa tabula, deſumuntur numeri peculiares ex ordinibus tranſuerſalibus hoc ordine. Numeri cuiuslibet ordinis tranſuerſalis ordine ſcribuntur, iidemque ordine retrogrado repetuntur, vltimo ſemper excepto, & penultimo etiam tunc ſolum, quando vltimo æqualis eſt. Vt in ſecundo ordine ſumitur tantum numerus 2. quia cum ſit vltimus, non repetitur. In tertio ſumuntur quoque hi duo tantum 3.3. quia penultimus non repetitur, cum ab vltimo non differat. In quarto autem ſumendi ſunt hi tres. 4. 6. 4. In nono hi octo 9. 36. 84. 126. 126. 84. 36. 9. Et in decimo hi nouem 10. 45. 120. 210. 252. 210. 120. 45. 10. &c. Vbi vides, ſemper tot numeros aſſumi, quot ſunt vnitates in primo numero tranſuerſali, minus vno. Vt in ordine ſeptimodecimo aſſumendi erunt hi ſexdecim 17. 136. 680. 2380. 6188. 12376. 19448. 24310. 24310. 19448. 12376. 6188. 2380. 680. 136. 17. & ſic de cæteris.

CVILIBET deinde numero præponendæ ſunt tot cifræ, quot numeri ab eo incluſiue numerantur vſque ad vltimum aſſumptum. Vt numero 2. ſecundi ordinis præponenda eſt vna cifra, hoc modo, 20. Sed duo tertij ordinis habebunt has cifras 300. 30. Sic in nono ordine, vbi aſſumuntur octo numeri, primus habebit octo cifras, ſecundus ſeptem, tertius ſex, & ſic ſemper minuendo vnam. Cuius autem radicis extractioni inſeruiant prædicti numeri in quolibet ordine tranſuerſali accepti, pulchrè indicat primus numerus ordinis tranſuerſa-

lis. Vt

lis. Vt quia in ſuperiori progreſsione numerus 2. notat quadratum, & 3. cubū: & 4. Zenſizenſum, &c. ideo numerus 2. ſecundi ordinis cum ſua cifra, hoc modo. 20. inſeruit radici quadratæ: Et duo numeri ex tertio ordine aſſumpti cum ſuis cifris, hoc modo 300. 30. radici cubicæ: Et tres quarti ordinis, hoc modo 4000. 600. 40. radici Zenſizenſicæ: & quatuor quinti ordinis, hoc modo, 50000. 10000. 1000. 50. radici ſurdeſolidæ, &c.

IAM verò vt propius ad extractionem radicum accedamus, ſciendum eſt, radicē cuiuslibet numeri habere tot figuras, quot puncta ſub ipſo ſignata ſunt, ſecundum doctrinam ſuperiorem. Item ad punctum vltimum verſus ſiniſtram pertinere ipſam figuram ſupra punctum poſitam, cum omnibus alijs, quæ ipſam verſus ſiniſtram præcedunt. Ex quo puncto ſi ſubtrahatur numerus, vt mox dicemus, ſpectabit ad penultimum punctum figura ſupra ipſum punctum cum reliquis ad ſiniſtram, & ſic de cæteris. *Quot figuras qualibet radix habeat.*

VT autem ritè incipiat extractio cuiuslibet radicis, conſtruenda erit tabella quadratorum, cuborum, ſurdeſolidorum, B, ſurdeſolidorum, & aliorum numerorum, qui ex nouem figuris Arithmeticis producuntur, cum ſuis radicibus. Vt hic vides.

Radices.	Quadrati.	Radices.	Cubi.	Radices.	Surdeſolidi.	Radices.	B, Surdeſolidi.
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	2	8	2	32	2	128
3	9	3	27	3	243	3	2187
4	16	4	64	4	1024	4	16384
5	25	5	125	5	3125	5	78125
6	36	6	216	6	7776	6	279936
7	49	7	343	7	16807	7	823543
8	64	8	512	8	32768	8	2097152
9	81	9	729	9	59049	9	4782969

Cur autem non appoſuerim tabellas Zenſizenſorum. & zenſicuborū, cauſa eſt, quod eiuſmodi numerorum radices non egent nouis præceptis, vt poſtea dicetur. Sequuntur ergo iam extractionum exempla aliquot.

EXTRACTIO RADICIS Quadratæ.

SIT numerus propoſitus 6765201. ex quo erui debet radix quadrata. *Quadratæ radicis extractio.*

PRIMVM ab vltimo puncto, id eſt, à figura 6. (Hoc enim punctum vnā tantum habet figuram, cum eam nulla alia præcedat) ſubtrahitur maximus quadratus, qui ſubtrahi poteſt, nimirum 4. & in Quotiente ad marginem ponitur eius radix 2. In reſiduo autem manent 2. pro ſequenti puncto, quod erit 276. atque ita abſolutum eſt vltimum punctum, quod eſt in operatione primum. *Radix 2601.*

DEINDE

DEINDE paro diuiſorem ex figura 2. inuenta in Quotiente multiplicata per 20. nimirum per numerum radici quadratę inſeruientem: quem inuenio 40. Per hunc diuido punctum ſequens 276. & pro Quotiente reperio 6. Pono ergo primum Quotientem 2. ad ſiniſtram, numerum peculiarem 20. in medio, & nouum Quotientem 6. ad dextrã, ſub quo ſcribo eius quadratum 36. vt hic vides.

2—20—6.
36.

POST hęc multiplico tres numeros 2.20.6. inter ſe, & producto 240. addo quadratum 36. & ſummam 276. ex puncto 276. detraho, nihilque relinquitur, atque ita abſolutum eſt ſequens punctum: aliudque ſequens punctum eſt 52.

PARO iam diuiſorem ex toto Quotiente inuento 26, ducto in 20. id eſt, in numerum peculiarem quadratæ radicis, quem inuenio 520. Et quia per hunc diuidi non poteſt punctum 52. pono in Quotiente 0. neque opus eſt multiplicare, vt reperiatur numerus ſubtrahendus, quia nihil ſubrahitur, cum 0. multiplicans producat 0. Et ſic fit in omnibus alijs extractionibus, quando diuiſor inuentus in puncto propoſito ne ſemel quidem continetur: atque ita abſolutum eſt punctum 52. punctumque inſequens eſt 5201.

PARO iterũ diuiſorẽ ex toto Quotiẽte inuẽto 260. ducto in numerũ peculiarem 20. quem reperio 5200. qui ſemel in puncto 5201. continetur. Pono ergo totum Quotientem prius inuentum 260. ad ſiniſtram, & numerum peculiarem 20. in medio, & quotientẽ 1. nunc inuentum ad dexteram, eiuſque quadratum 1. ſub illo, vt in exemplo patet.

260—20—1
1

MVLTIPLICATIO trium ſuperiorum numerorum facit 5200. addo quadratum 1. figuræ inuentæ 1. fit numerus 5201. qui ex puncto 5201. detractus nil relinquit. Eſt ergo abſoluta extractio, radixque inuenta eſt 2601. quæ quadratè, id eſt, in ſe multiplicata producit propoſitum numerum 6765201.

ATQVE hæc eſt probatio, vel examen cuiuſuis extractionis, vt videlicet radix inuenta in ſe multiplicetur vel quadratè, vel cubice, vel ſurdeſolide, &c. p̃ qualitate radicis. Si enim in extractione nihil fuit relictum, veluti in noſtro exẽplo, neceſſe eſt, numerum productum ęqualem eſſe propoſitio numero, ex quo facta eſt extractio: Si autem in extractione aliquid fuit relictum, illud additũ producto numero conficiet numerum propoſitum. Inſtitui quoq; poteſt examen per 9. vel 7. vt in Diuiſione. Nam ſi ex inuenta radice abijciantur 9. vel 7. quoties fieri poteſt, & reſiduum collocetur tum in ſiniſtra parte crucis, tum in dextra, quod Quotiens, vel radix inuenta ſit etiam inſtar Diuiſoris. Hoc enim reſiduo in ſe multiplicato quadrate, vel cubice, &c. & ex producto abiectis 9. vel 7. neceſſe eſt, reſiduum hoc æquale eſſe reſiduo numeri propoſiti, ſi abijciãtur ex eo omnia 9. vel 7. & nihil in extractione relictum ſit. Nam alioquin ex reſiduo extractionis, & ex producto radicis inuẽtæ in ſe multiplicatæ abijcienda erunt omnia 9. vel 7. Hoc enim reſiduum ęquale eſſe debet reſiduo numeri propoſiti, ſi omnia 9. vel 7. abijciantur. In noſtro exemplo, ſi probatio inſtituatur per 9. reſiduum ſemper eſt 0. Si verò fiat per 7. ſtabit exemplum examinis vt hic apparet.

0
0 X 0
0

2
4 X 4
2

EXTRACTIO RADICIS CVBICE.

SIT ex numero 23948319 0. extrahenda radix cubica.

PRI-

Cubica radicis extractio. radix 621.

PRIMVM expuncto 239. ſubtraho cubum 216. qui eſt maximus in eo contentus, cuius radicem 6. ſcribo in Quotiente ad marginem. Et quia relinquitur numerus 23. erit ſequens punctum 23483.

DEINDE paro diuiſorem hoc modo. Supra radicem inuentam 6. pono eius quadratum 36. Et ad dextram colloco duos numeros peculiares radicis cubicæ, nimirum 300. & 30. vt hic vides. Multiplico ſuperiores duos numeros 36. & 300. inter ſe, & producto 10800. addo productum 180. ex multiplicatione numerorum inferiorũ 6. & 30. inter ſe. Nam ſumma 10980. erit Diuiſor.

36—300
6— 30

Satis etiam eſſet productus ex duobus ſuperioribus inter ſe multiplicatis, nimirum 10800. pro Diuiſore. quod in alijs extractionibus intelligendum quoque eſt. Diuido ergo punctum meum 23483. per diuiſorem inuentum 10980. & Quotientem 2. ſcribo poſt figuram 6. prius inuentam. Pingo poſt hæc figuram huiuſmodi. Ad dextram numerorum 36. & 300. colloco inuentam figuram 2. & infra eam eius quadratum 4. & ſub hoc cubum eiuſdem 8. Nam ſi tam ſuperiores tres numeri 36. 300. & 2. quam inferiores tres 6. 30. & 4. inter ſe multiplicentur, & productis 21600. & 720. addatur cubus 8. fiet numerus 22328. quem ſi ex meo puncto 23483. ſubtraham, remanent 1155. atque adeo punctum ſequens erit 1155190.

36—300—2.
6— 30—4.
8.

PARO iam alium diuiſorem hoc pacto. Supra 62. radicem hactenus inuentam ſcribo eius quadratum 3844. & ad dextram eoſdem numeros peculiares 300. & 30. Multiplicatio duorum ſuperiorum inter ſe facit diuiſorem 1153200. per quem ſi diuidatur punctum 1155190. fit Quotiens 1. poſt alias duas figuras 62. ſcribendus.

3844—300.
62— 30.

Pingo iam figuram talem. Ad dextram numerorum 3844. & 300. pono figuram 1. proximè inuentam, & infra eam eius quadratum 1. & ſub hoc eiuſdem cubum. 1. Nam ſi tam tres ſuperiores numeri 3844. 300. & 1. quam inferiores tres 62. 30. & 1. inter ſe multiplicentur, & productis 1153200. & 1860. addatur cubus 1. fiet numerus 1155061. quem ſi ex meo puncto 1155190. demam, remanent 129. Eſt ergo abſoluta extractio, radixque inuenta eſt 621. quæ in ſe cubice multiplicata procreat numerum 239483061. cui ſi adijciatur reſiduum 129. conflabitur numerus propoſitus 239483190.

3844—300—1.
62— 30—1.
1.

EXTRACTIO RADICIS Surdeſolidæ.

Surdeſolida radicis extractio radix 63.

SIT numerus 1039589621. cuius radix ſurdeſolida quæritur.

PRIMVM à puncto 10395. ſubtraho maximum ſurdeſolidum 7776. in eo incluſum, cuius radicem 6. ſcribo in margine pro Quotiente: & quia numerus relinquitur 2619. ideo punctum ſequens erit 261989621.

DEINDE paro diuiſorem hoc modo. Supra radicem inuentam 6. ſcribo eius quadratum 36. & ſupra hunc eiuſdem cubum 216. & ſupra hunc eiuſdem Zenſizenſum, vel quadrati quadratum 1296: ita vt conſtituatur progreſsio

Nn Geome-

Geometrica aſcendens à radice 6. denominata tot terminorum, quot numeri peculiares requiruntur in extractione ſurdeſolida, Et ad dextram colloco quatuor numeros peculiares requiſitos, vt exemplum monſtrat. Multiplico duos ſuperiores numeros (quod ſatis eſt) 1296. & 50000. inter ſe. Productus namque numerus 64800000. erit diuiſor, per quem ſi diuidatur punctum relictum 261989621. poſſet eſſe Quotiens vel 4. vel 3. vel 2. Accipio autem 3. quia figura 2. eſt nimis parua, & 4. nimis magna, vt ex ſequentibus patebit; quem Quotientem 3. in margine ſcribo poſt inuentam figuram 6. Pingo ergo talem figuram. Ad dextram numerorum 1296. & 50000. pono figuram Quotientis acceptam 3. & infra eam eius quadratum 9. & ſub hoc eiuſdem cubum 27. & ſub hoc eiuſdem Zenſizenſum, vel quadrati quadratum 81. & ſub hoc eiuſdem ſurdeſolidum 243. ita vt ad dextram conſtituatur progreſsio Geometrica deſcendens denominata à figura Quotientis 3. inuenta tot terminorum vno amplius, quot numeri peculiares requiruntur: adeo vt vltimus terminus ſit numerus ſurdeſolidus figuræ inuentæ, quemadmodum in cubica extractione fuit cubus, & in quadrata quadratus. Nam ſi terni numeri tranſuerſales inter ſe multiplicentur, & ad productos 194400000. 19440000. 972000. 24300. adijciatur ſurdeſolidus 243. efficietur numerus 214836543. qui ex puncto 261989621. detractus relinquit 47153078. Eſt ergo radix ſurdeſolida inuenta 63. quę in ſe ſurdeſolidè multiplicata, ſi nimirum quinquies ponatur hoc modo, 63.63.63.63.63. producit numerum 992436543. cui ſi addatur reſiduum 47153078. conflabitur propoſitus numerus 1039589621.

1296	50000
216	10000
36	100
6	50

1296	50000	3.
216	10000	9.
36	1000	27.
6	50	81.
		243

QVOD ſi ſupereſſet aliud punctum, conſtituenda eſſet progreſsio aſcendẽs denominata à tota radice hactenus inuenta 63. quatuor terminorum, vt hic vides. Nam productus 78764805. ex ſuperioribus duobus numeris inter ſe multiplicatis eſſet nouus diuiſor. Deinde ex noua figura inuenta eſſet conſtituenda progreſsio deſcendens vſque ad ſurdeſolidum illius figuræ, quemadmodum ſupra cum figura 3. factum eſt.

15752961	50000
250047	10000
3969	1000
63	50

ATQVE in hunc modum radicem cuiuſcunque ſpeciei extrahes, ſi diligenter inquires numeros propoſitæ radici inſeruientes, vt ſupra docuimus. Quæ ſanè ratio mihi ſemper præclara eſt viſa. Nam etiamſi operatio videatur aliquanto longior eſſe, quam par ſit, difficilis tamen non eſt, quippe cum ignorari in ea non poſsit, quid faciendum ſit: cum tamen in extractionibus ab alijs Arithmeticis traditis (quadrata excepta) tanta ſit operationis difficultas, vt infinita ferememoria opus ſit ad retinendũ ea, quę ad extrahendas radices adhibenda ſunt, vt in radice cubica extrahenda per aliorum regulam, ſi adhibeatur, patebit: cum tamen cubica extractio ſit longè facilior extractione ſurdeſolida, & alijs inſequentibus, quę ferè inextricabiles ſunt.

SOLA vna difficultas tam in noſtra, quam in aliorum extractione exiſtit, quod nimirum dubium interdum ſit, num figuram nimis paruam in Quotiente alicuius puncti acceperimus. Vt in ſecundo puncto extractionis ſurdeſolidæ

potuit

potuit eſſe Quotiens vel 4. vel 3. vel 2. Nos autem accepimus 3. Si ergo certi eſſe velimus, an accipi potuiſſet figura 4. quandoquidem ſuperfuit numerus 47153078. valdè magnus, faciendum periculum erit cum figura 4. conſtituendo ſcilicet progreſsionem deſcendentem Geometricam à 4. denominatam. Et quia quatuor numeri producti tranſuerſales cum ſurdeſolido 1024. faciunt numerum 297141824. qui ex puncto ſecundo 261989621. ſubtrahi nequit; argumento eſt, figuram 4. nimis magnam eſſe, ac proinde figuram 2. nimis paruam; quādoquidem cum figura 3. tales numeri procreati ſunt, qui ex propoſito puncto potuerunt ſubtrahi. Hoc ergo remedium ſi adhibeatur, quamuis longiuſculum, tutiſsima erit noſtra ratio extrahendarum radicum. *Difficultas in extractionibus quo pacto ſuperetur.*

1296—	50000—	4
216—	10000—	16
36—	1000—	64
6—	50—	256
		1024

IAM verò cur in ſuperiori tabella quadratorum, cuborum, ſurdeſolidorum, &c. omiſerim Zenſizenſos, ſiue quadrati quadratos, atque adeo radicis Zenſizenſicæ extractionem prætermiſerim; ratio eſt, quod radices Zenſizenſica, Zenſicubica, Zenſizenzenſica, cubicubica, Zenſurdeſolida, &c. quamuis erui poſſint, ſicut aliæ, habent tamen aliam etiam extractionis regulā, quam vel ex ipſis nominibus colligere licet. Videlicet. *Cur exemplū non ponatur de radice Zenſizenſica, &c.*

EXTRACTVRVS radicem Zenſizenſicam, ſiue quadrati quadratam, extrahe primo radicem quadratam: Deinde ex hac radice erue iterum quadratam radicem. Hæc enim erit radix Zenſizenſica, quæ quæritur.

EXTRACTVRVS verò radicem Zenſicubicam, id eſt, quadrati cubicam, vel cubi quadratam, extrahe primo radicem quadratam, & ex hac deinde radicem cubicam. Vel primo erue radicem cubicam, & ex hac quadratam. Vltima enim radix eruta erit ea, quam quæris. Idem iudicium habeto de alijs radicibus numerorum compoſitorum, vt de radice Zenſizenzenſica, cubicubica, Zenſurdeſolida, &c.

REGVLA PROPRIA EXTRActionis radicis cubicæ.

QVONIAM frequentior vſus eſt radicis quadratæ, & cubicæ apud Mathematicos, quam aliarum radicum, lubet in ſtudioſorū gratiam præſcribere hoc loco regulam propriam ad cubicam radicem extrahendam: quemadmodum idem de quadrata radice fecimus in noſtra Arithmetica practica. Relictis autem aliorum regulis, quod minus faciles, minuſque expeditæ ſint, excerpam vnam quaſi nouam ex ſuperiori extractione radicis cubicæ, quæ ſic ſe habet.

SIT eruenda radix cubica ex numero 1860867.

Ex primo puncto 1. ad ſiniſtram ſubtraho cubum 1. maximū in eo contentū, nihilq; remanet. Erit ergo ſequēs punctū 860. & pro radice inuenta eſt figura 1. *Regula propria radicis cubicæ. radix 123.*

PARO diuiſorem, multiplicando quadratum figuræ inuentæ, nimirum 1. per 300. qui erit 300. per quem ſi diuidam punctum 860 inuenio Quotientē 2. pro ſecunda figura radicis. Hanc duco in diuiſorem inuentum 300. facioque 600. Deinde duco quadratū nouæ figuræ 2. inuentæ, nimirū 4. in productū ex priori

figura 1. multiplicata per 30. hoc eſt, in 30. facioque 120. Poſtremò ad ſummã duorum horum productorum 600. & 120. id eſt, ad 720. adijcio cubum inuentę nouæ figuræ 2. nimirum 8. totamque ſummam 728. ex meo puncto 860. ſubtraho. Et quia remanent 132. erit vltimum punctum 132867. Scribo ergo inuentam figuram 2. poſt priorem 1.

DEINDE paro eodem modo diuiſorem nouum pro vltimo puncto. Nimirum quadratum totius radicis 12. hactenus inuentæ, id eſt, 144. duco iterum in 300. Productus enim numerus 43200. erit diuiſor, per quem ſi diuidam meum punctum 132867. reperio Quotientem 3. ſcribendum poſt radicem 12. hactenus inuentam. Hanc figuram inuentam 3. ſimiliter duco in diuiſorem inuentum 43200. facioque 129600. Deinde quadratum eiuſdem nouæ figuræ 3. nimirum 9. duco in productum ex radice 12 prius inuenta, multiplicata per 30. hoc eſt, in 360. efficioque 3240. Poſtremò ad ſummam horum duorum productorum 129600. & 3240. hoc eſt, ad 132840. adijcio cubum 27. ex eadem noua figura genitum, fitque numerus 132867: qui ex puncto 123867. detractus nihil relinquit. Atque ita inuenta eſt radix 123. numeri propoſiti 1860867.

QVOD ſi ſupereſſet aliud punctum, ducendus eſſet quadratus totius radicis 123. hactenus inuentæ in 300. vt nouus diuiſor exurgeret, &c. Vides ergo in hac regula plus memoriæ requiri, quam in ſuperiori, quamuis facilior ſit, quam aliorum regulæ. Memor tamen eſto, quando dubitas, an nimis paruam figuram in Quotiente acceperis, vt facias periculum de maiori figura, vt ſupra dictum eſt.

PROBL. 15. PROPOS. 20.

IN numeris non quadratis, non cubis, non Zenſizenſicis, non ſurdeſolidis, &c. radicem, veræ propinquam inuenire.

QVANDO numerus propoſitus non eſt quadratus, aut cubus, aut Zenſizēſus, aut ſurdeſolidus, &c. non poteſt habere veram radicem, ſed per regulas ſuperiores inuenitur radix maximi quadrati, vel cubi, vel Zenſizenſi vel ſurdeſolidi in dato numero contenti. Vt igitur ſciamus, quænam fractio ad inuentam radicem addenda ſit, vt habeatur radix propinquior veræ, agendum erit hoc modo.

Quot binarij ciſrarum vel ternarij vel quaternarij, &c. ad propinquam radicẽ eruendam apponendi ſint.

NVMERO propoſito apponantur aliquot binarij ciſrarum, ſi quadrata radix propinqua inquiritur: vel ſi cubica, aliquot ciſrarum ternarij; vel aliquot quaternarij, ſi radix Zenſizenſica deſideratur, vel aliquot quinarij ciſrarum, ſi de ſurdeſolida radice agitur, &c. Reſpondet autem in qualibet ſpecie radicis numerus ciſrarum aliquoties repetendus numero, qui in progreſsione ad initium præcedentis problematis poſita ſcribitur ſupra numerum, à quo radix nomen ſumit. Vt quia ſupra quadratum ponitur 2. ideo pro quadrata radice apponuntur binę ciſræ aliquoties, at pro cubica ternæ, quod ſupra cubum ſcriptus ſit numerus 3. &c. ita vt pro radice cubicuba propinqua apponendi ſint aliquot nouenarij ciſrarũ, quippe cũ ſupra cubicubũ numerus 9. reperiatᷣ deſcriptus. Idem numerus ciſrarum aliquoties repetendus reſpondet quoq; ſignationibus punctorum, quæ faciendæ ſunt, vt radix extrahatur. Vt quia in quadrata radice

radice extrahenda ſignatur ſecunda quæuis figura, propterea aliquot cifrarum binarij aſcribendi ſunt; in cubica verò radice aliquot ternarij cifrarum adiungendi ſunt, quia in ea extrahenda tertia quæque figura ſignatur, &c.

QVO autem plures binarij, vel ternarij cifrarum, &c. numero propoſito apponetur, eo propinquior radix eruetur.

APPOSITIS hoc modo cifris ad numerum, ex quo radix eruenda eſt, extrahenda eſt ex toto illo numero radix, vt ſupra traditum eſt. Deinde ex ea radice abiectis ad dexteram tot figuris, quot cifrarum binarij, vel ternarij, vel quaternarij, &c. appoſiti fuere, reliquæ figuræ radicem integram dabunt, cui addenda eſt fractio numeratorem habens figuras abiectas, denominatorem verò vnitatem, cum totidem cifris, quot binarij cifrarum, vel ternarij, &c. additi fuerunt, nimirum vel 10. ſi vnus binarius, vel ternarius, &c. additus fuit, vel 100. ſi duo binarij vel ternarij, &c. additi fuerunt: vel 1000. ſi tres, & ſic deinceps ita vt fractio illa contineat vel decimas, vel centeſimas, vel milleſimas, &c. *Quæ fractio addenda ſit radici, vt propinquior radix ſignatur.*

EXEMPLI cauſa. Ex numero 29. extrahenda ſit radix quadrata. Appoſitis tribus binariis cifrarum, hoc modo 29000000. inuenietur huius numeri quadrata radix 5385. minor quam vera, quippe cum in extractione aliquid remanſerit: addita verò vnitate, fiet radix 5386. maior, quam vera. Abiectis igitur tribus figuris ad dexteram, propter tres cifrarum binarios additos, erit propinqua radix $5\frac{385}{1000}$. minor tamen quam vera: at $5\frac{386}{1000}$. maior quam vera. Illius enim quadratus numerus eſt $28\frac{998225}{1000000}$. minor quam propoſitus numerus 29. Huius verò numerus quadratus eſt $29\frac{8996}{1000000}$. maior eodem numero propoſito 29.

ITEM ex numero 29160. eruenda ſit radix cubica. Apponantur tres ternarij cifrarum, vt rurſus habeantur in fractione partes denominatæ à 1000. atque ex toto numero 29160000000000. extrahatur radix cubica, quæ reperietur 30779. minor quam vera, quod in extractione fuerit aliquis numerus reſiduus: atque adeò maior quàm vera, erit 30780. Abiectis tribus figuris ad dexteram, propter tres cifrarum ternarios appoſitos, erit propinqua radix cubica $30\frac{779}{1000}$. minor quam vera, cum eius cubus ſit tantum $29158\frac{388419139}{1000000000}$. maior autem propinqua radix, quam vera, erit $30\frac{780}{1000}$. quippe cum eius cubus ſit $29161\frac{236552000}{1000000000}$.

DEMONSTRATIO huius inuentionis radicis propinquæ hæc eſt. Quando pro radice quadrata apponuntur 00. ad numerum propoſitum, verbi gratia ad 5. multiplicatur propoſitus numerus per 100. hoc eſt, per quadratum radicis 10. Et quia quadrati 500. & 5. (Nam datus numerus, & conflatus ex additione 00. ſumendi ſunt tanquam quadrati, cum eorum radices quærantur) [a] habent proportionem ſuarum radicum duplicatam: Eſt autem 500. ad 5. vt 100. ad 1. propterea quod 5. multiplicatus per 100. fecit 500. Centupla verò proportio decuplę duplicata eſt, vt in hoc appoſito exemplo patet; erit proportio radicis numeri 500. ad radicem numeri 5. decupla. Cum ergo radix 500. ſit 22. minor quam vera, erit eius $\frac{1}{10}$. nimirum $2\frac{2}{10}$. radix numeri 5. minor quam vera: ac proinde $2\frac{3}{10}$. erit maior quam vera. Rectè ergo præcepimus, quando apponuntur 00. abiiciendam eſſe ex radice 22. vnam figuram, vt relinquatur radix $2\frac{2}{10}$. *[a] 11. octaui.*

1. 10. 100.

5. 500.

QVANDO autem apponuntur 0000. multiplicatur numerus propoſitus, verbi gratia numerus 5. per 10000. id eſt, per quadratum radicis 100. Et quia quadrati 50000. 5. [a] habent duplicatam proportionem ſuarum radicum. Eſt autem 50000. ad 5. vt 10000. ad 1. propterea quod 5. multiplicatus per 10000. fecit 50000. Proportio autem 10000. ad 1. duplicata eſt proportionis 100. ad 1. vt in hoc exemplo patet; erit proportio radicis numeri 50000. nimirum 223. ad radicem numeri 5. vt 100. ad 1. Quare ſi radix 223. diuidatur per 100. procreabitur radix quadrata propinqua $2\frac{23}{100}$. minor quam vera, at $2\frac{24}{100}$. erit maior quam vera. Rectè ergo præcepimus, cum apponuntur 0000. abiiciendas eſſe ex radice 223. duas figuras, vt reliqua fiat radix $2\frac{23}{100}$.

[a] *11. octaui.*

1.	100.	10000.	
	5.	50000.	

PARI ratione, ſi apponantur 000000. procreabitur radix propinqua in milleſimis, atque ita deinceps.

RVRSVS quando pro radice cubica ad numerum propoſitum, vt ad 5. adduntur 000. multiplicatur datus numerus per 1000. id eſt, per cubum radicis 10. Et quia cubi 5000. 5. [b] habent proportionem ſuarum radicum triplicatam: Eſt autem 5000. ad 5. vt 1000. ad 1. quod 1000. multiplicans 5. fecit 5000. Proportio autem 1000. ad 1. triplicata eſt proportionis 10. ad 1. vt in hoc appoſito exemplo apparet; erit proportio radicis numeri 5000. nimirum 17. ad radicem numeri 5. vt 10. ad 1. Quocirca ſi radix 17. diuidatur per 10. fit radix cubica propinqua $1\frac{7}{10}$. minor quam vera, at $1\frac{8}{10}$. erit maior quam vera. Rectè ergo præcepimus, quando pro radice cubica apponuntur 000. abiiciendam eſſe ex radice inuenta 17. vnam figuram, vt reliqua fiat radix $1\frac{7}{10}$.

[b] *12. octaui.*

1.	10.	100.	1000.
		5.	5000.

SIMILI modo ſi apponantur 000000. inuenietur propinqua radix in centeſimis: Et ſi apponantur 000000000. in milleſimis, &c. Nam ibi multiplicatur numerus per 1000000. id eſt, per cubum radicis 100. hic verò per 1000000000. nimirum per cubum radicis 1000. Cætera eodem modo demonſtrabuntur.

NEQVE verò diuerſa ratio eſt in aliis radicibus. Nam in ſurdeſolida verbi gratia, quando adduntur 00000. fit multiplicatio per 100000. id eſt, per ſurdeſolidum radicis 10. Et proportio 100000. ad 1. eſt quintuplicata proportionis 10. ad 1. vt in appoſito exemplo apparet, &c.

1. 10. 100. 1000. 10000. 100000.

PROBL. 16. PROPOS. 21.

RADICEM cuiuſque generis ex data minutia extrahere.

Extractio radicum ex minutiis.

IN minutiis extrahenda eſt radix eiuſdem appellationis cum radice, quæ quæritur, tum ex numeratore, tum ex denominatore. Ita enim fiet fractio, quæ radix eſt propoſitæ minutiæ. Vt radix quadrata minutiæ $\frac{4}{9}$. eſt $\frac{2}{3}$. Et radix cubica minutiæ $\frac{8}{27}$. eſt ſimiliter $\frac{2}{3}$. Et radix Zenſizenſica minutiæ $\frac{16}{81}$. eſt quoque $\frac{2}{3}$. Et radix ſurdeſolida minutiæ $\frac{32}{243}$. eſt pari ratione $\frac{2}{3}$. & ſic de aliis.

QVOD

QVOD ſi data minutia fuerit fractio, vel minutia alterius minutiæ, reducenda prius erit ad minutiam ſimplicem. Vt ſi quærenda ſit radix quadrata ex hac minutia minutiæ $\frac{2}{4}$. $\frac{8}{9}$, reducenda erit ad hanc ſimplicem minutiam $\frac{16}{36}$. cuius radix quadrata eſt $\frac{4}{6}$. vel $\frac{2}{3}$. &c.

SIMILITER ſi fractio adhæreat integris, erunt integra prius reducenda ad fractionem eiuſdem denominationis. Vt ſi quærenda ſit radix cubica numeri $2\frac{10}{27}$. reducendus erit ad hanc fractionem $\frac{64}{27}$. cuius radix cubica eſt $\frac{4}{3}$. hoc eſt, $1\frac{1}{3}$. &c.

SI vel numerator, vel denominator minutiæ, vel vterque numerus careat radice eius appellationis, quæ deſideratur, non habebit illa minutia radicem, quę quæritur. Vt neque $\frac{4}{7}$. neque $\frac{6}{9}$. neque $\frac{5}{12}$. habent radicem quadratam præcisè, propterea quod denominator in prima numerator verò in ſecunda, & vterque numerus in tertia quadratam radicem non habet.

COGNOSCES autem, an data fractio habeat radicem quæſitam, nec ne, ſi eam, ad minimos terminos reduces. Si namque ita reducta habuerit radicem, dicetur quoque data minutia eandem radicem habere: Si verò reducta ad minimos terminos radicem non habuerit, neque propoſita minutia radicem habebit. Vt ſi proponatur minutia $\frac{20}{45}$. volo ſcire, an habeat radicem quadratam: Ea redacta ad minimos terminos eſt $\frac{4}{9}$. quæ radicem quadratam habet $\frac{2}{3}$. Hanc ergo eandem radicem quadratam dicetur habere minutia propoſita $\frac{20}{45}$. At verò minutia $\frac{6}{9}$. non habebit radicem quadratam: quia neque $\frac{2}{3}$. in minimis terminis, ad quam reducitur, eam habet. Pari ratione minutia $\frac{24}{81}$. habebit radicem cubicam $\frac{2}{3}$. eandem nimirum, quam habet minutia $\frac{8}{27}$. in minimis terminis, ad quam illa reducitur. Minutia autem $\frac{12}{20}$. radice cubica carebit, quod minutia $\frac{3}{5}$. ad quam in minimis terminis reuocatur, eadem careat. Et ſic de aliis.

QVANDO ergo minutia ad minimos reuocata terminos radicem quæſitam non habuerit, exquirenda erit radix propinqua tam numeratoris, quam denominatoris, apponendo videlicet vtrique prius numero aliquot cifrarum binarios, vel ternarios, quaternarioſue, &c. prout quadrata radix, aut cubica, aut Zenſizenſica, &c. inquiritur. Si namque radix propinqua numeratoris per propinquam denominatoris radicem diuidatur, prodibit radix propinqua, quam quærimus. Verbi gratia, ſi proponatur minutia $\frac{6}{7}$. cuius radix quadrata inquirenda ſit, appoſitis tribus binariis cifrarum reperietur numeratoris radix propinqua $2\frac{449}{1000}$. denominatoris verò $2\frac{645}{1000}$. Si igitur illa per hanc diuidatur, proueniet radix quæſita $\frac{2449}{2645}$. ſatis propinqua. Idem iudicium de aliis radicibus habeatur, ſi memineris tamen, in cubica tam numeratori, quam denominatori apponendos eſſe aliquot ternarios cifrarum, vt propinquæ eorum radices eruantur: In Zenſizenſica verò aliquot quaternarios, & in ſurdeſolida aliquot quinarios, &c.

QVIA verò moleſtum eſt inquirere duas radices propinquas, vnam pro numeratore propoſitæ fractionis, & pro denominatore alteram, traduntur à Cardano, & Tartalea pro radice quadrata, & cubica, quæ nimirum magis in vſu ſunt, peculiares quædam regulæ, quas hic explicare lubet: quippe cum in eis tantummodo radicis propinquæ inuentione opus ſit.

PRO quadrata igitur radice, duc numeratorem in denominatorē, & producti numeri radicē quadratam propinquā diuide per denominatorē; Vel nume-

Alia extractio radicis qua-

ratorem

drata & cubica ex data minutia.

ratorem per radicem illam propinquam partire. Vtroque enim modo radix propinqua fractionis propoſitæ gignetur. Et ſi quidem propinqua illa radix numeri producti ex numeratore in denominatorem fuerit minor quam vera, reperietur priori modo radix fractionis propinqua minor quoque quam vera; propterea quod numerus verò minor diuiditur: poſteriori verò modo inuenietur radix propinqua fractionis maior quam vera, quod tunc diuiſio fiat per numerum vero minorem. Contrarium eueniet, ſi radix illa propinqua numeri ex numeratore in denominatorem producti fuerit maior quam vera. Nam priori modo gignetur radix fractionis propinqua maior, quam vera, poſteriori vero modo minor, quam vera, vt perſpicuum eſt. Hanc regulam propoſui quoque libr. 4. cap. 2. Num. 5. ibique eandem demonſtraui. Exemplum huius etiam regulæ ibidem habes.

PRO radice verò cubica: duc numeratorem in quadratum denominatoris, & producti numeri radicem cubicam propinquam diuide per denominatorem: Vel duc denominatorem in quadratum numeratoris, & per numeri producti radicem cubicam propinquam partire numeratorem. Vtroque enim modo propinqua radix propoſitæ minutiæ proueniet. Et priori quidem modo, ſi illa radix cubica propinqua fuerit minor quam vera, reperietur radix propinqua fractionis minor quoque quam vera, propterea quod diuiſio fit numeri vero minoris per denominatorem fractionis: Si autem radix illa propinqua fuerit maior quam vera, gignetur quoque radix propinqua fractionis maior quam vera, quod tunc numerus vero maior per denominatorem fractionis diuidatur. Poſteriori vero modo, ſi radix illa cubica propinquior fuerit minor quam vera, producetur radix propinqua fractionis maior quam vera, quod tunc diuiſio fiat per numerum vero minorem: At ſi illa radix cubica propinqua fuerit maior quam vera, erit inuenta radix fractionis propinqua minor quam vera, quandoquidem tunc diuiditur numerator per numerum vero maiorẽ. Exemplum in fractione $\frac{8}{27}$. habente verã radicem cubicam $\frac{2}{3}$. Ducto numeratore 8. in 729. quadratum denominatoris 27. fit numerus 5832. cuius radix cubica eſt 18. Hæc diuiſa per denominatorem 27. facit $\frac{18}{27}$. id eſt, $\frac{2}{3}$. pro radice cubica fractionis $\frac{8}{27}$. Item ducto denominatore 27. in 64. quadratum numeratoris 8. gignitur numerus 1728. cuius radix cubica eſt 12. per quam ſi diuidatur numerator 8. fit Quotiens $\frac{8}{12}$. hoc eſt, $\frac{2}{3}$. vt prius, pro radice cubica fractionis $\frac{8}{27}$. propoſitæ. Alterum exemplum in fractione $\frac{5}{7}$. non habente veram radicem cubicam. Ducto numeratore 5. in 49. quadratum denominatoris 7. fit numerus 245. cuius radix cubica propinqua 6 $\frac{25}{100}$. (inuenta per appoſitionum duorum ternariorum cifrarum) diuiſa per denominatorẽ 7. facit Quotientem $\frac{625}{700}$. hoc eſt, $\frac{25}{28}$. pro radice fractionis $\frac{5}{7}$. Item ducto denominatore 7. in 25. quadratum numeratoris 5. fit numerus 175. per cuius radicem cubicam 5 $\frac{59}{100}$. propinquam inuentam per appoſitionẽ 000000. ad 175. ſi partiamur numeratorem 5. inueniemus Quotientem $\frac{500}{559}$. pro radice cubica propinqua datæ fractionis $\frac{5}{7}$. atque ita de aliis. Porro hoc modo reperitur radix fractionis propinquior, quam per ſuperiorem regulam: quia hic ſolum vnus error irrepit propter radicem cubicam propinquam, quæ vera non eſt, manente tam denominatore in priori modo, quam numeratore in poſteriori, in propria ſua quantitate; at in ſuperiori regula duo interueniunt errores, propter duas radices cubicas propinquas, quæ veræ non ſunt.

DEMON-

DEMONSTRO vtrumque hunc modum hac ratione. Quando nume[rator] in quadratum denominatoris ducitur, erit producti numeri radix cubica vnus duorum mediorum proportionalium inter numeratorem ac denominatorem collocandus iuxta denominatorem, vt conſtat ex iis, quæ propoſ. 18. huius lib. demonſtrata ſunt. [a] Erit igitur proportio numeratoris ad denominatorem triplicata proportionis radicis cubicæ inuentæ ad denominatorem: [b] Eſt autem eadem proportio numeratoris ad denominatorem, tanquam cubi ad cubum, triplicata quoque proportionis radicis cubicæ numeratoris ad radicem cubicam denominatoris. Igitur erit radix cubica inuenta ad denominatorem, vt radix cubica numeratoris ad radicem cubicam denominatoris: [c] ac proinde minutia, cuius numerator radix cubica inuenta, ac denominator ipſe denominator, æqualis erit minutiæ, cuius numerator radix cubica numeratoris, ac denominator radix cubica denominatoris. Quam ob rem ſicut hæc minutia eſt radix cubica fractionis propoſitæ, ita quoque illa erit radix cubica eiuſdem fractionis. Diuiſa ergo radice illa cubica inuenta per denominatorem fractionis propoſitæ (quæ diuiſio fit, quia illa radix cubica inuenta eſt fractio, ac proinde, vt cognoſcatur valor minutiæ, cuius numerator radix illa inuenta, ac denominator ipſemet denominator fractionis propoſitæ, diuidendus eſt numerator huius minutiæ per eius denominatorem: alioquin ſi illa radix cubica inuenta foret numerus integer, diuiſio facienda non eſſet) producetur radix cubica fractionis propoſitæ: quemadmodum ex diuiſione radicis cubicæ numeratoris per radicem cubicam denominatoris procreatur radix cubica fractionis propoſitæ: quippe cum minutia nil aliud ſit, niſi numerator per denominatorem diuiſus.

[a] 10. defin. quinti.
[b] 12. octaui.
[c] 7. minutiarum ad finem lib. 9.

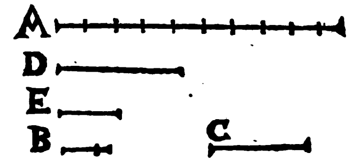
QVANDO verò denominator in quadratum numeratoris ducitur, erit numeri producti radix cubica vnus duorum mediorum proportionalium inter numeratorem, ac denominatorem, collocandus iuxta numeratorem, vt ex demonſtratis propoſ. 18. huius lib. manifeſtum eſt. Ergo rurſus erit proportio numeratoris ad denominatorem triplicata proportionis numeratoris ad illam radicem cubicam inuentam, quemadmodum & proportionis radicis cubicæ numeratoris ad radicem cubicam denominatoris, eadem illa proportio numeratoris ad denominatorem, tanquam cubi ad cubum, triplicata eſt: Ac propterea, vt ſupra, minutia, cuius numerator ipſemet numerator fractionis propoſitæ, denominator verò radix illa cubica inuenta, æqualis erit minutiæ, cuius numerator, radix cubica numeratoris fractionis propoſitæ, & denominator radix cubica denominatoris eiuſdem fractionis. Quocirca diuiſo numeratore per illam inuentam radicem cubicam, prodibit radix cubica fractionis propoſitæ.

PROBL. 17. PROPOS. 22.

RADICEM quadratam & cubicam in numeris non quadratis, & non cubicis per lineas Geometrice inuenire.

SIT datus numerus 10. repræſentans quadratum 10. palmorum, vel pedum,

uarum menſurarum. Capiatur linea A, palmorum, vel pedum 10. &c. & linea B, palmi, vel pedis 1. [a] Inuenta C, media proportionali inter A, & B. Dico C, eſſe radicem quadratam, ſiue latus quadratum, numeri A, 10. [b] Quoniam enim quadratum rectæ C, æquale eſt rectangulo ſub A, & B, comprehenſo: Eſt autem hoc rectangulum 10. quod vnitas B, numerum A, 10. multiplicans procreet 10. perſpicuum eſt, rectam C, eſſe latus quadratum 10. palmorum, vel pedum, &c. quod eſt propoſitum.



[a] 13. ſexti.
[b] 17. ſexti.

RVRSVS [c] inuentis inter A, & B, duabus mediis proportionalibus D, & E. Dico E, quæ minori B, propinquior eſt, latus eſſe cubicum, ſiue radicem cubicam, numeri 10. [d] Quoniam enim cubus rectæ E, æqualis eſt parallelepipedo ſub quadrato rectæ B, & ſub A, recta comprehenſo. Eſt autem hoc parallelepipedum 10. quod vnitas B, ſe multiplicans faciat quadratum 1. & quadratum 1. multiplicans numerum A, 10. gignat 10. liquidò conſtat, rectam E, eſſe latus cubicum 10. palmorum, vel pedum, &c. quod eſt propoſitum.

[c] 15. huius.
[d] Lemma 18. huius.

FINIS LIBRI SEXTI.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER SEPTIMVS.

De figuris Iſoperimetris diſputans: cui Appendicis loco annectitur breuis de circulo per lineas quadrando tractatiuncula.

NOBILIS ac præſtans de Iſoperimetris figuris ſemper apud omnes habita eſt diſputatio, in qua videlicet inquiritur, vtra duarum ſit altera maior, & capacior, & quæ ſit omnium maxima, & capaciſſima. Non pauci enim rerum Geometricarum ignari hac in re hallucinati ſunt, putantes figuras Iſoperimetras, quæ nimirum æquales ambitus continent, eſſe inter ſe æquales, ſiue æquè capaces. Immo è contrario, quod mirum eſt, nonnulli, qui ſe Geometras appellant, adduci vix poſſunt, vt credant, dari poſſe duas figuras Iſoperimetras inter ſe omnino æquales, quod tamen fieri poſſe, clariſſimè propoſ. 20. 21. 22. huius demonſtrabimus. Quamuis autem de Iſoperimetris figuris tractionem benè longam, & copioſam in commentariis noſtris in ſphæram inſtituerimus, exemplum in hoc ſecuti Theonis Alexandrini, qui idem argumentum in commentariis in Almageſtum Ptolomei perſecutus eſt: tamen quia id in alieno fortaſſis loco factum eſſe ſuſpicari quis poſſet; transferemus eam tractationem ex noſtris commentariis in ſphæram in hanc noſtram Geometriam practicam, tanquam in magis proprium locum, additis tribus, aut quatuor propoſitionibus, quæ in illa tractatione deſiderantur, & tamen maximè ad hanc materiam ſpectare videntur.

DEFINITIONES.

Definitiones ad tractationẽ Iſoperimetrarũ figurarum pertinentes.

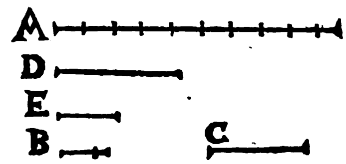
I.

ISOPERIMETRÆ figuræ ſunt, quæ æquales ambitus continent.

 II. RE-

uarum menſurarum. Capiatur linea A, palmorum, vel pedum 10. &c. & linea B, palmi, vel pedis 1. [a] Inuenta C, media proportionali inter A, & B. Dico C, eſſe radicem quadratam, ſiue latus quadratum, numeri A, 10. [b] Quoniam enim quadratum rectæ C, æquale eſt rectangulo ſub A, & B, comprehenſo: Eſt autem hoc rectangulum 10. quod vnitas B, numerum A, 10. multiplicans procreet 10. perſpicuum eſt, rectam C, eſſe latus quadratum 10. palmorum, vel pedum, &c. quod eſt propoſitum.

[a] 13. ſexti.
[b] 17. ſexti.



RVRSVS [c] inuentis inter A, & B, duabus mediis proportionalibus D, & E. Dico E, quæ minori B, propinquior eſt, latus eſſe cubicum, ſiue radicem cubicam, numeri 10. [d] Quoniam enim cubus rectæ E, æqualis eſt parallelepipedo ſub quadrato rectæ B, & ſub A, recta comprehenſo. Eſt autem hoc parallelepipedum 10. quod vnitas B, ſe multiplicans faciat quadratum 1. & quadratum 1. multiplicans numerum A, 10. gignat 10. liquidò conſtat, rectam E, eſſe latus cubicum 10. palmorum, vel pedum, &c. quod eſt propoſitum.

[c] 15. huius.
[d] Lemma 18. huius.

FINIS LIBRI SEXTI.

GEO-

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER SEPTIMVS.

De figuris Iſoperimetris diſputans: cui Appendicis loco annectitur breuis de circulo per lineas quadrando tractatiuncula.

NOBILIS ac præſtans de Iſoperimetris figuris ſemper apud omnes habita eſt diſputatio, in qua videlicet inquiritur, vtra duarum ſit altera maior, & capacior, & quæ ſit omnium maxima, & capaciſſima. Non pauci enim rerum Geometricarum ignari hac in re hallucinati ſunt, putantes figuras Iſoperimetras, quæ nimirum æquales ambitus continent, eſſe inter ſe æquales, ſiue æquè capaces. Immo è contrario, quod mirum eſt, nonnulli, qui ſe Geometras appellant, adduci vix poſſunt, vt credant, dari poſſe duas figuras Iſoperimetras inter ſe omnino æquales, quod tamen fieri poſſe, clariſſimè propoſ. 20. 21. 22. huius demonſtrabimus. Quamuis autem de Iſoperimetris figuris tractionem benè longam, & copioſam in commentariis noſtris in ſphæram inſtituerimus, exemplum in hoc ſecuti Theonis Alexandrini, qui idem argumentum in commentariis in Almageſtum Ptolomei perſecutus eſt: tamen quia id in alieno fortaſſis loco factum eſſe ſuſpicari quis poſſet; transferemus eam tractationem ex noſtris commentariis in ſphæram in hanc noſtram Geometriam practicam, tanquam in magis proprium locum, additis tribus, aut quatuor propoſitionibus, quæ in illa tractatione deſiderantur, & tamen maximè ad hanc materiam ſpectare videntur.

DEFINITIONES.

Definitiones ad tractationẽ Iſoperimetrarũ figurarum pertinentes.

I.

ISOPERIMETRÆ figuræ ſunt, quæ æquales ambitus continent.

II.

REGVLARIS figura dicitur ea, quæ & æquilatera, & æquiangula eſt.

III.

CENTRVM figuræ regularis dicitur punctum illud, quod centrum eſt circuli figuræ inſcripti, vel circumſcripti.

IIII.

AREA cuiuslibet figuræ dicitur capacitas, ſpatium ſiue ſuperficies intra latera ipſius comprehenſa.

V.

OMNE ſolidum rectangulum (cuius nimirum baſes æquidiſtantes ſunt, & æquales, lateraque ad baſes recta, quale eſt Parallelepipedum) contineri dicitur ſub altera baſium, ac perpendiculari ab illa baſi ad alteram protracta.

QVIA nimirum alterutra baſium indicat longitudinem ac latitudinem figuræ, perpendicularis verò altitudinem, ſiue profunditatem eiuſdem demonſtrat.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

Triangulum quodcunque cui rectangulo æquale ſit.

AREA cuiuslibet trianguli æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub perpendiculari à vertice ad baſim protracta, & dimidia parte baſis. Item rectangulo comprehenſo ſub ſemiſſe perpendicularis, & tota baſe. Vel deñique ſemiſsi rectanguli ſub tota perpendiculari, & tota baſe comprehenſi.

a 41. primi.
b 36. primi.

SIT triangulum ABC, ex cuius vertice A, ad baſim BC, ducatur perpendicularis AD, diuidatque primò baſim BC, bifariam, vt in prima figura. Per A, ducatur EAF, in vtramque partem æquidiſtans rectæ BC, compleaturque rectangulum BEFC, [a] quod erit duplum trianguli ABC; [b] Item duplum rectanguli ADBE. Quare rectangulum ADBE, quod nimirum continetur ſub perpendiculari AD, & dimidio baſis BD, æquale eſt triangulo ABC, diuidat ſecundo perpendicularis AD, baſim BC, non bifariam, vel etiã cadat in baſim CB, protractam, vt in 2. & 3. figura; Et per A, ducatur rurſus AF, in vtramq; partẽ æquidiſtãs rectę BC, compleaturq; rectangulũ ADCF. Diuiſa deinde baſe BC, bifariã in G, ducantur



rectæ BE, GH, ipſi AD, æquidiſtantes, [a] eritque GH, ęqualis perpendiculari AD. [b] Quoniam igitur rectangulum BCFE, duplum eſt trianguli ABC; [c] Item duplum rectanguli BEHG: erit rectangulum BEHG, quod continetur ſub perpendiculari GH, vel AD, & dimidio baſis BG, æquale triangulo ABC.

[a] 34. primi.
[b] 41. primi.
[c] 36. primi.

SECETVR iam perpendicularis AD, vel GH, bifariam in I, agaturque per I, ipſi BC, parallela KL. Dico triangulum idem ABC, æquale quoque eſſe rectãgulo BCLK, in 1. & 2. figura, Item rectangulo BCLM, in 3. figura, comprehenſo nimirum ſub ID, vel IG, ſemiſſe perpendicularis AD, vel HG. [d] Quoniam enim triangulum ABC, dimidium eſt rectanguli EC, eiuſdemque dimidium etiam eſt rectangulum BL; [e] quod rectangula BL, LE, ſuper æquales baſes æqualia ſint: æqualia inter ſe erunt triangulum ABC, & rectangulum BL. [f] Et quia rectangulum BF, contentum ſub perpendiculari AD, vel BE, & baſe trianguli BC, duplum eſt trianguli ABC; erit triangulum ſemiſsi illius rectanguli ęquale. Area igitur cuiuslibet trianguli æqualis eſt, &c. quod erat oſtendendum.

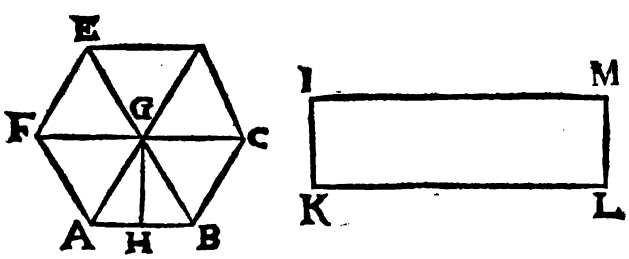
[d] 41. primi.
[e] 36. primi.
[f] 41. primi.

PROBL. 2. PROPOS. 2.

Regularis figura quæcunque cui rectãgulo æqualis ſit.

AREA cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt rectangulo contento ſub perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ducta, & ſub dimidiato ambitu eiuſdem figuræ.

SIT figura regularis quæcunque ABCDEF, & centrum eius punctum G, à quo ducatur GH, perpendicularis ad vnum latus, nempe ad AB: Sit quoq; rectangulum IKLM, contentum ſub IK, quæ æqualis ſit perpendiculari GH, & ſub KL, recta, quæ æqualis ponatur dimidiæ parti ambitus figuræ ABCDEF. Di-



co huic rectangulo æqualem eſſe figuram regularem ABCDEF. Ducantur enim ex G, ad ſingulos angulos lineæ rectæ, vt tota figura in triangula reſoluatur, quæ omnia æqualia inter ſe erunt, vt in corollario propoſ. 8. lib. 1. Eucl. demonſtratum eſt à nobis: propterea quòd omnia latera triangulorum à puncto G, exeuntia ſint inter ſe æqualia, habeantq; baſes æquales, nempè latera figuræ regularis. [g] Hinc enim efficitur, omnes angulos ad G, æquales eſſe, ac proinde, ex dicto corollario, triangula ipſa inter ſe quoque eſſe æqualia. [h] Quoniam igitur rectangulum contentum ſub GH, perpendiculari, & medietate baſis AB, æquale eſt triangulo ABG, ſi ſumantur tot huiuſmodi rectangula, in quot triangula diuiſa eſt figura regularis, erunt omnia ſimul figuræ ABCDEF, ęqualia; propterea

[g] 8. primi.
[h] 1. huius.

[a] 1. ſecundi.

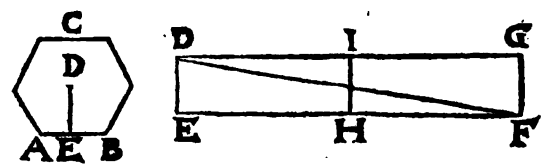
quod omnia triangula oſtenſa ſint æqualia triangulo ABG. [a] Cum igitur eadem ſimul æqualia ſint rectangulo IKLM; propterea quòd KL, æqualis ponitur dimidio ambitus ABCDEF, hoc eſt omnibus medietatibus baſium ſimul; & recta IK, perpendiculari GH; erit figura regularis ABCDEF, æqualis rectangulo IKLM. Area igitur cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt, &c. quod erat demonſtrandum.

THEOR. 3. PROPOS. 3.

Regularis figura quæcunque cui triangulo rectangulo æqualis ſit.

AREA cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt triangulo rectangulo, cuius vnum latus circa angulum rectum æquale eſt perpendiculari à centro figuræ ad vnum latus ductæ, alterum verò æquale ambitui eiuſdem figuræ.

SIT rurſus figura regularis ABC, cuius centrum D, à quo perpendicularis ad latus AB, ducta ſit DE; triangulum verò rectangulum DEF, habens angulũ



E, rectum, & latus DE, æquale perpendiculari DE, latus autem EF, æquale ambitui figuræ ABC. Dico triangulum DEF, figuræ ABC, æquale eſſe. Compleatur enim rectangulum DEFG; & diuiſa EF, bifariam in puncto H, ducatur HI, æquidiſtans rectæ DE. [b] Erit igitur rectangulum DEHI, contentum ſub DE, perpendiculari, & ſub EH, dimidio ambitus figuræ, æquale figuræ ABC: At rectangulo DEHI, æquale eſt triangulum DEF. Nam rectangulum DEHI, eſt dimidium rectanguli DEFG; [c] propterea quod ęqualia ſunt rectangula DEHI, IHFG; [d] Triangulum quoque DEF, dimidium eſt eiuſdem rectanguli DEFG. Igitur & triangulum DEF, æquale erit figuræ ABC. Area ergo cuiuslibet figuræ regularis æqualis eſt triangulo rectangulo, &c. quod demonſtrandum erat.

[b] 2. huius.
[c] 36 primi.
[d] 41. primi.

THEOR. 4. PROPOS. 4.

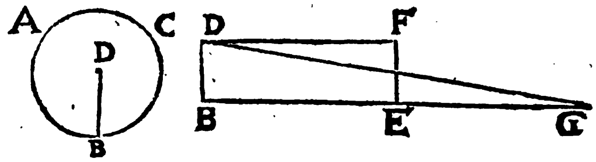
Circulus quicunque cui rectangulo æqualis ſit.

AREA cuiuslibet circuli æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & dimidiata circumferentia circuli.

ESTO circulus ABC, cuius ſemidiameter DB: Rectangulum autem DBEF, comprehenſum ſub DB, ſemidiametro circuli, & BE, recta, quę æqualis ſit dimidiatæ circumferentiæ circuli. Dico aream circuli ABC, æqualem eſſe rectangulo DBEF. Producatur enim BE, in continuum, ponaturque EG, æqualis ipſi BE, vt ſit BG, recta æqualis toti circumferentiæ circuli. Coniungantur deniq; puncta

punċta D,G,recta D G. [a] Quoniam igitur circulus A B C, æqualis eſt triangulo DBG: [b] Eſt autem triangulum DBG, rectangulo D B E F, æquale; quod baſis

[a] *1. de Dimẽs. circuli Archim.*
[b] *ſchol. 41. primi.*



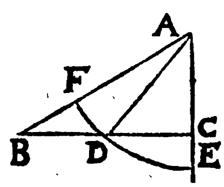
trianguli dupla ſit baſis rectanguli; (Id quod etiam ex demonſtratione antecedentis propoſ. liquet, vbi oſtendimus, triangulum DEF, æquale eſſe rectangulo DEHI:) erit quoque circulus ABC, rectangulo DBEF, æqualis. Area ergo cuiuslibet circuli æqualis eſt rectangulo, &c. quod oſtendendum erat.

THEOR. 5. PROPOS. 5.

Proprietas quædam trianguli rectanguli.

IN omni triangulo rectangulo, ſi ab vno acutorum angulorum vtcunque ad latus oppoſitum linea recta ducatur, erit maior proportio huius lateris ad eius ſegmentum, quod prope angulum rectum exiſtit, quam anguli acuti prædicti, ad eius partem dicto ſegmento lateris oppoſitum.

SIT triangulum rectangulum ABC, cuius angulus C, ſit rectus; ducaturque ab acuto angulo A, ad latus oppoſitum BC, recta AD, vtcunque; Dico maiorem eſſe proportionem rectæ B C, ad rectam CD, quam anguli B A C, ad angulum CAD. [c] Quoniam enim recta AD, maior quidem eſt, quam A C; minor verò, quam AB; ſi centro A, interuallo autem A D, circulus deſcribatur, ſecabit is rectam A C, protractam infra punctum C, vt in E, at verò rectam AB, ſupra punctum B, vt in F. Et quia maior eſt proportio trianguli BAD, ad ſectorem FAD, quã trianguli DAC, ad ſectorem DAE, (propterea quod ibi eſt proportio maioris inæqualitatis, hic autem minoris inæqualitatis) [d] erit quoque permutando maior proportio trianguli BAD, ad triangulum DAC, quam ſectoris FAD, ad ſectorẽ D A E. [e] Componendo igitur maior quoque erit proportio trianguli B A C, ad triangulum DAC, hoc eſt, rectæ BC, ad rectam CD, [f] (habent enim triangula BAC, DAC, eandem proportionem, quam baſes BC, CD.) quam ſectoris F A E, ad ſectorẽ DAE, hoc eſt, quam anguli BAC, ad angulum CAD; [g] quod eandem habeant proportionem ſectores, quam anguli. Quocirca in omni triangulo rectangulo, &c. quod demonſtrandum erat.



[c] *19. primi.*
[d] *27. quinti.*
[e] *28. quinti.*
[f] *1. ſexti.*
[g] *coroll. 33. ſexti.*

HÆC propoſitio vera quoque eſt in triangulo non rectangulo, dummodo angulus C, maior ſit angulo A D C, vt patet; [h] quod tunc etiam A D, maior ſit, quam AC, minor vero, quam AB, &c.

[h] *19. primi.*

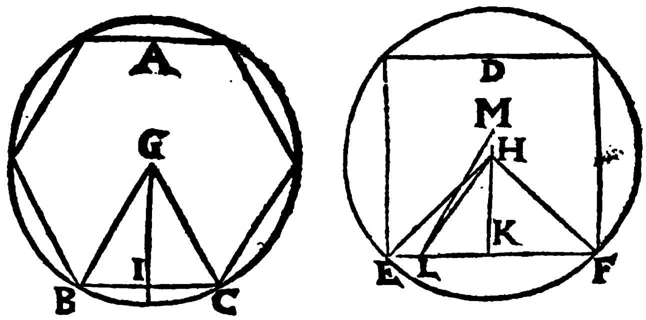
THEOR.

THEOR. 6. PROPOS. 6.

Inter figuras Iſoperimetras, quæ plures angulos ſeu latera continet, illa maior eſt.

ISOPERIMETRARVM figurarum regularium maior eſt illa, quæ plures continet angulos, pluraue latera.

SINT duæ figuræ regulares iſoperimetræ ABC, DEF, habeatque plura latera, ſiue angulos figura ABC, quam DEF. Dico ABC, maiorem eſſe, quam DEF.



Deſcribatur enim circa figuras circuli, à quorum centris G, H, ducantur ad BC, EF, perpendiculares GI, HK,[a] quæ diuident rectas BC, EF, bifariam. Quoniam igitur figura ABC, plura habet latera, quam DEF, ſibi iſoperimetra, efficitur, vt latus BC, ſæpius repetitum metiatur ambitum figuræ ABC, quam latus EF, ambitum figuræ DEF. Quare latus B C, minus erit latere E F, ideoque B I, medietas lateris B C, minor, quàm E K, medietas lateris EF. Ponatur KL, æqualis ipſi BI, & ducantur rectæ LH, HE, HF, GB, GC.[b] Et quia omnes arcus circuli D E F, ſunt æquales, quòd & rectæ ſubtenſę æquales ponantur; erit recta E F, ita ſubmultiplex ambitus figuræ D E F, vt arcus E F, ſubmultiplex eſt circumferentiæ circuli D E F: Eademque ratione ita multiplex ambitus figuræ A B C, rectæ B C, ſicut multiplex eſt circumferentia A B C, arcus B C. [c] Vt autem arcus EF, ad circumferentiam circuli DEF, ita eſt angulus EHF, ad quatuor rectos; Igitur erit quoque vt recta EF, ad ambitum figuræ DEF, hoc eſt, ad ambitum figuræ ABC, illi æqualem, ita angulus EHF, ad quatuor rectos: Vt autem ambitus figuræ ABC, ad rectam BC, ita eſt circumferentia circuli ABC, ad arcum BC,[d] hoc eſt, ita quatuor recti ad angulum B G C. Ex æquo igitur, vt recta E F, ad rectam BC,[e] hoc eſt, vt recta EK, ad rectam BI, hoc eſt, ad rectam KL, ita angulus EHF, ad angulum BGC,[f] hoc eſt, ita angulus EHK, ad angulum B G I.[g] Eſt autem maior proportio rectæ EK, ad rectam KL, quam anguli EHK, ad angulum KHL.[h] Quare maior erit proportio quoque anguli EHK, ad angulum BGI, quam eiuſdem anguli EHK, ad angulum KHL;[i] ideoq; maior erit angulus KHL, quam angulus B G I. Cum igitur anguli H K L, G I B, ſint ęquales, vt pote recti;[k] erit reliquus angulus HLK, minor reliquo angulo GBI. Fiat igitur angulus K L M, æqualis angulo G B I; cadetque LM, extra L H; conuenietque cum KH, producta vltra H, in puncto M. Quoniam igitur duo anguli B, I, trianguli GBI, ęquales ſunt duobus angulis L, K, trianguli MLK, & latera BI, LK, æqualia,[l] erunt rectæ GI, MK, ęquales. Recta ergo GI, maior eſt, quam recta HK.

[a] 3. tertij.
[b] 28. tertij.
[c] 2. coroll. 33. ſexti.
[d] 2. coroll. 33. ſexti.
[e] 15. quinti.
[f] 15. quinti.
[g] 5. huius.
[h] 13. quinti.
[i] 10. quinti.
[k] 32. primi.
[l] 26. primi.

Quam-

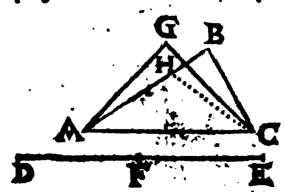
Quamobrem rectangulum ſub GI, & dimidio ambitu figuræ ABC, contentum, maius erit rectangulo contento ſub HK, & dimidio ambitu figuræ DEC, qui æqualis ponitur dimidio ambitus figuræ ABC, [a] Quocirca cum illud rectangulũ oſtenſum ſit æquale figuræ ABC, hoc autem figuræ DEF, æquale; maior quoq; erit figura ABC, quàm figura DEF. Iſoperimetrarum ergo figurarum regularium maior eſt illa &c. quod erat oſtendendum. [a] *2. huius.*

PROBL. 1. PROPOS. 7.

Qua arte triangulum Iſoſceles conſtituatur Iſoperimetrum cuiuis triangulo non Iſoſceli.

PROPOSITO triangulo, cuius duo latera ſint inæqualia, ſupra reliquum latus triangulum priori Iſoperimetrum, ac duo habens latera æqualia, deſcribere.

SIT triangulum ABC, cuius duo latera AB, BC, ſint inæqualia, nempe AB, maius, quam BC; oporteatque ſupra AC, conſtruere triangulum Iſoſceles, atq; Iſoperimetrum triangulo ABC. Sumatur recta DE, æqualis duobus lateribus AB, BC, ſimul, diuidaturque bifariam in F. Et quoniam latera AB, BC, ſimul maiora ſunt latere AC, erunt quoque DF, FE, ſimul, maiores quam linea AC. Atque ob id tres lineæ AC, DF, FE, ita ſeſe habebunt, vt quælibet duæ ſint reliqua maiores. [b] Si igitur ex ipſis conficiatur triangulum AGC, effectum erit, quod proponitur. Erunt enim latera AG, GC, & inter ſe æqualia, & ſimul ſumpta æqualia lateribus AB, BC, ſimul ſumptis: Addito igitur communi AC, erunt triangula ABC, AGC, Iſoperimetra. Propoſito igitur triangulo, cuius duo latera ſint inæqualia, ſupra reliquum latus triangulum, &c. deſcripſimus. quod faciendum erat. [16] *16. primi.* [b] *22. primi.*



SCHOLIVM.

CADET autem neceſſario punctum G, extra triangulum ABC: Si namque caderet in latus AB, vt ad punctum H, [c] eſſet ducta recta HC, minor, quam HB, BC, ſimul, & ob id triangulum AHC, non eſſet Iſoperimetrum triangulo ABC, cuius contrarium ex conſtructione eſt demonſtratum. Multo minus cadet pũctum G, intra triangulum ABC. Quare extra cadet, quod eſt propoſitum. [c] *20. primi.*

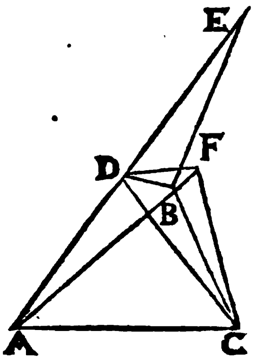
THEOR. 7. PROPOS. 8.

Iſoſceles triangulum maius eſt triangulo ſibi Iſoperimetro non Iſoſcele.

DVORVM triangulorum Iſoperimetrorum eandem habentium baſim, quorum vnius duo latera ſint æqualia, alterius verò inæqualia; maius erit illud, cuius duo latera æqualia ſunt.

ESTO triangulum ABC, cuius latus AB, maius ſit latere BC, [d] conſtituaturque ſuper baſim AC, triangulo ABC, triangulum Iſoperimetrum ADC, habens latera AD, DC, æqualia & inter ſe, & lateribus AB, BC, ſimul ſumptis. Dico tri- [d] *7. huius.*

angulum ADC, maius eſſe triangulo ABC. Producatur enim AD, ad partes D,



ſitque DE, æqualis ipſi AD, ſiue ipſi DC. Ducantur quoque rectæ DB, BE. [a] Quoniam igitur AB, BE, maiores ſunt, quam AE, hoc eſt, quam AD, DC, ſimul, hoc eſt, quam AB, BC, ſimul; ablata communi AB, erit BE, maior quam BC. Et quia latera ED, DB, trianguli EDB, æqualia ſunt lateribus CD, DB, trianguli CDB. At verò baſis BE, baſe BC, maior, [b] erit angulus EDB, maior angulo CDB. Quare angulus EDB, maior eſt, quam dimidium anguli EDC: Eſt autem angulus DAC, dimidium anguli EDC; [c] propterea quod anguli DAC, DCA, æquales ſunt, [d] & his ſimul ſumptis ęqualis quoque externus angulus EDC. Maior igitur erit angulus EDB, angulo DAC. [e] Fiat angulus EDF, ęqualis angulo interno DAC; cadetque DF, recta ſupra rectam DB, [f] æquidiſtabitque rectæ AC. Producatur DF, donec cum AB, protracta conueniat in F, ducaturq; recta FC. [g] Quoniam igitur triangula ADC, AFC, æqualia ſunt, triangulum autem AFC, maius eſt triangulo ABC; maius quoque erit triangulum ADC, triangulo ABC. Quam ob rem duorum triangulorum Iſoperimetrorum eandem habentium baſim, &c. quod demonſtrandum erat.

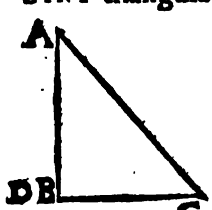
a 20. primi.
b 25. primi.
c 5. primi.
d 32. primi.
e 23. primi.
f 28. primi.
g 37. primi.

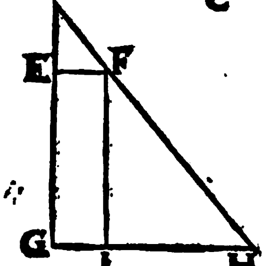
THEOR. 8. PROPOS. 9.

Proprietas duorum triangulorum rectangulorũ ſimilium.

IN ſimilibus triangulis rectangulis quadratum à lateribus, quæ angulis rectis ſubtenduntur, tanquam ab vna linea, deſcriptum, æquale eſt quadratis duobus ſimul, quæ à reliquis homologis lateribus tanquam ex duabus lineis, ita vt quælibet duo latera homologa conficiant vnã lineam rectam, deſcribuntur.

SINT triangula rectangula ſimilia ABC, DEF, ita vt anguli B, & E, ſint





recti, anguli verò C, & F, inter ſe æquales; itemque anguli A, & D, inter ſe æquales; homologaque latera AB, DE; Item BC, EF, & AC, DF. Dico quadratũ ex AC, DF, tanquam ex linea vna, deſcriptum, æquale eſſe duobus quadratis, quorum vnum ex AB, DE, tanquam ex vna linea, alterum verò ex BC, EF, tanquam ex vna quoque linea, deſcribitur. Producta namque DE, ad partes E, ſumatur EG, æqualis rectæ AB, & ducatur GH, recta æquidiſtans rectæ EF, donec cum DF, producta conueniat in puncto H; Deinde per F, ducatur recta FI, æquidiſtans rectæ EG. Erit igitur triangulum FIH, æquiangulum triangulo DEF, hoc eſt, triangulo ABC. [h] Nam angulus FIH, æqualis eſt angulo G, [i] & hic æqualis angulo DEF, hoc eſt, angulo B; angulus verò H, æqualis eſt angulo

h 29. primi.
i 29. primi.

DFE

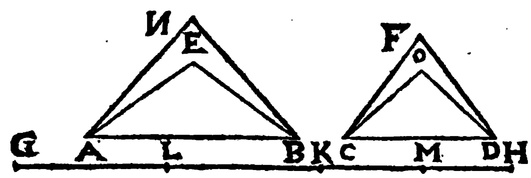
DFE, hoc eſt, angulo C; [a] ac proinde & angulus IFH, angulo A: Sunt autem [a] 32. primi.
& latera AB, FI, æqualia; [b] Nam recta FI, eſt æqualis rectæ EG, hæc autem rectæ [b] 34. primi.
AB, ſumpta fuit ęqualis. [c] Igitur & latera BC, IH; item AC, FH, æqualia inter ſe [c] 26 primi.
erunt. Quare recta DH, compoſita erit ex AC, & DF, Recta verò DG, ex AB, & DE, Recta denique GH, ex BC, & EF; [d] quod GI, recta æqualis ſit rectæ EF. [d] 34. primi.
[e] Et quoniam quadratum rectæ DH, æquale eſt quadratis rectarum DG, GH, [e] 47. primi.
ſimul, conſtat verum eſſe, quod proponitur. In ſimilibus igitur triangulis rectangulis quadratum à lateribus, quæ angulis rectis ſubtenduntur, &c. quod erat demonſtrandum.

PROBL. 2. PROPOS. 10.

Qua arte conſtituantur duo triangula Iſoſcelia ſimilia quidem interſe Iſoperimetra vtro aliis duobus Iſoſcel bus.

DATIS duobus triangulis Iſoſcelibus; quorum baſes inæquales exiſtant, duoque latera vnius æqualia ſint duobus lateribus alterius; Super eiſdem baſibus duo alia triangula Iſoſcelia inter ſe quidem ſimilia, prioribus verò ſimul ſumptis Iſoperimetra ſimul ſumpta, conſtituere.

SINT ſuper baſes inæquales AB, CD, duo triangula Iſoſcelia AEB, CFD, ſintque quatuor lineę AE, EB, CF, FD, inter ſe æquales; maior autem ſit baſis AB, baſe CD. quibus poſitis, [f] erit angulus E, maior angulo F, ideoque trian- [f] 25. primi.



gula non ſimilia, cum nec æquiangula. Oporteat iam ſuper baſes eaſdem AB, CD, conſtituere alia duo triangula Iſoſcelia inter ſe quidem ſimilia, Iſoperimetra verò ſimul ſumpta prioribus triangulis ſimul ſumptis. Ponatur recta GH, æqualis quatuor rectis AE, EB, CF, FD, [g] diuidaturque in puncto K, vt eſſet recta [g] 10. ſexti.
compoſita ex AB, & CD, diuiſa in puncto B, hoc eſt, ſit ea proportio GK, ad KH, quæ eſt AB, ad CD. Et quia maior eſt recta AB, quam recta CD, maior quoque erit recta GK, quam recta KH, cum vtrobique ſit proportio maioris inæqualitatis. Diuidatur vtraque GK, KH, bifariam in punctis L, & M. Itaque cum ſit vt GK, ad KH, ita AB, ad CD, erit componendo, vt GH, ad KH, ita AB, CD, ſimul ad CD: Eſt autem GH, maior, quàm AB, CD, ſimul, [h] quod & quatuor [h] 20. primi.
rectæ AE, EB, CF, FD, quæ æquales ſunt rectæ GH, maiores ſint, quam AB, CD.
[i] Igitur & KH, maior erit quam CD: Eademque ratione maior erit GK, quam [i] 14. quinti.
AB. Quoniam igitur trium rectarum AB, GL, LK, duæ reliqua ſunt maiores omnifariam ſumptæ; (Duæ enim GL, LK, maiores ſunt quam AB, quod tota GK, maior ſit, quam AB, vt modo fuit oſtenſum; Manifeſtum autem eſt, AB, GL, maiores eſſe reliqua LK; Itemque AB, LK, reliqua GL, eſſe maiores, propterea quod GK, diuiſa eſt bifariam in puncto L. Idem quoq; dices de tribus rectis CD, KM, MH.) [k] conſtituatur ex tribus [k] 22. primi.

rectis AB, GL, LK, triangulum ANB, quod erit Iſoſceles, cadetque punctum N, extra triangulum AEB, cum AE, EB, ſimul dimidium conſtituant rectæ G H; at verò A N, N B, ſimul maius efficiant, quam dimidium rectæ G H. [a] Rurſus ex tribus rectis CD, KM, MH, conſtituatur quoque triangulum C O D, quod Iſoſceles erit, cadetque punctum O, intra triangulum CFD, eo quod CF, FD, ſimul æquales ſint dimidio rectæ GH; at C O, OD, ſimul minores ſint dimidio rectæ GH. Et quoniam quatuor latera AE, EB, C F, FD, ſimul; Item A N, N B, C O, O D, ſimul æqualia ſunt rectæ G H, erunt priora quatuor ſimul, poſterioribus quatuor ſimul æqualia; additis ergo communibus AB, CD, fient ſex latera AE, EB, B A, CF, FD, DC, ſimul æqualia ſex lateribus AN, NB, BA, CO, OD, DC, ſimul; ideoque triangula ANB, COD, ſimul Iſoperimetra erunt triangulis AEB, CFD, ſimul. Dico iam, quod & ſimilia inter ſe ſunt triangula ANB, COD. Nam quoniam eſt, vt AB, ad CD, ita GK, ad KH, [b] hoc eſt, ita GL, ad KM, hoc eſt ita A N, ad C O, & N B, ad O D; erit permutando, vt A B, ad AN, ita C D, ad C O; & vt A N, ad N B, ita C O, ad O D. Proportionalia ergo ſunt latera triangulorum ANB, COD; [c] ac proinde æquiangula inter ſe erunt, & idcirco ſimilia. Quare datis duobus triangulis Iſoſcelibus, quorum baſes inæquales exiſtant &c. conſtituimus, quod faciendum erat.

[a] 22. primi.

[b] 15. quinti.

[c] 5. ſexti.

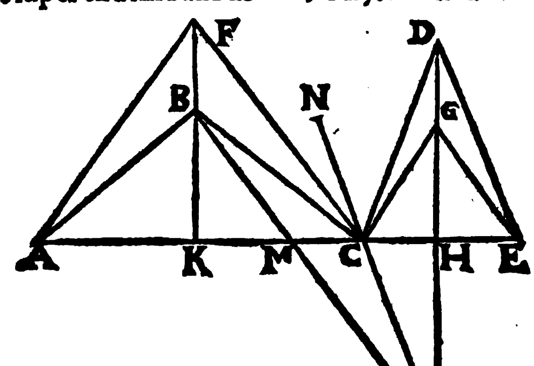
THEOR. 9. PROPOS. 11.

Triangula duo Iſoſcelia ſimilia maiora ſunt duobus Iſoſcelibus non ſimilibus, quæ illis ſint Iſoperimetra, baſeſque habeant eaſdem.

DVO triangula Iſoſcelia ſimilia ſuper inæqualibus baſibus conſtituta, vtraque ſimul maiora ſunt duobus triangulis Iſoſcelibus, vtriſque ſimul, quæ habeant eaſdem baſes cum prioribus, ſintq; diſſimilia quidem inter ſe, at Iſoperimetra prioribus duobus, nec non quatuor latera inter ſe habeant æqualia.

SVPER baſibus inæqualibus A C, C E, ſint duo triangula Iſoſcelia inter ſe non ſimilia ABC, CDE, ita vt quatuor latera AB, BC, C D, D E, inter ſe ſint æqualia. [d] Atque ſuper eiſdem baſibus A C, C E, conſtituantur alia duo triangu-

[d] 10. huius.

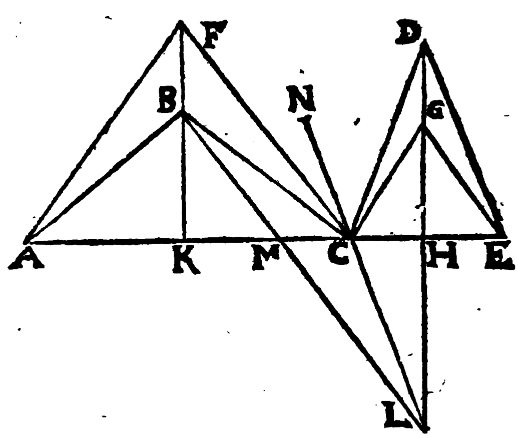


la Iſoſcelia AFC, CGE, ſimilia inter ſe, & Iſoperimetra ſimul prioribus triangulis ſimul. Dico duo triãgula AFC, CGE, ſimul maiora eſſe duobus triangulis ABC, CDE, ſimul. Ponantur enim A C, C E, ſecundum lineam rectam vnam; ſitque

AC,

AC, baſis maior baſe CE. Deinde ex F, per B, ducatur recta FBK, ſecans rectam AC, in puncto K; Item ex D, per G, punctum ducatur recta DGH, ſecans rectam CE, in H. Et quia latera AF, FB, trianguli AFB, æqualia ſunt lateribus CF, FB, triãguli CFB, & baſis AB, baſi BC, æqualis, [a] erit angulus AFB, angulo CFB, æqualis. Rurſus quia latera AF, FK, trianguli AFK, æqualia ſunt lateribus CF, FK, trianguli CFK, & angulus AFK, angulo CFK, æqualis, vt probatum eſt; [b] erunt baſes AK, KC, æquales, & anguli ad K, æquales quoque, hoc eſt, recti. Eadem ratiocinatione concludemus rectam CE, in puncto H, diuidi bifariam, anguloſque ad H, eſſe rectos. Producatur recta DH, ad partes H, ſumaturque HL, æqualis rectæ DH, & extendatur à puncto L, per punctum C, recta LCN. Quoniam verò latera DH, HC, trianguli DCH, æqualia ſunt lateribus LH, HC, trianguli LCH, & anguli ad H, æquales, vtpote recti; [c] erunt baſes DC, LC, æquales, & anguli DCH, LCH, æquales etiam: Atqui angulus DCH, maior eſt angulo GCH, & angulus GCH, æqualis eſt angulo FAK, propter ſimilitudinem triangulorum GCE, & FAC, hoc eſt, angulo FCA, [d] qui angulo FAC, æqualis eſt. Erit igitur angulus DCH, hoc eſt, angulus LCH, qui illi oſtenſus eſt æqualis, hoc eſt, angulus NCK, [e] qui angulo LCH, ad verticem eſt æqualis, maior etiam angulo FCA: & ob id CN, recta extra rectam CF, cadet neceſſariò; & rectæ LC, CB, propterea comprehendent ad partes K, angulum BCL. Quare ſi ducatur recta BL, ſecabit ea lineam CK, in aliquo puncto inter puncta C, & K, quod ſit M. Quoniam verò rectæ AB, BC, CD, DE, ſimul æquales ſunt rectis AF, FC, CG, GE, ſimul, propter triangula iſoperimetra, erunt quoque dimidia earum æqualia inter ſe, nimirum rectę BC, CD, hoc eſt, BC, CL, ſimul æquales ipſis FC, CG, ſimul: [f] Sunt autem rectæ BC, CL, ſimul maiores recta BL. Igitur & FC, CG, ſimul maiores erunt eadem recta BL:

[a] *8. primi.*
[b] *4. primi.*
[c] *4. primi.*
[d] *5. primi.*
[e] *15. primi.*
[f] *20. primi.*

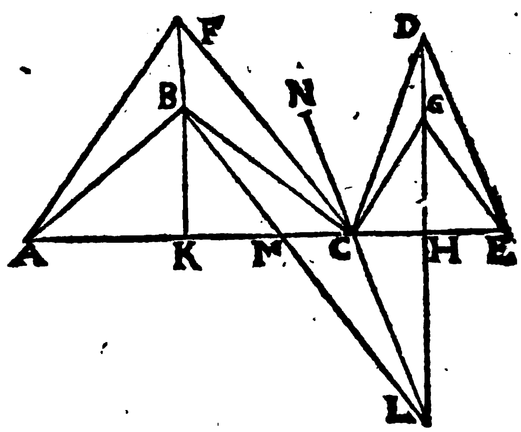


ideoque quadratum ex FC, CG, tanquam ex vna linea, deſcriptum maius erit quadrato BL. [g] Quod autem ex FC, CG, tanquam ex vna linea, deſcribitur quadratum, æquale eſt quadrato ex FK, GH, tanquam ex vna linea deſcripto, vna cum quadrato, quod ex KC, CH, tanquam ex vna linea deſcribitur. [h] Quadratum verò ex LB, deſcriptum æquale eſt quadrato ex BK, LH, hoc eſt, ex BK, DH, tanquam ex vna linea, deſcripto, vna cum quadrato, quod ex KM, MH, tanquam ex vna linea, deſcribitur; quod triangula rectangula BKM, LHM, ſint ſimilia inter ſe. [i] Sunt enim anguli M, ad verticem æquales,

[g] *9. huius.*
[h] *9. huius.*
[i] *15. primi.*

 &an-

a 32. primi. & anguli K, H, recti, [a] ideoque & reliqui KBM, HLM, æquales. Igitur quadratum ex FK, GH, tanquam ex vna linea, deſcriptum, & quadratum ex KC, CH, tanquam ex vna linea deſcriptum, hoc eſt, quadratum KH, vtraque ſimul, maiora ſunt quadrato ex BK, DH, tanquam ex vna linea, deſcripto, & quadrato ex KM, MH, tanquam ex vna linea deſcripto, hoc eſt, quadrato KH, vtriſque ſimul. Ablato ergo communi quadrato KH, erit quadratum ex FK, GH, tanquam ex vna linea, deſcriptum maius quadrato ex BK, DH, tanquam ex vna linea, deſcripto; ideoque maiores erunt rectæ lineæ FK, GH, ſimul rectis BK, DH, ſimul; Ac propterea, demptis communibus BK, GH, erit FB, reliqua maior, quam reliqua DG. Eſt autem & KC, maior quam HC, quod tota AC, cuius dimidium eſt KC, maior ponitur quam tota CE, cuius dimidium eſt HC. Quapropter rectangulum ſub FB, KC, contentum, maius erit rectangulo ſub DG, HC, contento. Et quoniam triangulum FBC, dimidium eſt rectanguli ſub FB, KC, contenti; (Nam ſi ſuper FB, conſtituatur rectangulum altitudinem habens KC, ita vt triangulum, & rectangulum inter



b 41. primi. eaſdem ſint parallelas; [b] erit triangulum parallelogrammi dimidium. quod quidem parallelogrammum idem eſt, quod rectangulum ſub FB, KC, contentum, vt conſtat.) Triangulum verò DGC, dimidium eſt rectanguli contenti ſub DG, HC; (Si enim ſuper DG, conſtituatur rectangulum altitudinem ha-
c 41. primi. bens HC, ita vt triangulum, & rectangulum inter eaſdem ſint parallelas: [c] erit triangulum parallelogrammi dimidium. quod quidem parallelogrammum idem eſt, quod rectangulum ſub DG, HC, contentum, vt conſtat.) erit quoque triangulum FBC, maius triangulo DGC; ac propterea duplum trianguli FBC, nimirum rectilineum AFCBA, maius erit duplo trianguli DGC, vtpote rectilineo CDEGC. Quocirca, addito communi compoſito ex triangulis ABC, CGE; erunt triangula AFC, CGE, vtraque ſimul maiora triangulis ABC, CDE, vtriſque ſimul. Duo ergo triangula Iſoſcelia ſimilia ſuper inæqualibus baſibus conſtituta, &c. quod oſtendendum eſt.

THEOR.

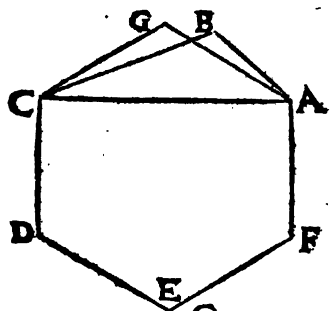
THEOR. 10. PROPOS. 12.

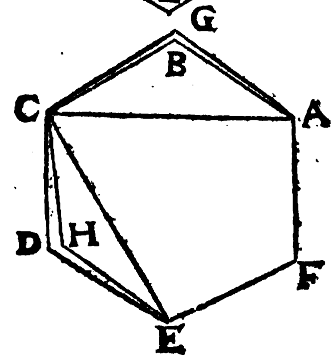
Inter Iſoperimetras figuras æqualia numero habentes latera maxima, & æquilatera eſt, & æquiangula.

ISOPERIMETRARVM figurarum latera numero æqualia habentium maxima & æquilatera eſt, & æquiangula.

ESTO figura quotcunque laterum ABCDEF, maxima inter omnes totidem laterum ſibi Iſoperimetras, ita vt maior dari non poſsit. Dico eam eſſe æquilateram, & æquiangulam. Sit enim ſi fieri poteſt, primum non æquilatera, ſed ſint latera AB, BC, proxima inæqualia. Ducta igitur recta AC, [a] ſi conſtituatur ſuper AC, triangulũ Iſoſceles AGC, quod ſit iſoperimetrum triangulo ABC; erit tota figura AGCDEF. Iſoperimetra figurę ABCDEF. [b] Et quia triangulum AGC, maius eſt triangulo ABC; ſi addatur commune polygonum ACDEF, erit figura AGCDEF, maior quam figura ABCDEF. quod eſt contrarium hypotheſi. Non ergo inæqualia ſunt latera AB, BC, ſed æqualia. Eademq; ratione oſtendemus, latera proxima BC, CD; Item proxima deinceps æqualia eſſe. Maxima igitur figura inter ſibi iſoperimetras æqualia numero latera habentes æquilatera eſt, quod eſt primum.

[a] *7. huius.*
[b] *9. huius.*





SIT deinde, ſi fieri poteſt, figura ABCDEF, æquilatera quidem, vt iam demonſtratum eſt, at non æquiangula, ſed anguli B, D, non proximi inæquales ſint, maiorque angulus B, quam angulus D. Quoniam igitur demonſtratum eſt, figuram maximam eſſe æquilateram, erunt duo triangula ABC, CDE, Iſoſcelia, ita vt duo latera AB, BC, æqualia ſint duobus lateribus CD, DE: Ponitur autem angulus B, maior angulo D; [c] erit recta AC, maior quam recta CE. [d] Si igitur conſtituantur ſuper baſes AC, CE, alia duo triangula Iſoſcelia AGC, CHE, ſimilia inter ſe, & Iſoperimetra triangulis ABC, CDE; [e] erunt triangula AGC, CHE, vtraque ſimul maiora triangulis ABC, CDE, vtriſque ſimul. Si igitur addatur commune polygonum ACEF: erit figura AGCHEF, maior, quam figura ABCDEF, quod cum hypotheſi pugnat, quod hæc omnium maxima ponatur. Non ergo inæquales ſunt anguli B, D, ſed æquales. Eademque ratione oſtendemus, angulos non proximos C, E, æquales eſſe, & binos alios quoſuis non proximos. Ex quo efficitur, totam figuram æquiangulam eſſe, nempe proximos etiam angulos inter ſe eſſe æquales. Si enim verbi gratia angulus B, non dicatur æqualis eſſe angulo C; cum angulus C, æqualis ſit non proximo angulo E; erit quoque angulus B, angulo E, non æqualis, quod abſurdum eſt. Bini enim anguli non proximi inter ſe æquales ſunt, vt oſtendimus. Maxima ergo figura inter ſibi Iſoperime-

[c] *24. primi.*
[d] *10. huius.*
[e] *11. huius.*

rimetras æqualia numero latera habentes non ſolum æquilatera, ſed & æquiangula eſt. Quocirca Iſoperimetrarum figurarum latera numero æqualia habentium maxima & æquilatera eſt, & æquiangula. quod demonſtrandum erat.

SCHOLIVM.

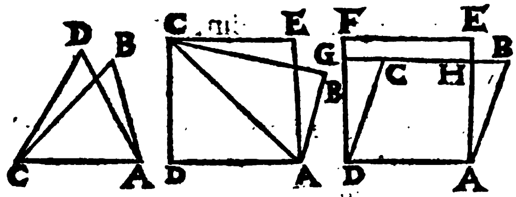
Quæ obſeruanda ſint in demonſtratione huius propoſ.

CIRCA demonſtrationem prioris partis huius propoſ. obſeruandum eſt, accipienda eſſe duo latera inæqualia proxima inter ſe, ita vt angulum conſtituant, nullumque aliud inter ea interponatur, qualia ſunt latera accepta AB, BC, angulum B, efficientia. Hac enim ratione, ducta recta AC, factum erit triangulum ABC, cuius duo latera AB, BC, inæqualia ſunt, vt in demonſtratione aſſumebatur. Neque verò dubitare quis poterit, in figura non æquilatera, qualis ponitur ABCDEF, accipi poſſe duo latera proxima inæqualia. Nam ſi quis dicat latera AB, BC, eſſe æqualia, ſumemus latera AB, AF, quæ ſi dicantur etiam æqualia eſſe, accipiemus AF, FE: Et ſi hæc adhuc æqualia eſſe dicantur, capiemus EF, ED; & ſic deinceps progrediemur, donec ad duo latera proxima inæqualia veniamus, quæ angulum conſtituant. Neceſſariò autem ad duo huiuſmodi latera perueniemus: alias figura eſſet æquilatera, quod non conceditur

QVOD verò ad poſterioris partis demonſtrationem attinet, aduertendum eſt, in figuris multilateris accipiendos eſſe duos angulos inæquales non proximos inter ſe, ita vt inter ipſos vnus, vel plures anguli interponantur, quales ſunt anguli accepti B, D, inter quos ponitur angulus C. Hac enim ratione duæ rectę AC, CE, dictos angulos ſubtendentes ſe mutuò non interſecabunt, conſtituenturque duæ figuræ ABCDEF, AGCHEF, ex additione communis figuræ ACEF, ad triangula ſupra baſes AC, CE, conſtructa: quod non contingeret, ſi duo anguli inæquales proximi inter ſe ſumerentur, vt conſtat. Non eſt autem in dubitum vertendũ, an tales duo anguli poſſint accipi. In omni enim figura multilatera non æquiangula neceſſariò erunt aliqui duo anguli non proximi inter ſe inæquales. Nam in propoſita figura ABCDEF, comparabimus angulum B, cum omnibus non proximis angulis D, E, F, qui neceſſariò duo erunt in pentagono, in hexagono verò tres, & ita deinceps. Quod ſi vni alicui eorum fuerit inæqualis, habebimus iam duos angulos non proximos inter ſe inæquales, nempe angulum B, & illum, cui inæqualis eſt: Si verò omnibus dicatur æqualis, erit tunc angulus B, ſaltem alteri proximorum inæqualis, alias figura eſſet æquiangula. Si ergo inæqualis fuerit angulo A, erit angulus A, tam angulo E, quam angulo D; non proximo inæqualis, cum vtriuis horum æqualis ponatur angulus B: Si verò inæqualis fuerit angulo C, erit angulus C, tam angulo E, quam angulo F, non proximo inæqualis, quod vtriuis horum angulus B, ponatur æqualis.

SED quoniam propoſitio hæc demonſtrata tantum eſt in figuris multilateris, vt ex iis conſtat, quæ proximè de duobus angulis non proximis inæqualibus diximus: In triangulis enim, & quadrilateris figuris anguli eiuſmodi reperiri non poſſunt, cum in triangulis æquilateris omnes anguli ſint æquales, vt ex coroll. propoſ. 5. lib. 1. Euclid. patet; in quadrilateris autem figuris omnia latera habentibus æqualia, (quoniam neceſſario ſunt parallelogramma, vt in ſcholio pro-

lio propoſ. 34. lib. 1. Euclid. oſtendimus) a ſinguli oppoſiti inter ſe ſint æquales: Idcirco totam hanc propoſitionem in triangulis, & quadrilateris figuris ita [a] 34. primi.



demonſtrabimus. Sit primum triangulum ABC, inter ſibi Iſoperimetra triangula maximum. Dico illud æquilaterum eſſe & æquiangulum. Si enim non eſt æquilaterum, ſed latera AB, BC, ſunt inæqualia, [b] ſi ſuper baſem AC, conſtituatur triangulum Iſoſceles ADC, ita vt latera AD, DC, ſimul æqualia ſint lateribus AB, BC, ſimul; erunt triangula ABC, ADC, Iſoperimetra; [c] atque adeo ADC, maius, quam ABC, quod eſt contra hypotheſim. Non ergo inæqualia ſunt latera AB, BC, ſed æqualia. Eademque ratio eſt de cæteris. Æquilaterum ergo eſt triangulum ABC. Igitur, ex coroll. propoſ. 5. lib. 1. Euclid. & æquiangulum eſt. quod eſt propoſitum. [b] 7. huius. [c] 8. huius.

DEINDE ſit quadrilaterum ABCD, inter omnia ſibi Iſoperimetra maximum. Dico illud eſſe, & æquilaterum, & æquiangulum. Si enim non eſt æquilaterum, ſint latera AB, BC, ſi fieri poteſt, inæqualia, ducaturq; recta AC. [d] Si igitur ſuper AC, conſtituatur triangulum Iſoſceles, AEC, Iſoperimetrum triangulo ABC; erit triangulum AEC, maius triangulo ABC. Addito ergo communi triangulo ACD, [e] erit quadrilaterum AECD, maius quadrilatero ABCD. quod eſt contra hypotheſim, cum ABCD, maximum ponatur. Non ergo inæqualia ſunt latera AB, BC, ſed æqualia. Eademque ratio eſt de cæteris. Æquilatera ergo eſt figura ABCD. [d] 7. huius. [e] 8. huius.

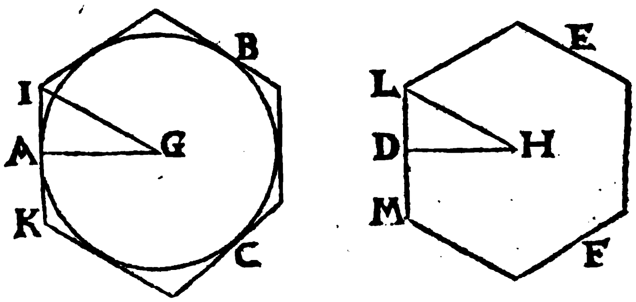
SIT iam quadrilatera figura ABCD, omnium iſoperimetrarum maxima, æquilatera, vt oſtenſum eſt, at non æquiangula, ſed anguli BAD, CDA, inæquales ſint. Quoniam igitur figura ABCD, cum ſit æquilatera, parallelogrammum eſt, vt in ſcholio propoſ. 34. lib. 1. demonſtrauimus; neuterque angulorum A, D, rectus eſt; (alias, [f] cum ambo duobus rectis ſint æquales, eſſent ambo recti) ſed vnus acutus, & obtuſus alter: ſi educantur ex A, & D, duæ lineæ perpendiculares AH, DG, occurrentes lateri BC, in H, & G; erit quoque AHGD, parallelogrammum. [g] Quia verò latera AB, DC, maiora ſunt lateribus AH, DG; producantur hæc, vt fiant rectæ AE, DF, lateribus AB, DC, æquales, iungaturque recta EF. Quo facto, erit figura AEFD, iſoperimetra parallelogrammo ABCD; cum latera AE, DF, lateribus AB, DC, æqualia ſint, latus verò AD, commune, & latus EF, lateri BC, æquale, [h] quod vtrumque æquale ſit lateri oppoſito AD. Cum ergo figura AEFD, maior ſit parallelogrammo AHGD; [i] hoc autem æquale ſit parallelogrammo ABCD; erit quoque figura AEFD, maior parallelogrammo ABCD. Quare cum eidem ſit iſoperimetra, non erit ABCD, figura quadrilatera inter ſibi Iſoperimetras maxima. quod eſt contra hypotheſim. Non ergo inæquales ſunt anguli BAD, CDA, ſed æquales: atque adeò cum ABCD, ſit parallelogrammum, [k] erunt anguli oppoſiti B, C, angulis D, A, æquales; proptereaque tota figura æquiangula erit, quod eſt propoſitum. [f] 29. primi. [g] 19. primi. [h] 34. primi. [i] 35. primi. [k] 34. primi.

THEOR. II. PROPOS. 13.

Circulus omnium figurarum rectilinearum regularium ſibi iſoperimetrarum maximus eſt.

CIRCVLVS omnibus figuris rectilineis regularibus ſibi iſoperimetris maior eſt.

Esto circulus ABC, figura autem regularis quotcunque laterum ei iſoperimetra DEF. Dico circulum ABC, eſſe maiorem figura DEF. Sit enim G, centrum circuli A B C, & H, centrum figuræ D E F; Deſcribaturque circa circulum ABC, figura BIKC, tot laterum, & angulorum æqualium, quot continet figura DEF, per ea, quæ in ſcholio propoſ. 16. lib. 4. Euclid. docuimus. Deinde ex



a 18. tertii. *b 3. tertii.*

puncto contactus A, ad centrum G, ducatur recta A G, a quæ perpendicularis erit ad I K. Ducatur rurſus HD, ad LM, perpendicularis; b Diuidentque rectæ GA, HD, rectas IK, LM, bifariã, vt conſtat, ſi figuris BIKC, DEF, circumſcribantur circuli. Ducantur quoque rectæ GI, HL, quæ diuident angulos I, & L, bifariam, vt manifeſtum eſt ex demonſtratione propoſ. 12. lib. 4. Euclid. Quoniam igitur toti anguli I, & L, ſunt æquales, propter ſimilitudinem figurarum, erunt etiam ipſorum dimidia (videlicet anguli AIG, DLH,) æqualia. Cum ergo & anguli I A G, L D H, ſint æquales, vtpote recti; c erunt triangula A I H, DLH, æquiangula. Quia verò ambitus figuræ B I K C, maior eſt (per 1. propoſ. libr. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro) ambitu circuli A B C; Ambitus autem circuli æqualis ponitur ambitui figuræ D E F; erit quoque ambitus figuræ BIKC, maior ambitus figuræ DEF. Cum igitur figuræ ſint regulares, & ſimiles, erit etiam latus IK, latere LM, maius; & ideò I A, dimidium lateris IK, maius, quam LD, dimidium lateris LM. d Rurſus quoniam eſt, vt IA, ad G A, ita L D, ad D H; Et eſt I A, maior quam L D; e erit quoque A G, maior, quam D H. Quamobrem rectangulum contentum ſub A G, & dimidio ambitu circuli ABC, f quod circulo ABC, eſt æquale, maius eſt, quam rectangulum contentum ſub DH, & dimidio ambitu figuræ DEF, hoc eſt, g quam area figuræ DEF. Circulus igitur omnibus figuris rectilineis regularibus ſibi iſoperimetris maior eſt. quod oſtendendum erat.

c 32. primi. *d 4. ſexti.* *e 14. quinti.* *f 4. huius.* *g 2. huius.*

COROLLARIVM.

Circulus omnibus figuris rectilineis ſibi iſoperimetris maior eſt.

EX omnibus iis, quæ demonſtrata ſunt, perſpicuum eſt, circulum abſolutè omnium figurarum rectilinearum ſibi iſoperimetrarum maximum eſſe.

QVO-

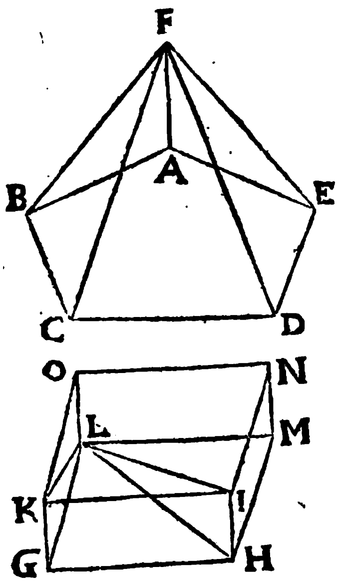
QVONIAM enim ex propoſitione 5. habetur, regularium figurarum iſoperimetrarum eam, quæ plura latera continet, eſſe maiorem: Rurſus ex propoſitione 12. conſtat, inter omnes figuras iſoperimetras æqualia numero latera habentes, eam maximam eſſe, quæ regularis eſt: Ex hac denique 13. propoſitione perſpicuum eſt, circulum omnium figurarum iſoperimetrarum regularium eſſe maximum: Manifeſtè concluditur, circulum abſolutè ac ſimpliciter omnium figurarum rectilinearum ſibi iſoperimetrarum maximum eſſe. quod eſt propoſitum.

THEOR. 12. PROPOS. 14.

AREA cuiuslibet pyramidis æqualis eſt ſolido rectangulo contento ſub perpendiculari à vertice ad baſim protracta, & tertia parte baſis. *Pyramis quælibet cui parallelepipedo ſit æqualis.*

SIT pyramis, cuius baſis quotcunque laterum ABCDE, & vertex F. Solidum autem rectangulum GN, cuius baſis GHIK, æqualis ſit tertiæ parti baſis ABCDE; altitudo verò ſiue perpendicularis GL, æqualis altitudini pyramidis, ſiue perpendiculari à vertice pyramidis ad eius baſim productæ. Dico ſolidum rectangulum GN, æquale eſſe, pyramidi ABCDEF. Ducantur enim ab omnibus angulis baſis GHIK, ad aliquod punctum baſis oppoſitæ, nimirum ad L, lineæ rectæ, ita vt conſtituatur pyramis GHIKL, eandem habens baſim cum ſolido GN, eandemque altitudinem & cum eodem ſolido GN, & cum pyramide ABCDEF. [a] Quoniam igitur pyramis ABCDEF, tripla eſt pyramidis GHIKL; [b] Et ſolidum GN, triplum quoque eſt eiuſdem pyramidis GHIKL: [c] erit ſolidum GN, pyramidi ABCDEF, æquale. Quapropter area cuiuslibet pyramidis æqualis eſt ſolido rectangulo, &c. quod erat oſtendendum.

a ſchol. 6. duodec.
b coroll. 7. duodec.
c 9. quinti.

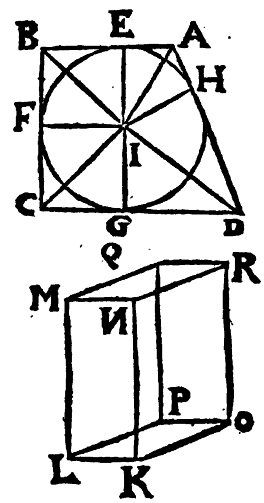


THEOR. 13. PROPOS. 15.

AREA cuiuslibet corporis planis ſuperficiebus contenti, & circa ſphæram aliquam circumſcriptibilis, hoc eſt, à cuius puncto aliquo medio omnes perpendiculares ad baſes eius productæ ſunt æquales, æqualis eſt ſolido rectangulo contento ſub vna perpendicularium, & tertia parte ambitus corporis. *Corpus quodlibet, in qua ſphæra deſcribi poteſt, cui parallelepipedo æquale ſit.*

Eſto corpus planis ſuperficiebus contentum ABCD, circa ſphæram EFGH, cuius centrum I, deſcriptum, in quo ducantur ex I, ad puncta contactuum lineæ rectæ IE, IF, IG, IH, quæ ad baſes ſolidi erunt perpendiculares. Nam ſi verbi gratia per rectam IE, ducatur planum faciens in ſphæra, per propoſ. 1. lib. 1. Theod. circulum EFGH, [a] & in baſi rectam AB; tanget circulus EFGH, rectam AB, in puncto E, propterea quod ſphæra baſim non ſecat, ſed tangit. [b] Igitur IE, ad rectam AB, perpendicularis erit. Eadem ratione, ſi per IE, ducatur aliud planum, à priori differens, fiet alius circulus in ſphæra, & alia linea recta in eadem baſi ſecans rectam AB, in E; ad quam etiam IE, perpendicularis erit: [c] Ac propterea IE, ad baſim ſolidi per illas rectas ductam perpendicularis erit. Non aliter oſtendemus, rectas IF, IG, IH, ad alias baſes eſſe perpendiculares. Sit quoque ſolidum rectangulum LR, cuius baſes KLMN, ſit æqualis tertiæ parti ambitus corporis ABCD; altitudo verò ſiue perpendicularis LP, æqualis vni perpendicularium ex centro I, ad baſes corporis ABCD, cadentium; quæ omnes inter ſe æquales ſunt ex defin. ſphæræ. Dico ſolidum LR, corpori ABCD, æquale eſſe. Ducantur enim ex centro I, ad omnes angulos corporis ABCD, rectæ lineæ, vt totum corpus in pyramides, ex quibus componitur, diuidatur: quarum quidem pyramidum baſes eædem ſunt quæ corporis, vertex autem communis centrum I. [d] Quoniam igitur quælibet harum pyramidum æqualis eſt ſolido rectangulo ſub perpendiculari LP, quæ ſingulis perpendicularibus corporis ABCD, æqualis ponitur, & tertia parte ſuæ baſis contento; Si fiant tot ſolida rectangula, quot ſunt pyramides, erunt omnia hæc ſimul æqualia ſolido rectangulo LR. (Si enim rectangulum KLMN, diuidatur in tot rectangula, quot baſes ſunt in ſolido propoſito, ita vt primum æquale ſit tertiæ parti vnius baſis, & ſecundum tertiæ parti alterius, & ita deinceps, quando quidem totum rectangulum KLMN, æquale ponitur tertiæ parti totius ambitus ſolidi; intelligantur autem ſuper illa rectangula conſtitui parallelepipeda; erunt omnia ſimul æqualia parallelepipedo LR.) [e] Cum ergo ſingula parallelepipeda ſingulis pyramidibus ſint æqualia; erunt quoque omnes pyramides, nempe corpus ABCD, ex illis compoſitum, æquale ſolido rectangulo LR. Quamobrem area cuiuslibet corporis planis ſuperficiebus contenti, &c. quod demonſtrandum erat.

a 3. vndec. *b 18. tertii.* *c 4. vndec.* *d 14. huius.* *e 14. huius.*



THEOR. 14. PROPOS. 16.

Sphæra quælibet cui parallelepipedo ſit æqualis.

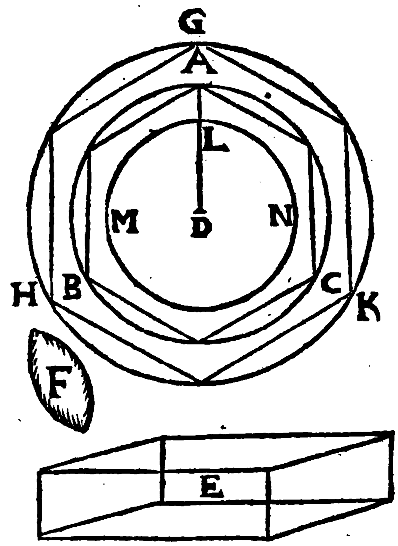
AREA cuiuslibet ſphæræ æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro ſphæræ, & tertia parte ambitus ſphæræ.

Eſto ſphæra ABC, cuius centrum D, ſemidiameter AD: Solidum autem rectangulum E, contentũ ſub ſemidiametro AD, & tertia parte ambitus ſphæræ, ABC.

ABC. Dico corpus E, ſphæræ ABC, eſſe æquale. Nam ſi non eſt æquale: ſit, ſi fieri poteſt, primum maius, ſitque exceſſus corporis E, ſupra ſphæram A B C, quantitas F. Intelligatur circa centrum D, deſcripta ſphæra GHK, maior quam ſphæra ABC, ita tamen, vt exceſſus ſphæræ GHK, ſupra ſphęram ABC, non ſit maior quantitate F, ſed vel æqualis, vel minor, hoc eſt, vt ſphæra GHK, ſit vel ęqualis ſolido E, quando nimirum ipſa excedit ſphærã A B C, præciſè quantitate F; vel minor, ſi nimirum ipſa excedit ſphæram A B C, minori quãtitate, quam F. Neceſſario enim aliqua ſphæra erit, quæ vel æqualis ſit magnitudini E, atq; adeo maior quam ſphæra ABC; vel maior quidem quam ſphæra ABC, minor verò quam magnitudo E, quæ maior ponitur, quam ſphæra ABC. [a] Inſcribatur deinde intra ſphæram GHK, corpus, quod non tangat ſphæram A B C, ita vt vnaquæque perpendicularium ex centro D, ad baſes iſtius corporis eductarum maior ſit ſemidiametro A D. Si igitur à centro D, ad omnes angulos dicti corporis ducantur lineæ rectæ, vt totum corpus in pyramides diuidatur, quarum baſes ſunt eædem, quæ corporis G H K, vertex autem communis centrum D; [b] erit quælibet pyramis æqualis ſolido rectangulo contento ſub eius perpendiculari, & tertia parte baſis; Atq; idcirco ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte baſis cuiuslibet pyramidis, minus ipſa pyramide erit. Et quoniam omnia ſolida rectangula cõtenta ſub ſingulis perpendicularibus ex centro D, ad baſes corporis dicti protractis, & ſingulis tertijs partibus baſium, ſimul æqualia ſunt toti corpori; efficiunt autem omnes tertiæ partes baſium ſimul tertiam partem ambitus corporis; erit ſolidum rectangulũ contẽtum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte ambitus præfati corporis inſcripti intra ſphæram G H K, minus corpore inſcripto. Quoniam verò ambitus corporis inſcripti maior eſt ambitu ſphęræ ABC, vt demonſtrat Archimedes lib. 1. de ſphęra & cylindro propoſ. 27. atque adeo & tertia pars ambitus dicti corporis maior tertia parte ambitus ſphęrę ABC: erit ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte ambitus ſphęrę A B C, hoc eſt, ſolidum E, multo minus corpore inſcripto intra ſphęram G H K: Poſita eſt autem ſphæra GHK, vel æqualis ſolido E, vel minor. Igitur & ſphęra G H K, minor erit corpore intra ipſam deſcripto, totum parte quod eſt abſurdum. Quocirca ſolidum E, maius non erit ſphęra ABC.

[a] 17. duode.

[b] 14. huius.



SIT DEINDE, ſi fieri poteſt, ſolidum E, minus, quam ſphęra ABC, excedaturque à ſphęra ABC, quantitate F. Intelligatur circa centrum D, ſphęra deſcripta L M N, minor quàm ſphęra A B C, ita tamen vt exceſſus, quo ſphęra LMN, ſuperatur à ſphęra ABC, non ſit maior quantitate F, ſed vel æqualis, vel minor, hoc eſt, vt ſphęra LMN, ſit vel æqualis ſolido E, ſi nimirum ipſa excedatur à ſphęra ABC, quantitate F, vel maior ſolido E, ſi videlicet ſphęra L M N, à ſphęra ABC, ſuperetur minori quantitate, quam F. Neceſſario enim aliqua ſphę-

ta erit, quæ vel æqualis ſit ſolido E, atque adeo minor quam ſphæra ABC, vel minor quidem quàm ſphæra ABC, maior verò quam magnitudo E, quæ minor ponitur, quam ſphæra ABC.[a] Deſcribatur deinde intra ſphæram ABC, corpus, quod minimè tangat ſphæram LMN; ita vt vnaquæque perpendicularium ex centro D, ad baſes huius corporis inſcripti cadentium minor ſit ſemidiametro AD. Si igitur à centro D, ad omnes eius angulos lineæ extendantur, vt totum corpus in pyramides reſoluatur, quarũ baſes ſunt eædem, quæ corporis ABC, vertex autem communis centrum D; [b] erit quælibet pyramis æqualis ſolido rectangulo contento ſub eius perpendiculari, & tertia parte baſis; Et ideo ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte baſis cuiuſuis pyramidis, maius erit pyramide ipſa. Et quoniam omnia ſolida rectangula contenta ſunt ſingulis perpendicularibus ex centro D, ad baſes corporis dicti protractis, & ſingulis tertijs partibus baſium, ſimul æqualia ſunt toti corpori; efficiunt autem omnes tertiæ partes baſium ſimul tertiam partem ambitus corporis, erit ſolidum rectangulum contentum ſub ſemidiametro AD, & tertia parte ambitus dicti corporis ſphæræ ABC, inſcripti, maius corpore inſcripto. Cum igitur ambitus ſphæræ ABC, maior ſit ambitu corporis ſibi inſcripti, atque adeo & tertia pars ambitus ſphæræ maior tertia parte ambitus dicti corporis; erit ſolidum rectangulum contentum ſub AD, ſemidiametro, & tertia parte ambitus ſphæræ ABC, hoc eſt, ſolidum E, multo maius corpore inſcripto intra ſphæram ABC: Ponebatur autem ſphæra LMN, vel æqualis ſolido E, vel maior. Igitur & ſphæra LMN, maior erit corpore intra ſphæram ABC, deſcripto, pars toto, quod eſt abſurdum. Non igitur ſolidum E, minus erit ſphæra ABC. Cum ergo neque maius ſit oſtenſum, æquale omnino erit: Ac propterea area cuiuslibet ſphæræ æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro ſphæræ, & tertia parte ambitus ſphæræ. quod demonſtrandum erat.

a 17. duodec.

b 14. huius.

THEOR. 15. PROPOS. 17.

Sphæra maior eſt omnibus corporibus ſibi Iſoperimetris, & circa alias ſphæras circumſcriptibilibus, quæ planis ſuperficiebus continentur.

SPHÆRA omnibus corporibus ſibi Iſoperimetris, quæ planis ſuperficiebus contineantur, circaque alias ſphæras circumſcriptibilia ſint, hoc eſt, quorum omnes perpendiculares ad baſes productæ ab aliquo puncto medio ſint æquales, maior eſt.

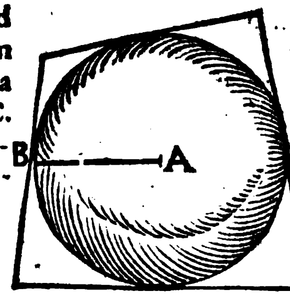
ESTO ſphæra A, cuius centrum A, & ſemidiameter AB: Solidum autem circa aliquam ſphæram circumſcriptibile ſibi Iſoperimetrum C, cuius vna perpendicularium CD. Dico ſphæram A, maiorem eſſe ſolido C. Intelligatur enim circa ſphæram A, corpus deſcriptum ſimile prorſus ſolido C, ita vt ſingula quoque latera contingant ſphæram A, hoc eſt, eius perpendiculares, quarum vna ſit AB, ſint quoque æquales, nempe ſemidiametri ſphæræ A, exiſtentes. Itaque quoniam ambitus corporis circa ſphæram A, maior eſt ambitu ſphæræ A, (per ea, quæ ab Archimede ſunt demonſtrata lib. 1. de ſphæra & cylindro, propoſ. 27.) erit quoque eiuſdem corporis ambitus maior ambitu corpori C. Quare perpendicularis AB, hoc eſt ſemidiameter ſphæræ A, maior erit perpendiculari CD.

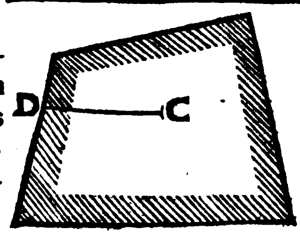
Quam-

Quamobrẽ rectangulũ ſolidũ contentũ ſub ſemidiametro AB, & tertia parte ambitus ſphęræ A, [a] quod ſphęræ A, ęquale eſt, maius erit, quàm rectangulum ſolidum contentum ſub perpendiculari CD, & tertia parte ambitus corporis C, [b] hoc eſt, quam corpus C. Sphęra igitur omnibus corporibus ſibi Iſoperimetris, quę planis ſuperficiebus contineantur, &c. maior eſt. quod erat demonſtrandum.

a 16. huius.

b 15. huius.





COROLLARIVM.

Sphæra maior eſt quouis corpore regulari ſibi Iſoperimetro.

CONSTAT hinc, ſphęram maiorem eſſe quolibet corpore regulari ſibi Iſoperimetro: quippe cum omnes perpendiculares è centro ad baſes corporis regularis inter ſe ęquales ſint; propterea quod ęquales ſunt ſemidiametro ſphęrę, [c] quæ intra corpus deſcribi poteſt.

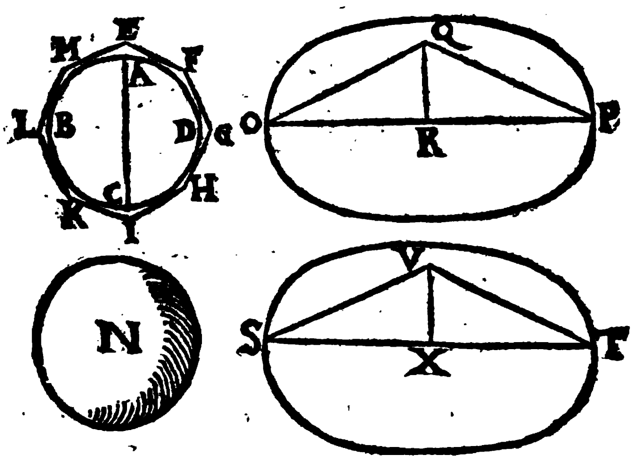
c 21. quintidec.

THEOR. 16. PROPOS. 18.

Sphæra maior eſt omnibus corporibus ſibi Iſoperimetris, & circa alias ſphæras circumſcriptibilib⁹, quæ conicis ſuperficiebus continentur.

SPHÆRA omnibus corporibus ſibi Iſoperimetris, & circa alias ſphęras circumſcriptibilibus, quæ ſuperficiebus conicis contineantur, ita vt latera omnia conica ſint æqualia, maior eſt.

ESTO circulus A B C D, cui circumſcribatur figura regularis E F G H I K L M, ita vt numerus laterum à quaternario menſuretur, cuiuſmodi eſt quadratum, figura 8. 12. 16. 20. 24. vel 28. laterum, angulorumque



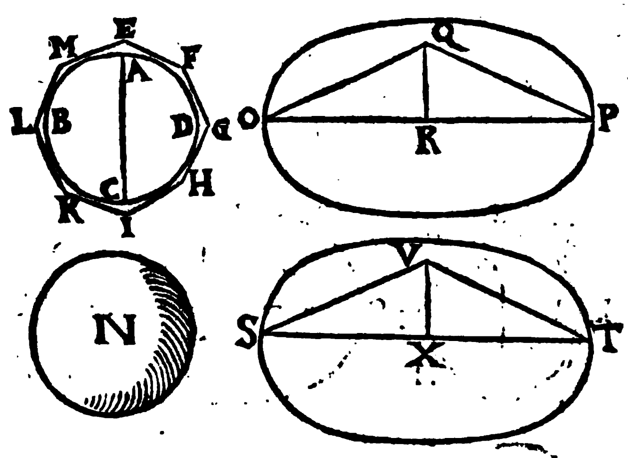
æqualium, &c. Ducaturque ex angulo E, per centrum ad angulum I, recta EI. Itaq; ſi circa manentem rectam EI, immobilem circumagatur planũ, in quo eſt circulus ABCD, & figura EFGHIKLM, deſcribet circul⁹ ſphærã, figura vero

corpus

corpus circa ſphęram conicis ſuperficiebus contentum, quarum ſuperficierum latera æqualia ſunt, nempè eadem, quę figuræ, vt ab Archimede demonſtratur propoſ. 22. & 27. lib. 1. de ſphęra & cylindro. Sit iam ſphæra N, Iſoperimetra corpori EFGHIKLM, circa ſphęram ABCD, deſcripto. Dico ſphęram N, dicto corpore eſſe maiorem. Quoniam enim ambitus ſolidi EFGHIKLM, maior eſt (per propoſ. 27. lib. 1. Archimedis de ſphęra & cylindro) ambitu ſphęrę ABCD, erit quoque ambitus ſphęrę N, maior ambitu ſphęrę ABCD; ideoq; ſemidiameter ſphęrę N, maior erit ſemidiametro ſphęrę ABCD. Et quia ſuperficies ſphęræ quadrupla eſt (per propoſ. 31. lib. 1. Archimedis de ſphęra & cylindro) maximi circuli in ſphęra; ſi ſumat circul⁹ OP, quadrupl⁹ circuli maximi in ſphęra N; (quod quidem facilè fiet, ſi diameter OP, dupla ſumatur diametri maximi circuli in ſphęra N. a Quoniam enim vt circulus OP, ad circulum maximum in ſphęra N, ita quadratum diametri OP, ad quadratum diametri circuli maximi in ſphęra N; b Eſt autem quadrati ad quadratum proportio duplicata proportionis laterum homologorum, erit quoque circulus OP, ad circulum maximum in ſphęra N, in proportione duplicata proportionis diametri OP, ad diametrum circuli maximi in ſphęra N. Cum igitur diametri ponantur habere proportionem duplam, habebunt circuli proportionem quadruplam; quadrupla enim proportio duplicata eſt ꝓportionis duplæ, vt in his numeris apparet. 1. 2. 4.) erit circulus OP, ęqualis ſuperficiei ſphæræ N. Accipiatur rurſus circulus ST, æqualis circulo OP. Statuatur deinde ſupra circulum ST, conus rectus STV, axem VX, æqualem habens ſemidiametro ſphæræ N: item ſupra circulum OP, alter conus NPQ conſtruatur habens axem QR, ęqualem ſemidia-

a 2. duodec.

b 20. ſexti.



metro ſphęrę ABCD; eritque maior altitudo coni STV, quam coni OPQ at baſes ęquales erunt. Quare conus STV, maior erit cono OPQ; c propterea quod coni æqualium baſium eam inter ſe habent proportionem, quam altitudines. Quoniam verò ſphęra N, quadrupla eſt eius coni, qui baſem habet ęqualem maximo in ſphęra N, circulo, & altitudinem ęqualem ſemidiametro ſphęrę N, vt demonſtrauit Archimedes lib. 1. de ſphęra & cylindro propoſ. 32. Huius autem eiuſdem coni quadruplus eſt conus STV, d eo quod coni eandem habẽtes altitudinem proportionem habent quam baſes; e erit conus STV, ſphęrę N, ęqualis.

c 14. duodec.

d 11. duodec.

e 9. quinti.

N, æqualis. Eodem pacto, quia baſis coni O P Q. æqualis eſt ambitui corporis E F G H I K L M; quia & æqualis ſuperficiei ſphæræ N, quæ corpori illi Iſoperimetra eſt: altitudo vero æqualis ſemidiametro ſphęræ ABCD; erit ſolido EFGHIKLM, æqualis conus OPQ. per ea, quæ Archimedes lib 1. de ſphæra & cylindro propoſ. 29. demonſtrauit. Quamobrem & ſphæra N, maior erit ſolido E F G H I K L M, conicis ſuperficiebus contento. Sphæra igitur omnibus corporibus ſibi Iſoperimetris, & circa alias ſphæras circumſcriptibilibus, &c. maior eſt. quod demonſtrandum erat.

THEOR. 17. PROPOS. 19.

Sphæra maior eſt quolibet cono & cylindro ſibi Iſoperimetro.

SPHÆRA quolibet cono, & cylindro ſibi Iſoperimetro maior eſt.

PROPOSITA enim quacunque ſphæra, ſi fiat conus baſem habens æqualem ſuperficiei ſphærę, id eſt, quadruplam maximi in ſphæra circuli, altitudinem verò ſemidiametro ſphæræ æqualem: [a] erit ſphæra huic cono æqualis; propterea quod ad conum, cuius baſis eſt maximus in ſphæra circulus, & altitudo ſemidiameter ſphæræ, tam ſphæra, ex propoſ. 32. libri 1. Archimedis de ſphæra & cylindro, [b] quam prior conus baſem habens quadruplã maximi circuli in ſphæra, hoc eſt, ſuperficiei ſphærę æqualem, & altitudinem ſemidiametrum ſphæræ, proportionem habet quadruplam. Cum ergo ambitus coni baſem habentis ſuperficiei ſphæræ æqualem maior ſit ambitu ſphæræ, quippe cum ille hunc excedat tota ſuperficie coni, ſecluſa baſi, quæ ambitui ſphæræ ponitur æqualis, liquido conſtat, ſi fiat conus ſphærę Iſoperimeter, hunc eſſe illo cono, ac proinde & ſphęra minorem.

a 9. quinti.

b 11. duodec.

RVRSVS ſi fiat cylindrus baſem habens æqualem ſuperficiei ſphęræ, & altitudinem ſemidiametrum ſphærę; [c] erit hic cylindrus triplus illius coni baſem habentis æqualem eidem ſuperficiei ſphęræ, & altitudinem ſemidiametrum eandem ſphærę, quem ſphęræ æqualem eſſe proximè oſtendimus: ac proinde & triplus ipſius ſphæræ. Tertia ergo pars illius cylindri (cylindrus videlicet eandem habens baſem, altitudinem vero tertiam partem altitudinis cylindri illius: [d] cũ ille cylindrus ſit huius triplus) æqualis erit ſphæræ. Cum ergo poſterior hic cylindrus habeat ambitum maiorẽ ambitu ſphęræ, quod ille hunc excedat ambitu totius cylindri, ſecluſa vna baſe; quis non videt, ſi fiat cylindrus ſphęræ Iſoperimeter, hunc eſſe priore illo cylindro, ac proinde & ſphæra maiorẽ? Sphęra ergo quolibet cono, & cylindro ſibi Iſoperimetro maior eſt. quod demonſtrandum erat.

c 10. duodec.

d 14. duode.

SCHOLIVM.

HÆC omnia ferè ex Theone Alexandrino in commentarijs in Almageſtũ Ptolemaei, & ex Pappo Alexandrino in Mathematicis collectionibus, licet pleraque eorum clarius & facilius demonſtrauerimus, excerpta ſunt: quæ verò ſequuntur, à nobis inuenta ſunt, ac demonſtrata.

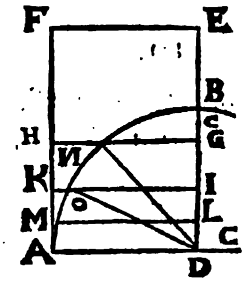
PROBL. 3. PROPOS. 20.

DATO ſemicirculo vel quadranti, vel octauæ parti circuli, aut deci-

Semicirculo & aliis partibus ſubduplis circuli æqualia rectangula & Iſoperimetra conſtituere.

meſextæ,&c.rectangulum conſtituere Iſoperimetrum & æquale; ſi linea recta periphæriæ detur æqualis.

Sit ſemicirculus ABC: Quadrans ABD, octaua pars circuli AND, pars ſextadecima AOD,&c. conſtruatur rectangulum AE, contentum ſub ſemidiametro AD, & ſub recta AF, quæ quartæ parti peripheriæ æqualis ſit; Item rectangulum AG, ſub ſemidiametro AD, & ſub AH, octaua parte peripheriæ. Itẽ rectangulum AI, ſub ſemidiametro AD, & ſub AK, parte decimaſexta peripheriȩ. Item rectangulum AL, ſub ſemidiametro AD, & ſub AM, parte trigeſima ſecunda peripheriæ. Erit igitur ex ijs, quȩ lib. 4. cap. 7. ad finem Num. 1. oſtendimus, AE, ſemicirculo ABC; & AG. Quadranti ABD; & AI, octauȩ parti AND: & AL, parti ſextædecimæ AOD, æquale, &c. Dico hæc eadem rectangula eſſe Iſoperimetra prædictis circuli partibus, ſingula ſingulis. quod quidem perſpicuum eſt ex conſtructione. Nam AD, EF, æqualia ſunt diametro AC, & AF, DE, ſemicircumferentiæ ABC, nimirum duabus quartis partibus circumferentiæ. Item AD, GH, æqualia ſunt ſemidiametris AD, DB, & AH, DG, duabus partibus octauis, hoc eſt, quartæ parti circumferentiæ AB. Item AD, IK, duabus ſemidiametris AD, DN, & AK, DI, duabus ſextis decimis, id eſt, octauæ parti circumferentiæ AN. Item AD, LM, duabus ſemidiametris AD, DO, & AM, DL, duabus partibus trigeſimis ſecundis, hoc eſt, parti decimæſextæ AO; Atque ita deinceps, ſi tam peripheria AO, quam recta AM, continue ſubdiuidatur. Dato ergo ſemicirculo, vel Quadranti, &c. rectangulum Iſoperimetrum, & æquale conſtituimus. quod faciendum erat.



Hoc problema, quod ad ſemicirculum, ac Quadrantem attinet, aduertit etiam nuper R. P. Odo Malcotius Mathematicus ingenioſus, cum problema Mathematicum per ſuos auditores exhiberet in Collegio Romano: quamuis illud inſtar Theorematis propoſuerit.

PROBL. 4. PROPOS. 21.

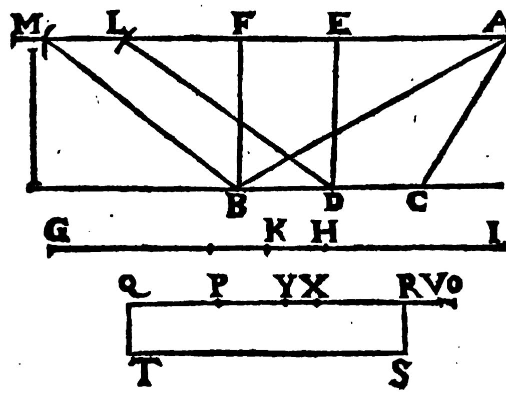
Parallelogrammum dato triangulo æquale & Iſoperimetrum conſtituere.

DATO triangulo cuicunque parallelogrammum æquale, atque Iſoperimetrum conſtituere.

a coroll. 19. primi.

Sit datum triangulum qualecunque ABC. Per A, ducatur AM, baſi BC, parallela. Et quia, ſi neuter angulorum B, C, rectus eſt, [a] vtrumque latus AB, AC, maius eſt perpendiculari ex A, vel B, C, D, in oppoſitam parallelam demiſſa: ſi verò alter angulorum rectus eſt, hoc eſt, alterutrum laterum perpendiculare eſt ad dictas parallelas; vtrumque latus AB, AC, ſimul maius eſt, quam duplum prædictæ perpendicularis; ideoque ſemiſsis aggregati ex vtroque latere maior perpendiculari eadem; id eſt, ſi accipiatur GH, lateri AB, & HI, lateri AC, ȩqualis, vt tota GI, ſummæ laterum AB, AC, æqualis ſit, diuidaturque GI, bifariam in K, ſemiſsis GK, maior erit perpendiculari DE. Si igitur ex D, medio puncto

ſto baſis B C, ad interuallũ GK, arcus circuli deſcribatur, ſecabitis rectam AM, in aliquo puncto, vt in L. Sumpta autem LM, ipſi B D, æquali, ducantur rectæ

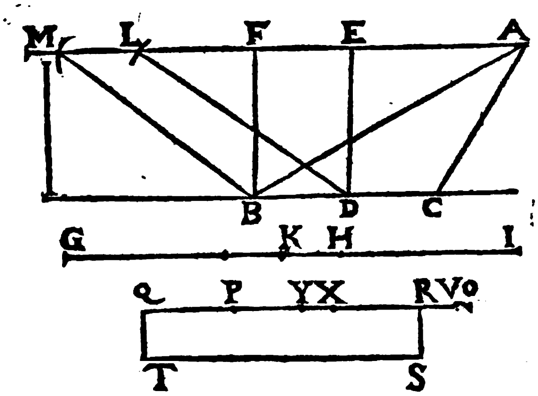


DL, BM, [a] quæ parallelæ inter ſe erunt; ideoque parallelogrammum erit D M, [b] triangulo A B C, æquale. Dico hoc idem triangulo eſſe Iſoperimetrum, quod perſpicuum eſt ex conſtructione: quippe cum D L, B M, vtraque æqualis ſit ipſi GK, hoc eſt, ſemiſsi laterum A B, A C, ac proinde ambæ D L, B M, ſimul æquales ambobus lateribus AB, AC, ſimul; rectæ autem BD, LM, ſimul æquales baſi BC. Conſtructum ergo eſt parallelogrammum D M, non rectangulum æquale, & Iſoperimetrum triangulo ABC.

a 33. primi.
b ſchol. 41. primi.

QVOD ſi optes rectangulum eidem triangulo ABC, æquale, & Iſoperimetrum, ita agendum erit. Erectis perpendicularibus B F, D F, [c] erit rectangulum BE, triangulo æquale, ſed non Iſoperimetrum; [d] quod BF, DE, minores ſint lateribus A B, A C, ſed BD. EF, baſi B C, æquales: ac proinde ambitus rectanguli BE, ambitu trianguli ABC, minor; ideoque ſi producantur BF, DE, ad æqualitatem ſemiſsis laterum AB, AC, fiet quidem rectangulum triangulo ABC, Iſoperimetrum, ſed triangulo maius, cum ſuperet rectangulum B E. [e] Inuenta autem inter BF, BD, media proportionali N; [f] erit quadratum rectæ N, rectangulo BE, ideoque & triangulo ABC, æquale. [g] Quia vero BF, BD, ſimul maiores ſunt, quam dupla rectæ N; [h] eſtque BM, maior quam BF, erunt BM, BD, ſimul multo maiores, quam dupla rectæ N. Sumpta ergo QP, ipſi B D, & PO, ipſi BM, æquali, vt tota QO, duabus BD, BM, ſimul ſit æqualis; erit quoque QO, maior quam dupla rectæ N. [i] Secetur ergo QO, in R, ita vt N, ſit inter ſegmenta Q R, RO, media proportionalis, perficiaturque rectangulum Q S, ſub ſegmentis QR, RO, comprehenſum. [k] quod quadrato rectæ N, hoc eſt, rectangulo BE, vel triangulo ABC, æquale erit. Dico idem eſſe triangulo ABC, Iſoperimetrum. Quoniam enim QR, RS, ſimul, id eſt, recta QO, æquales ſunt rectis B D, B M, ſimul, ex conſtructione; erunt reliquæ S T, T Q, reliquis LM, LD, æquales: ideoque rectangulum QS, parallelogrammo BL, ac proinde & triangulo ABC, (cui parallelogrammum BK, Iſoperimetrum eſt oſtenſum) erit Iſoperimetrum. Dato igitur triangulo cuicunq; parallelogrammum, &c. conſtituimus. quod faciendum erat.

c ſchol. 41. primi.
d coroll. 19. primi.
e 13. ſexti.
f 17. ſexti.
g ſchol. 25. quinti.
h 19. primi.
i ſchol. 13. ſexti.
k 17. ſexti.



SCHOLIVM.

QVOD ſi ſumatur punctum V, vtcunque inter R, & O, erit rectangulum ſub QV, VO, adhuc Iſoperimetrum triangulo ABC, ſed minus. Si vero capiatur punctum X, vtcunque inter R, & Y; (diuiſa Q O, bifariam in Y,) erit adhuc rectangulum ſub QX, XO, Iſoperimetrum triangulo A B C, ſed maius. Quadratum denique rectæ QY, Iſoperimetrum quoque eſt triangulo A B C, & maius, quæ omnia ita demonſtrabimus. Prædicta rectangula, & quadratum rectæ QY, Iſoperimetra eſſe triangulo ABC, hoc eſt, rectangulo QS, patet: cum bina latera circa angulum rectum æqualia ſemper ſint rectæ QO, hoc eſt, binis lateribus rectanguli QS. Eadem verò eſſe inæqualia triangulo ABC, ſic oſtendo.

a lemma 42. decimi. [a] Quoniam quadrata QV, VO, maiora ſunt quadratis QR, RO, ſimul: [b] Sunt autem tam illa duo, vna cum rectangulo ſub QV, VO, bis, quam hæc duo, vna

b 4. ſecundi. cum rectangulo ſub QR, RO, bis, quadrato QO, æqualia; erit rectangulum ſub QV, VO, bis minus rectangulo ſub QR, R O, bis; ideoque & rectangulum ſub QV, VO, ſemel, rectangulo ſub QR, RO, ſemel minus erit. Non aliter oſtendemus, rectangulum ſub QR, R O, minus eſſe rectangulo ſub QX, X O, hoc eſt rectangulum ſub QX, XO, maius eſſe rectangulo ſub QR, R O. Denique

c 6. ſecundi. [c] quoniam rectangulum ſub QX, XO, vna cum quadrato XY, æquale eſt quadrato Y O, vel QY; erit quadratum QY, maius rectangulo ſub QX, XO, ideoque multo maius rectangulo ſub QR, R O, id eſt, triangulo A B C. quæ omnia demonſtranda erant.

EX quo conſtat, quadratum QY, ex ſemiſſæ rectæ QO, deſcriptum maximum eſſe omnium rectangulorum ſub quibuſcunque ſegmentis rectæ QO, cōprehenſorum, quod etiam ex propoſ. 12. huius lib. liquet.

PROBL. 5. PROPOS. 22.

Rectangulū data figuræ Iſoperimetrū & æquale cōſtituere.

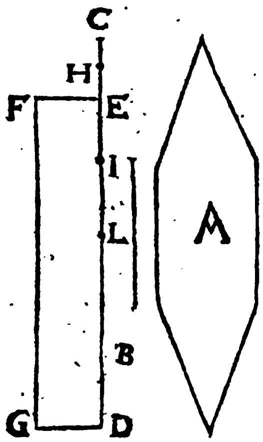
DATO rectilineo parallelogrammum rectangulum æquale, & Iſoperimetrum conſtituere. Oportet autem latus quadrati rectilineo æqualis, maius non eſſe ſemiſſe dimidiati ambitus dati rectilinei.

SIT

SIT hexagonum datum A, æquilaterum quidem, ſed non æquiangulum, ita vt B, ad latus quadrati illi æqualis [a] inuentum maius non ſit ſemiſſe, dimidiati ambitus hexagoni. Sumpta ergo recta C D, æquali ſemiſsi ambitus hexagoni; erit B, recta non maior ſemiſſe ipſius C D, ſed vel æqualis, vel minor. [b] Secta autem CD, in E, ita vt B, ſit media proportionalis inter ſegmenta DE, EC, fiat rectangulum E G, contentum ſub ſegmentis D E, E C. Dico rectangulum E G, æquale eſſe, & iſoperimetrum hexagono A. Quoniam enim tres D E, B, E C, continuè proportionales ſunt; [c] erit rectangulum E G, quadrato B, id eſt, hexagono A, æquale. Et quia duo latera DE, EF, æqualia ſunt rectæ CD, hoc eſt, ſemiſsi ambitus hexagoni A, ideoque reliquæ duæ FG, GD, alteri ſemiſsi: erit totum rectangulum E G, hexagono A, iſoperimetrum. Dato ergo rectilineo, parallelogrammum rectangulum æquale, & iſoperimetrum conſtituimus: quod erat faciendum.

a 14. ſecundi.
b ſchol. 13. ſexti.
c 17. ſexti.

SCHOLIVM.



QVOD ſi B, latus quadrati foret maius ſemiſſe dimidij ambitus rectilinei A, hoc eſt, maius recta CD, non poſſet C D, ita ſecari, vt B, eſſet medio loco proportionalis inter ſegmenta, vt liquidò conſtat.

IAM verò ſi ſumatur punctum H, inter C, & E, vtcunque; erit rectangulum ſub D H, H C, adhuc iſoperimetrum figuræ A, ſed tamen minus. Si verò accipiatur punctum I, vtcunque inter E, & L, punctum medium rectæ CD; erit adhuc rectangulum ſub DI, IC, figuræ A, iſoperimetrum, maius tamen. Sic etiam quadratum ſemiſsis D L, erit iſoperimetrum eidem figuræ & maius; quæ omnia demonſtrabuntur, vt in ſcholio præcedentis problematis dictum eſt.

APPENDIX.

De circulo per lineas quadrando.

1. LOCVS hic me admonet, vt quoniam hoc libro demonſtratum eſt, circulum figurarum omnium ſibi iſoperimetrarum eſſe maximum, breuiter doceam, qua ratione dato circulo quadratum conſtrui poſsit æquale, & viciſsim dato quadrato circulus æqualis; atque id per lineas: cum lib. 4. cap 7. copioſè traditum ſit, quo pacto ex inuentis ab Archimede, per numeros circulus quadrandus ſit, hoc eſt, qua ratione area circuli, ſiue capacitas tum ex diametro, tum ex circumferentia cognita ſit inuenienda: Huius enim areæ radix quadrata, latus eſt quadrati, quod circulo æquale eſt. Sic è contrario cap. 8. eiuſdem lib. regula 1. Num. 1. docuimus, qua via ex data circuli area indaganda ſit tam circumferentia, quam diameter illius circuli: hoc eſt, propoſito quadrato, inſtar areæ circuli alicuius, quomodo circulus deſcribendus ſit illi quadrato æqualis. In-

Quo pacto reperiatur per numeros quadratum circulo æquale, & contra ex doctrina Archimedis.

uenta enim diametro per prædictam regulam 1. Num. 1. cap. 8. lib. 7. circulus illiuſ diametri erit is, qui quæritur. Viſum eſt autem appendicem hanc libro huic ſeptimo adiungere, quod tractatio de circuli Tetragoniſmo, ſiue quadratura, non parum affinis ſit de iſoperimetris figuris diſputationi.

Circuli quadratura per numeros ſecundum Arabes falſa.

QVADRATVRA autem circuli per numeros, quam Arabes tradiderunt, & quam Ioſephus Scaliger in ſuis Cyclometricis elementis veram eſſe credit, omnino reiiciẽda eſt, cum ſit extra limites Archimedis, per quos conſtat, proportionem circumferentiæ ad diametrum minorem debere eſſe tripla ſeſquiſeptima, maiorem verò tripla ſuperdecupartiẽte ſeptuageſimas primas. quod in numeris Arabum non cernitur. Dicunt enim proportionẽ circumferentiæ ad diametrum eſſe potentia decuplam: adeò vt ſi quadratum circumferentiæ ponatur 10. quadratum diametrum ſit 1. quod falſum eſt. Nam cum radix quadrata numeri 10. ſit maior quam $3\frac{1}{7}$. quod huius radicis quadratum ſit tantum $9\frac{47}{49}$. Radix autem vnitatis ſit 1. eſſet maior proportio circumferentiæ ad diametrum, quam tripla ſeſquiſeptima: cum tamen ſecundum Archimedem ſit minor. Item quia poſita diametro 7. circumferentia minor eſt, quam 22. ex Archimede; erit quadratum circumferentiæ minus, quam 484. quod ad 49. quadratum diametri minorem proportionem habet, quam decuplam; quippe cum 490. ad 49. proportionem habeant decuplam. Minor igitur eſt proportio quadrati circumferentiæ ad quadratum diametri, quam decupla.

Quadratura circuli per numeros ex Alberto Durero falſa.

SIMILI modo reiicienda eſt ratio quadrandi circuli per numeros Alberti Dureri, qui exiſtimat, diuiſa diametro circuli in octo partes æquales, diametrum quadrati circulo æqualis eſſe 10. adeò vt diameter quadrati circulo æqualis ad diametrum circuli proportionem habeat, quam 10. ad 8. quod etiam falſum eſt. Nam cum quadratum diametri 10. ſit 100. [a] duplumque quadrati, cuius diameter eſt 10. & quod circulo diametri 8. dicitur æquale: erit quadratum circulo æquale 50. Sed ex diametro 8. reperitur area circuli maior, quam vera, $50\frac{2}{7}$. vt cap. 7. lib. 4. Num. 4. tradidimus. Vera ergo circuli area maior erit, quam $50\frac{2}{7}$. atque adeò multò maior, quam 50. Eſt igitur quadratum Alberti minus area circuli, non autem æquale.

a ſchol. 47. primi.

Falſa quadratura circuli per lineas Campano aſcripta.

2. IAM verò, vt ad quadraturam circuli per lineas aggrediamur, pudet me refellere illam, quæ imperitis vera eſſe videtur, & quam ſciolus, neſcio quis, Campano Mathematico non indocto affinxit, typiſque mandauit. Eſt autem talis. Linea recta circumferentiæ circuli æqualis (quo pacto autem eiuſmodi linea inueniatur, non docet) ſecetur in 4. partes æquales, ex quibus quadratum conſtituatur. quod ſciolus ille circulo dicit eſſe æquale. quæ res omninò Geometra indigna eſt, & planè ridicula. Si enim quadratum illud circulo eſt Iſoperimetrum; [b] circulus autem omnium figurarum rectilinearum ſibi iſoperimetrarum capaciſsimus eſt, quis non videt, quadratum illud circulo minus eſſe?

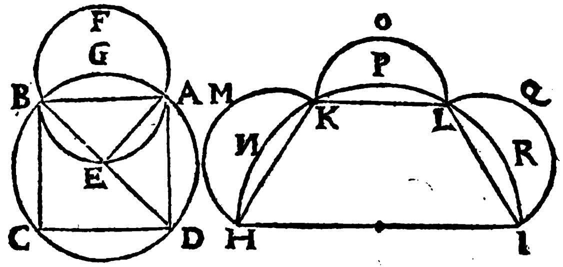
b 13 huius.

Quadratura Hyppocratis Chii.

3. DE Tetragoniſmo etiam Hippocratis Chij nihil dicerem, niſi in eius demonſtratione acumen ingenij lateret, quamuis metam propoſitam non attingat. Ita enim progreditur. Sit quadrandus circulus AFBE, cuius diameter AB, ex qua deſcribatur quadratum ABCD, [c] circa quod circulus deſcribatur ABCD, cuius diameter BD, datum circulum AFBE, ſecet in E. Ducta ergo recta AE, [d] erit angulus AEB, in ſemicirculo rectus, [e] ideoque perpendicularis AE, diuidet baſem BD, trianguli Iſoſcelis ABD, bifariam: ac proinde E, centrum erit circuli ABCD. [f] Et quia quadratum diametri BD, duplum eſt quadrati diametri AB;

c 9. quinti.
d 31. tertii.
e ſchol. 26. primi.
f ſchol. 27. primi.

tri AB; [a] eſtque vt quadratum B D, ad quadratum AB, ita circulus ABCD, ad circulum AFBE: erit quoque circulus circuli duplus; & ſemicirculus BAD, ſemicirculi AFB; ideoque ſemiſsis ſemicirculi BAD: id eſt, quadrãs ABE, [b] (eſt enim ABE, quadrans, ob angulum rectum in centro E,) ſemicirculo AFB, æqualis. Dempto igitur communi ſegmento AGB, reliquum triangulum AFB, reliquæ Lunulæ A F B G A, æquale erit: ac proinde ſi triangulo fiat quadratum æquale erit idem hoc quadratum Lunulæ AFBGA, æquale. Atque ita quadrata eſt Lunula AFBGA. *a 2. duodec.*



DEINDE ſit recta HI, diametri AB, dupla, circa quam ſemicirculo deſcripto, aptentur in eo tres rectæ ſemidiametro huius circuli, hoc eſt, diametro AB, æquales HK, KL, LI, continentes ſemiſſem hexagoni: [b] cum latus hexagoni ſit ſemidiametro æquale. Deſcriptis autem circa illas tres rectas ſemicirculis HMK, KOL, LQI, qui ſemicirculo AFB, æquales ſunt, propter diametros æquales; [c] quoniam quadratum rectæ HI, quadrati rectæ HK, quadruplum eſt. quod latus lateris ſit duplum: [d] erit quoque circulus diametri H I, circuli diametri HK, quadruplus, & ſemicirculus HKLI, ſemicirculis HMK, KOL, L QI, AFB, æqualis erit: demptiſque ſegmentis communibus H N K, K P L, L R I, reliquum trapezium HKLI, æquale erit tribus Lunulis HNKM, KPLO, LRIQ, vna cum ſemicirculo AFB. Si igitur tres illæ Lunulæ quadrentur, vt traditum eſt, & tribus illis quadratis auferatur ex trapezio rectilineum æquale, hoc eſt, [e] inquiratur exceſſus trapezii ſuper tria illa quadrata; erit exceſſus hic rectilinea figura ſemicirculo A F B, æqualis. [f] Si igitur huic figuræ quadratum fiat æquale, erit idem hoc quadratum ſemicirculo A F B, æquale, & quadratum ex illius quadrati diametro deſcriptum toti circulo AFBE, æquale. [g] quod tam quadratum quadrati duplum ſit, quam circulus ſemicirculi. Quadratus ergo circulus eſt. *b coroll. 15. quarti.* *c ſchol. 4. ſecundi.* *d 2. duodec.* *e ſchol. 45. primi.* *f 14. ſecundi.* *g ſchol. 45. primi.*

HÆC eſt quadratura Hyppocratis, acuta quidem, quod Lunulam AGBF, verè quadrauerit, vitioſa autem, quod tres Lunulas HNKM, KPLO, LRIQ, quadratas à ſe eſſe arbitratur, quod verum non eſt. Solum enim ex eius demonſtratione Lunula ea quadratur, cuius inferior peripheria eſt quarta pars peripheriæ alicuius circuli, ſuperior autem ſemicirculus alterius circuli, qualis fuit Lunula AGBF. Nam AGB, quarta pars eſt circumferentiæ ABCD, & AFB, ſemiſsis peripheriæ A F B E. At eiuſmodi non ſunt tres aliæ Lunulæ, quippe cum earum peripheriæ inferiores HNK, KPL, LRI, ſint ſextæ partes totius circumferentiæ, quamuis peripheriæ ſuperiores ſint ſemicirculi, vt in illa: quæ nondum ſunt quadratæ. Quod ſi inuenta eſſet ars quadrandi huiuſmodi Lunulas, veriſſimè quoque quadraretur circulus, ſine inuentione lineæ rectæ circuli peripheriæ æqualis, quæ ſanè res foret præclara. *Fallacia quadratura Hippocratis.* *Quid deſideretur in Hippocratis quadratura.*

COLLI-

COLLIGITVR ergo ex hac ratione Hippocratis, quadraturam circuli eſſe poſsibilem, cum ſicut Lunula AGBF, quadrata eſt, ita quoque Lunulam HNKM, quadrari poſſe, nihil obſtet, quamuis adhuc non ſit à quoquam quadrata. Et certè, vt quidam rectè affirmat, quod hic oſtenditur ab Hippocrate de Lunula AGBF, quæ pars eſt circuli AFBE, nihil idem prohibet de circulo toto ſciri poſſe, etiam non inueſtigata quantitate peripheriæ circuli, cum ſolum deſit ars quadrandi Lunulam HNKM. Immo plus aliquando dubitationis inferret inuentio quadraturæ Lunulæ AGBF, non cognita, quam circuli.

Cur de falſis aliorum quadraturis hic nihil dicatur.

4. MVLTA quoque hic dicenda eſſent de falſis aliorum quadraturis, ſed quia hæ vel ſeipſas produnt, cum in progreſſu earum facilè appareat, aliquid deeſſe ad conſtituendum circulo æquale quadratum, cuiuſmodi eſt quadratura Iacobi Falconis Equitis Hiſpani, qui ſine inuẽtione lineæ rectæ, quæ peripheriæ ſit æqualis, circulum quadrare conatur: vel ab aliis iam dudum ſunt confutatæ, nimirum Nicolai Cuſani Cardinalis quadratura à Ioanne Regiomontano, ac Ioanne Buteone, & Orontij Finaei Tetragoniſmus tum ab eodem Buteone, tum à Petro Nonio Luſitano in libello de Erratis Orontij: quorum vterque variis viis lineam rectam circumferentiæ æqualem ſe inueniſſe putauit; nihil omninò dicendum mihi eſſe ſtatuo, ne fruſtra tempus terere inutiliter videar. Quamobrem ſolum hoc loco eam quadraturam ſubiiciam, & plenius aliquanto exponam, quam ad finem libr. 6. Euclid. conſcripſi, quæ videlicet per lineam Quadratricem (ſic enim eam appellare lubet, lineam rectam inuenit circulari æqualem. Hæc enim via licet ad Geometricè inueniendum punctum quoddam, nonnihil in ea deſideretur, accuratior tamen eſt omnibus aliis, quas hactenus videre potui; ita vt practicè à ſcopo aberrare non poſsimus. Vt autem clarè atque ordinatè procedam, abſoluam totum negotium paucis quibuſdam propoſitionibus.

Quæ nõ quadratura per lineas hic explicetur.

I.

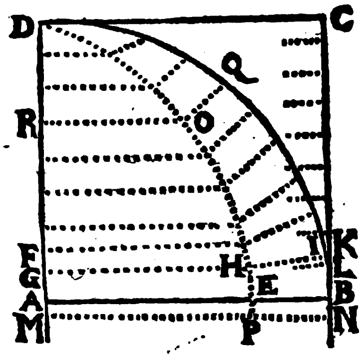
QVADRATRICEM lineam deſcribere.

DINOSTRATVS, & Nicomedes, vt auctor eſt Pappus Alexandrinus in 4. libr. Mathematicarum collectionum, lineam quandam inflexam excogitarunt ad circuli quadraturam, ideoque ab officio τετραγωνίζειν ab iiſdem eſt appellata; à nobis verò eadem de cauſa quadratrix dicetur. Quanquam autem prædicti auctores conentur huiuſmodi lineam deſcribere per duos motus imaginarios duarum rectarum ſeſe interſecantium, qua in re principium (vt philoſophi loquuntur) petunt, vt propterea à Pappo reiiciatur, tanquam inutilis, & quæ deſcribi non poſsit: nos tamen eam ſine illis motibus Geometricè delineabimus per inuentionem quotuis punctorum, per quæ duci debeat; quemadmodum in deſcriptionibus conicarum ſectionum fieri ſolet.

Quadratricis deſcriptio.

5. SIT ergo in quadrato ABCD, deſcriptus Quadrans BD. Si igitur, vt volunt inuentores lineæ Quadratricis, tam ſemidiameter AD, æquabiliter ferri intelligatur circa centrum A, quam latus quadrati ſupremum CD, deorſum verſus æquabiliter quoque: ita vt quo tempore punctum D, circumferentiam DB, vniformi ſemper motu percurrit, eodem recta DC, vniformi etiam motu deſcendens ad latus AB, perueniat, ſic tamen, vt perpetuo ſit lateri AB, parallela. & cum lateribus

ribus AD, BC, angulos rectos efficiat, ſecabunt ſe mutuò continuè ſemidiameter in circumferentia D B, circumacta, & recta D C, deorſum lata, in punctis, quæ lineam Quadratricem deſcribent: hoc eſt, per quæ linea Quadratrix tranſibit, cuiuſmodi eſt linea inflexa DE. Sed quia duo iſti motus vniformes, quorum vnus per circumferentiam D B, fit, & alter per lineas rectas D A, C B,



effici non poſſunt, niſi proportio habeatur circularis lineæ ad rectam, meritò à Pappo deſcriptio hæc reprehenditur: quippe cum ignota adhuc ſit ea proportio, & quæ per hanc lineam inueſtiganda proponatur. Quare nos Geometricè eandem lineam Quadratricem deſcribemus hoc modo. Arcus B D, in quotuis partes æquales diuidatur, & latus vtrumque A D, BC, in totidem æquales partes. Faciliſſima diuiſio erit, ſi & arcus D B, & vtrumque latus AD, BC, ſecetur primum bifariam, deinde vtraque ſemiſsis iterum bifariam, atq; ita deinceps, quantum libuerit. Quo autem plures extiterint diuiſiones, eo accuratius Quadratrix linea deſcribetur. Nos ad confuſionem vitandam ſecuimus tam arcum DB, quam duo latera AD, BC, in octo tantum partes æquales.

DEINDE bina puncta laterum AD, BC, æqualiter diſtantia à latere DC, vel AB, coniungantur lineis rectis occultis, atque ex centro A, aliæ rectæ occultæ ad ſingula diuiſionũ puncta Quadrantis DB, extendantur. Vbi enim hæ rectæ priores rectas interſecabunt, prima primam, ſecunda ſecundam, &c. per ea puncta Quadratrix linea congruenter ducenda eſt, ita vt non ſit ſinuoſa, ſed æquabiliter ſemper progrediatur nullum efficiens gibbum, aut angulum alicubi: qualis eſt linea inflexa D E, ſecans ſemidiametrum AB, in E.

6. SED quia punctum E, in latere A B, inuenire Geometricè non poteſt, cum ibi omnis ſectio rectarum ceſſet: vt illud ſine notabili errore, qui ſcilicet ſub ſenſum cadat, reperiamus: vtemur hoc artificio: Infimam partem A F, lateris AD, ſi ſatis exigua non ſit, ſecabimus bifariam continuè, donec infima particula ſit perexigua: Eodemque modo infimam partem B I, arcus DB, bifariam continuè ſecabimus, donec tot fiant ſubdiuiſiones, quot in parte AF, factæ ſunt, vt particula B K, talis pars ſit totius arcus D B, qualis pars eſt A G, totius lateris AD. Particulæ deinde A G, æquales abſcindemus BL, BN, AM, ducemuſque rectas occultas GL, MN. Ducta verò ex A, centro recta occulta AK, quæ ſecet GL, in H, puncto, quod accuratiſsimè notetur (adhibito videlicet Lemmate Probl. 1. lib. 2. vt concurſus H, quam exquiſitiſsimè reperiatur) ſumemus ipſi GH, æqualem M P. Si enim Quadratricem vſque ad H, deſcriptam continuabimus æquabili, atque vniformi extenſione vſq; ad P, ſecabit Quadratrix linea latus AB, in E, puncto, quod quæritur. Nam propter paruam rectarum GH, A E, M P, inter ſe diſtantiam efficitur, vt fermè ſint æquales, licet Geometricè loquendo recta A E, ſemper maior ſit aliquanto, quantumuis parum eæ rectæ inter ſe diſtent; ſed exceſſus ille circino deprehendi non poteſt: adeò vt arcus circuli ex A, per H, P, deſcriptus verum punctum E, quod ad ſenſum attinet, indicare videatur. Id quod etiam in circumferentia circuli contingit.

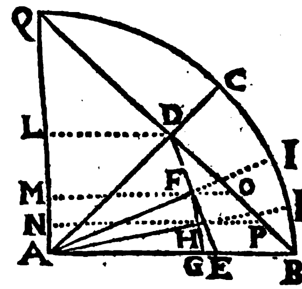
Rectæ namque GL, AB, MN, ſi parum inter ſe diſtent, in circulo omnino æquales iudicabuntur, quamuis verè AB, aliquanto maior ſit. Itaque ſi rectæ illæ rectæ GH, AE, MP, perexiguam habeant diſtantiam inter ſe, dubitari non poteſt, punctum E, in quo quadratrix linea ſemidiametrum AB, ſecat, ab eo, quod verè in Quadratrice ibi exiſtit, non differre notabiliter: dummodo puncta H, P, exquiſitè & ſumma adhibita diligentia, inuenta ſint.

Latus baſis & centrũ Quadratricis.

RECTAM porrò AD, vocamus latus Quadratricis: & rectam AE, eiuſdem baſem: ac denique punctum A, centrum eiuſdem.

a ſchol. 27. tertii.
b ſchol. 27. tertii.
c ſchol. 4. ſexti.
d 2. ſexti.

7. VERVM puncta Quadratricis prope baſem certius inueniemus (ſine interſectionibus linearum, quæ ibi valdè obliquæ ſunt) per lineas perpendiculares: hoc modo. Ducta chorda Quadrantis BQ, ſecetur in D, bifariam. quod fiet, ſi ex A, ad C, punctum medium Quadrantis recta ducatur. [a] Hæc enim rectam BQ, ſecabit bifariam. Deinde rectæ AD, ſumatur æqualis AE; iunctaque recta DE, ſecetur bifariam in F. quod etiam fiet, ſi ex A, ad I, punctum medium arcus BC, ducatur AI. [b] Hæc enim chordam BC, (ſi duceretur) ſecaret bifariam: [c] ac proinde & rectam DE, [d] quæ chordæ BC, eſt parallela: propterea quod latera AB, AC, in triangulo ABC, proportionaliter ſecantur, in D, E: quippe cum tam AB, AC, quam AE, AD, æquales ſint. Rurſus rectæ AF, capiatur æqualis AG, iunctaque FG, ſecetur bifariam in H. quod etiam fiet per rectam AK, ductam ad K, punctum medium arcus BI. Atque hoc modo, ſi rectæ AH, æqualis accipiatur, & reliqua fiant, vt prius, inuenietur aliud punctum inter H, & G. Et ſic deinceps quotuis alia puncta reperiemus viciniora ipſi AB, per lineas perpendiculares, non autem per obliquas ſectiones, vt in priori figura. [e] Eſt enim AD, ad DB, perpendicularis, [f] & AF, ad DE, & DH, ad FG, &c.



e 3. tertii.
f ſchol. 26. primi.
g 2. ſexti.
h 2. ſexti.
i 2. ſexti.

OMNIA verò hæc puncta inuenta D, F, H, &c. eſſe in Quadratrice, ita oſtendo. Ductis DL, FM, NH, ipſi AB, parallelis ſecantibus BD, in O, P; [g] erit vt BD, ad DQ, ita AL, ad LQ, ideoque & AQ, ſecta erit in L, bifariam. Sectus autem eſt & arcus BQ, in bifariam. Igitur, vt oſtenſum eſt, punctum D, eſt in Quadratrice. Rurſus quia DE, ſecta eſt bifariam in F, [h] erit quoque DB, ſecta bifariam in O, [i] ideoque erit vt EF, ad FD, ita BO, ad OD. Sed vt BO, ad OD; ita eſt AM, ad ML, & vt EF, ad FD, ita arcus BI, ad IC. Ergo vt oſtendimus, ſecabunt ſeſe AI, MO, in puncto Quadratricis. Eademque ratio eſt de aliis punctis hac arte inuentis.

8. ESSE porrò lineam hanc inflexam DE, à nobis Geometricè deſcriptam, eandem, quam Dinoſtratus, & Nicomedes per duos illos motus imaginarios deſcribi concipiebant, perſpicuũ eſt. Nam ſi ſemidiameter AD, in priori figura circa centrum A, per arcum DB, eodem tempore moueatur motu vniformi, quo latus DC, deorſum fertur motu quoque vniformi: fit vt quando ſemidiameter AD, pertranſiuit quamcunque partem arcus DB, tunc latus DC, ſimilem partem laterum DA, CB, percurrerit. Alias aut duo illi motus non eſſent vniformes, aut non eodem tempore ad latus AB, tam ſemidiameter AD, quam la-

tus

tur DC peruenit. Cum ergo rectæ ex centro A, per partes arcus DB, emiſſæ, & lineæ parallelæ per partes laterum D A, C B, ductæ abſcindant ſemper ex arcu DB, & ex lateribus DA, CB, partes ſimiles, ex conſtructione: liquidò conſtat, puncta lineæ inflexæ DE, à nobis Geometricè inuenta, à punctis, quæ à duobus illis motibus reperirentur, non differre.

Hæc igitur eſt deſcriptio lineæ Quadratricis Geometrica quodammodo, quemadmodum & conicarum ſectionum deſcriptiones, quæ per puncta etiam fiunt, vt ab Apollonio traditur, Geometricæ dicuntur, cum tamen errori magis ſint obnoxiæ, quam noſtra deſcriptio, propter inuentionem plurimarum linearum mediarum proportionalium, quæ ad earum deſcriptiones ſunt neceſſariæ, quibus in Quadratricis deſcriptione opus non eſt. Quare niſi quis totam conicarum ſectionum doctrinam, quam tanto ingenij acumine Appollonius Pergaeus perſecutus eſt, vt propterea Magnus Geometra appellatus ſit, reiicere velit, tanquam inutilem, & non Geometricam, (quod neminem in Geometria peritum facturum exiſtimo, cum ſectiones conicas ad demonſtrationes adhibuerint præſtantiſsimi Geometræ. Nam Menechmus Hyperbola, ac Parabola vſus eſt in duarum linearum mediarum proportionalium inter quaſuis duas rectas inuentione; Et Archimedes ipſe multa præclarè de iiſdem ſectionibus conicis demonſtrauit: ac denique eiuſmodi ſectiones inſignem vſum habet in re Gnomonica, vt ex noſtra Gnomonica apparet) admittere omninò cogetur, hanc deſcriptionem noſtram Quadratricis lineæ eſſe quodammodo Geometricam. Adde quod linea conchilis, qua Nicomedes duas medias lineas proportionales acutiſsimè inueſtigat, per puncta etiam deſcribitur, vt lib. 6. propoſ. 15. diximus.

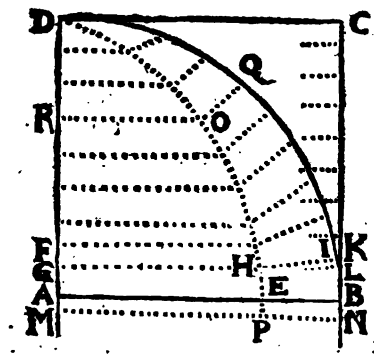
Habet linea hæc quadratrix multas, & inſignes vtilitates, quarum nonnullas ad finem lib. 6. Euclid. demonſtrauimus, quas hoc loco repetere ſuperuacaneum eſt. Solum igitur eius vſum in quadrandis circulis hic exponemus. Qua in re indigemus tantummodo vltimo puncto E, in priori figura, etiamſi nullum aliud Quadratricis punctum inuentum eſſet. quod quidem vltimum punctum licet Geometricè, ac præcisè non reperiatur: tamen ſi artificium poſterioris figuræ adhibeatur, non aberrabimus à vero puncto notabiliter, vt ſupra diximus. Quando namque deprehenſum fuerit, vltimam perpendicularem A H, æqualem eſſe præcedenti vltimæ lineæ translatæ A G, ita vt nulla differentia inter illas per circinum diſcernatur: ſumi poterit citra errorem notabilem vltimum illud punctum G, pro puncto extremo Quadratricis: Sin minus, ducendæ erunt aliæ perpendiculares eo artificio, quo AF, AH, ductæ ſunt, donec inter vltimam, & poſtremo loco inuentam rectam in ſemidiametro AB, nullum appareat diſcrimen. cuius quidem rei operatio ipſa optimus erit magiſter.

COROLLARIVM.

9. Ex deſcriptione Quadratricis colligitur, ſi ex centro A, ducatur recta vtcunque A Q, ſecans arcum Quadrantis in Q, & Quadratricem in O; ita eſſe arcum BD, ad arcum B Q, vt eſt ſemidiameter A D, ad rectam A R, ducta prius O R, ipſi A B, parallela: ac proinde & ad rectam, quæ ex O, ad A B, demittitur perpendicularis. Quia enim eadem pars eſt arcus DQ, totius arcus DB, quę *34. primi.

 pars

pars eſt recta DR, totius ſemidiametri DA, quippe cum in deſcriptione Quadratricis arcus DQ, totius arcus DB, tot particulas complectatur, quot partes recta DR, totius DA, continet: quandoquidem rectæ AQ, RO, ſeſe interſecant in O, puncto Quadratricis. Neque hæc ſimilitudo impeditur, etiamſi tam arcus DQ, toti arcui DB, quã rectá DR, toti lateri DA, ſit incommenſurabilis, cum perpetuò Quadratrix eadem vniformitate progrediatur per omnia ſua puncta. Si enim recta DR, non eſt talis pars, ſiue commenſurabilis, ſiue incommenſurabilis totius lateris DA, qualis pars eſt arcus DQ, totius arcus DB; ſi cogitetur pars lateris DA, minor quam DR, vel maior, ſecabit parallela ex eius puncto extremo ducta rectam AQ, vel ſupra O, vel infra, in puncto, per quod Quadratrix deſcribenda eſt: ac proinde ea nõ tranſibit per O, quod eſt abſurdũ, & contra hypotheſim. Quia inquam eadẽ pars eſt arcus DQ, totius arcus DB, quæ pars eſt recta DR, totius lateris DA; [a] erit quoque reliquus arcus QB, eadem pars totius arcus DB, quæ pars eſt reliqua recta RA, totius lateris DA, quod eadem ſit proportio totius DB, ad DQ, quæ totius DA, ad DR: Et permutando eadem totius DB, ad totam DA, quæ ablati arcus DQ, ad ablatam rectam DR. Quocirca erit, vt totus arcus DB, ad arcum QB, ita totum latus DA, ad rectam RA, hoc eſt, ad rectam perpendicularem ex O, ad AB, demiſſam, [b] quæ ipſi RA, æqualis eſt.



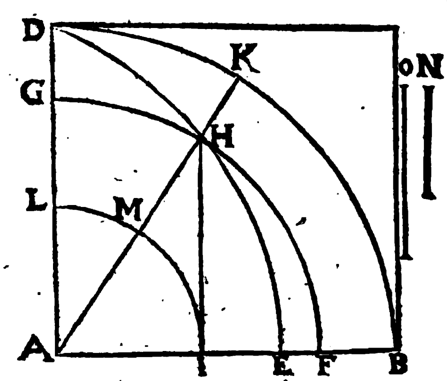
[a] *19. quinti.*

[b] *34. primi.*

II.

SI Quadrantis, & Quadratricis idem centrum ſit; erunt arcus Quadrantis, ſemidiameter, & baſis quadratricis continuè proportionales.

Hæc eſt eximia, atque inſignis proprietas Quadratricis. Sit Quadrans, & Quadratrix ex eo deſcripta, vt ſupra. Dico arcum BD, ſemidiametrum AD, & Quadratricis baſem AE, continuè eſſe proportionales, hoc eſt, eſſe BD, ad AD, vt AD, ad AE. Sin minus, ſit vt BD, ad AD, ita AD, ad AF, maiorem ipſa



AE, minoremue: ſitque primum AF, maior, quam AE. Deſcripto ex centro A, Quadrante FG, per F, ſecante Quadratricem in H, ducatur per H, ſemidiameter

AHK,

AHK, demittaturque perpendicularis HI. Quoniam igitur ponitur arcus BD, ad rectam AD, vt AD, hoc eſt, vt AB, ad AF; eſtque vt AB, ſemidiameter ad ſemidiametrum AF, ita arcus BD, ad arcum FG; (Cum enim ſit, vt lib. 4. capit. 7. propoſ. 1. demonſtrauimus, diameter ad diametrum, vt circumferentia ad circũferentiam;[a] erit quoque ſemidiameter AB, ad ſemidiametrum AF, vt eadem circumferentia ad eandem circumferentiam: [b] ac proinde etiam, vt quarta pars circumferentiæ ad quartam partem circumferentiæ, hoc eſt, vt arcus BD, ad arcum FG.) [c] Erit quoque arcus BD, ad rectam AD, vt idem arcus BD, ad arcum FG; [d] ac propterea æquales erunt recta AD, & arcus FG. Quia verò ex præcedenti coroll. eſt, vt arcus BD, ad arcum BK, ita recta AD, ad rectam HI, & vt arcus BD, ad arcum BK, ita eſt arcus FG, ad arcum FH, [e] quod arcus BD, BK, arcubus FG, FH, ſimiles ſint; [f] erit quoque recta AD, ad rectam HI, vt arcus FG, ad arcum FH. Cum ergo oſtenſa ſit recta AD, arcui FG, æqualis: [g] erit quoque recta HI, arcui FH, ęqualis quod eſt abſurdum. Eſt enim recta HI, minor arcu FH, cum ea ſit ſemiſsis chordæ ſubtendentis arcum duplum arcus FH: [h] (Nam recta AF, ſecat eam chordam bifariam; [i] ac proinde & arcum) chorda autem ſemper ſuo arcu minor ſit. Non ergo eſt arcus BD, ad ſemidiametrum AD, vt AD, ad rectam maiorem baſe AE, Quadratricis.

a 15. quinti. b 15. quinti. c 11. quinti. d 9. quinti. e ſchol. 33. ſexti. f 11. quinti. g 14. quinti. h 3. tertij. i ſchol. 27. tertij.

SIT deinde, ſi fieri poteſt, vt arcus BD, ad AD, ita AD, ad AI, minorem baſe AE. Deſcripto igitur ex centro A, per I, Quadrante IL, erigatur ex I, ad AE, perpendicularis IH, ſecans Quadratricem in H, puncto, per quod ſemidiameter ducatur AK, ſecans arcum IL, in M. Oſtendemus ergo, vt prius, arcum IL, rectæ AD, æqualem eſſe. Item ita eſſe arcum BD, ad arcum BK, hoc eſt, arcum IL, ad arcum IM, vt eſt recta AD; ad rectam HI. Quare cum arcus IL, oſtenſus ſit æqualis rectæ AD, [k] erit quoq; arcus IM, æqualis rectæ HI. quod eſt abſurdum. Eſt enim recta HI, maior arcu IM. Nam ſi ex H, duceretur verſus G, alia recta tangens circulum IL, ſicut HI, eundẽ tangit in I, [l] eſſent hę duæ tangentes æquales, arcuſq; inter eas interceptus ſecaretur bifariam in M, [m] propterea quod angulus ab eis comprehenſus bifariam diuideretur à recta AH, [n] ac proinde & angulus in centro A, ſi ad alterum punctum contactus recta adiungeretur: [o] ideoque arcus, quibus inſiſtunt, æquales forent. Igitur cum, vt lib. 8. propoſ. 1. probabimus cum Archimede, duæ illæ tangentes ſimul maiores ſint arcu ab eis comprehenſo, erit & earum ſemiſsis HI, maior ſemiſſe IM, illius arcus. Non eſt ergo arcus BD, ad ſemidiametrum AD, vt AD, ad rectam minorẽ baſe AE, Quadratricis; Sed neque vt AD, ad maiorem, ſicut oſtenſum eſt. Igitur vt AD, ad ipſam baſem AE. quod demonſtrandum erat.

k 14. quinti. l 2. coroll. 36. tertij. m ſchol. 27. tertij. n 4. vel 8. primi. o 26. tertij.

COROLLARIVM I.

Rectam circumferentiæ circuli æqualem reperire.

HINC facilè rectam reperiemus arcui Quadrantis, ex quo Quadratrix deſcripta eſt, ac proinde & ſemicircumferentiæ, immo & toti circũferentiæ æqualem.

QVONIAM eſt arcus BD, ad ſemidiametrum AD, vt AD, ad baſem Quadratricis AE; erit conuertendo quoque AE, ad AD, vt AD, ad arcum BD. Si igitur duabus rectis AE, AD, inueniatur tertia proportionalis; [p] erit AD, ad eam tertiam, vt ad arcum BD, cum vtraq; proportio ſit eadem, quæ

p 11. quinti.

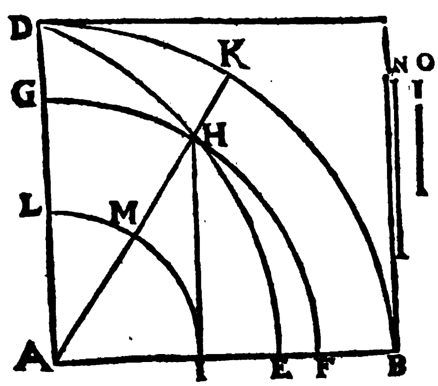
a 9. quinti. AE. [a] Quare tertia illa proportionalis arcui Quadrantis B D, æqualis erit: Et ſi duplicetur, fiet recta æqualis ſemicircumferentiæ eiuſdem circuli: Si verò quadruplicetur, fiet recta toti circumferentiæ æqualis.

COROLLARIVM II.

SEQVITVR quoque ex his, ſi baſis Quadratricis AE, ſtatuatur ſemidiameter alicuius circuli, eius latus A D, quartæ parti circumferentię illius circuli eſſe æquale: Et lineam lateris A D, duplam æqualem eſſe ſemicircumferentiæ eiuſdem circuli: Et lineam quadruplam lateris toti circumferentiæ eſſe æqualem.

CVM enim, vt lib. 4. cap. 7. propoſ. 1. oſtendimus, diametri circulorum circumferentijs ſint proportionales, [b] erunt quoque ſemidiametri ſemicircumfe-

b 15. quinti.



rentijs, & quadrantibus proportionales. Igitur erit, vt A D, ad A E, hoc eſt, vt ſupradicta tertia proportionalis ad AD, ita Quadrans BD, ſemidiametri AD, ad Quadrantem ſemidiametri A E. Cum ergo tertia illa proportionalis æqualis ſit oſtenſa Quadranti BD; [c] erit quoque recta AD, quadranti ſemidiametri AE, æqualis. Dupla ergo linea ipſius AD, ſemicircumferentiæ circuli, cuius ſemidiameter AE; & quadrupla toti circumferentiæ erit ęqualis.

c 14. quinti.

COROLLARIVM III.

EX his quoque infertur, ſi duæ rectę N, O, in præcedenti figura eandem proportionem habeant, quam AD, AE, minor autem O, ſtatuatur ſemidiameter circuli alicuius, maiorem N, æqualem eſſe arcui Quadrãtis illius circuli.

CVM enim ſit AD, ad AE, vt N, ad O; erit permutando AD, ad N, vt AE, ad O. Vt autem AE, ad O, ita eſt Quadrans ſemidiametri A E, ad Quadrantem ſemidiametri O, vt lib. 4. cap. 7. propoſ. 1. demonſtrauimus. [d] Igitur erit quoque AD, ad N, vt Quadrans ſemidiametri AE, ad Quadrantem ſemidiametri O. Cũ ergo

d 11. quinti.

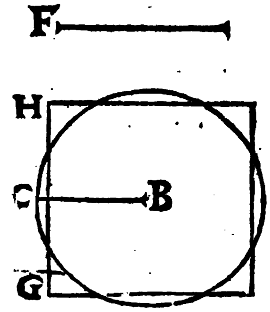
ergo AD, æqualis ſit oſtenſa Quadranti ſemidiametri AE; [a] erit quoqe N, æqualis Quadranti ſemidiametri O. quod eſt propoſitum. *[a] 14. quinti.*

III.

DATO circulo quadratum æquale conſtituere.

Quadratum circulo æquale exhibere.

SIT quadrandus circulus ad interuallum ſemidiametri B C, deſcriptus. Tribus rectis AE, baſi Quadratricis; AD, lateri eiuſdem præcedentis figuræ, & rectæ BC, inuenta quarta proportionali F; erit ex coroll. 3. antecedenti recta F, quadranti circuli dati æqualis, atq; eius dupla ſemicircumferentiæ æqualis erit. Inuenta autem inter ſemidiametrum B C, & duplam ipſius F, media proportionali GH: Dico quadratum ex G H, deſcriptum æquale eſſe circulo ad interuallum B C, deſcripto. [b] Quoniam enim rectangulum ſub BC, ſemidiametro, & ſub ſemicircumferẽtia circuli, id eſt, ſub dupla rectæ F, inuentæ, æquale eſt circulo: [c] Prædicto autem rectangulo æquale eſt quadratum lateris G H; erit quoque quadratum lateris G H, circulo ſemidiametri B C, æquale.

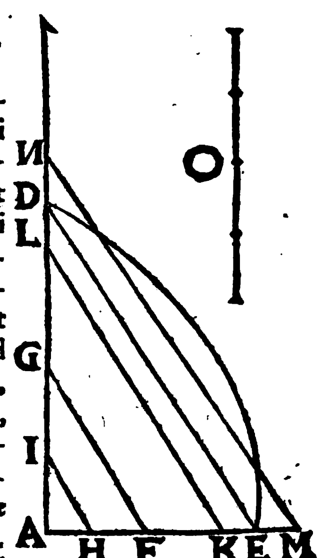


[b] 4. Iſoperimetrorum.

[c] 17. ſexti.

VERVM vt expedite linea recta inueniatur æqualis quartæ parti circumferentiæ dati circuli, atque idcirco & ſemicircumferentiæ, vel toti circumferentiæ, conſtruenda erit figura eiuſmodi. Fiat angulus rectus DAE, rectaque AD, æqualis ſit ſemidiametro Quadrantis, ex quo Quadratrix deſcripta eſt; & AE, baſi eiuſdem Quadratricis æqualis. Vel certe ex centro A, noua Quadratrix deſcribatur DE, cuius latus AD, & baſis A E. Ducta namque recta D E, conſtructa erit figura aptiſsima ad rectam circumferentiæ dati circuli æqualem inueniendam. Si enim circuli quadrandi ſemidiametro abſcindatur æqualis AF, ducanturque F G, ipſi D E, parallela; erit ex coroll. 3. antecedenti A G, æqualis quartæ parti circumferentiæ dati circuli, cuius ſemidiameter nimirum eſt AF, (quemadmodum A D, quartæ parti circumferentiæ circuli ſemidiametri AE, æqualis eſt, vt ex coroll. 2. præcedenti conſtat) [d] propterea quod A F, A G, eandem habent proportionem, quam A E, AD. Eadem ratione, ductis HI, KL, MN, eidem DE, parallelis, erunt A I, A L, A N, æquales quartis partibus circumferentiarum circulorum ex ſemidiametris AH, AK, AM, deſcriptorum: Hæ autem rectæ duplicatæ ſemicircumferentijs æquales erunt, &c. Atque hac arte inuenietur recta æqualis quartæ parti circumferentiæ cuiuſuis circuli, ſi eius ſemidiametro ex recta A E, æqualem lineam abſcindemus, ab eiuſque extremo rectæ DE, parallelã ducemus, &c.

Facilis inuentio rectæ æqualis circumferentiæ.

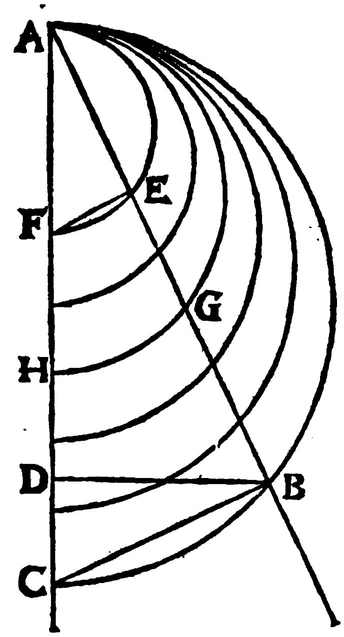


[d] 4. ſexti.

Facilis inuentio quadrati circulo æqualis.

VT quoque ſine vllo labore dato cuicunq; circulo quadratum æquale exhibeamus, vtendum erit hoc artificio. Inuento ſemel latere quadrati alicui circulo æqualis, vt paulò ante docuimus, conſtruemus figuram ad quadrandos alios circulos quoſcunque accommodatiſsimam, hoc modo. Detur circulus A B C, diametri A C, ſitque A B, media proportionalis inter ſemidiametrum, & rectam ſemicircumferentiæ æqualem inuentam ex præcedenti figura, ita vt quadratum rectæ AB, circulo diametri AC, ſit æquale: [a] accommodetur AB, in circulo, quæ certius applicabitur, ſi fortè circinus ex A, ad interuallũ datæ AB, deſcriptus nimis oblique peripheriam A B C, ſecet in B, hoc modo. Duabus rectis, nimirum diametro A C, & lateri AB, quadrati inuento reperiatur tertia proportionalis AD. Perpendicularis namque DB, cadet in punctum B, in quod latus inuentum duci debet: [b] propterea quod tres rectæ AC, AB, AD, ſunt continuè proportionales, quemadmodum recta A C, latus quadrati inuentum, & AD, continuam ſeruant proportionem, ex conſtructione. Liquet autem inter AC, AD, vnam tantum poſſe eſſe mediam proportionalem. Hac figura extructa, dicto citius quemcunque circulum quadrabimus. Si namque diametro dati circuli rectam æqualem abſcindemus A F, circa quam ſemicirculus deſcribatur, reſecabit is ex recta AB, latus AE, cuius quadratum circulo dato eſt æquale. Quia enim angulus externus AEF, interno ABC, æqualis eſt: [c] quod vterque in ſemicirculo rectus ſit; [d] erunt E F, B C, parallelæ; ideoque triangula AEF, ABC, æquiangula. [e] Igitur erit CA, ad AB, vt FA, ad AE; Et permutando CA, ad FA, vt AB, ad AE. [f] Ideoque erit quoque quadratum ex AC, ad quadratum ex A F: [g] hoc eſt, vt circulus diametri A C, ad circulum diametri A F, vt quadratum ex A B, ad quadratum ex AE. Eſt autem circulus diametri A C, quadrato ex A B, per conſtructionem, ęquale. [h] Igitur & circulus diametri AF, quadrato ex AE, æquale erit. Ita quoque quadratum rectæ A G, circulo diametri A H, erit ęquale. Et ſic de cęteris.

[a] 1. quinti.
[b] coroll. 8. ſexti.
[c] 31. tertii.
[d] 28. primi.
[e] 4. ſexti.
[f] 22. ſexti.
[g] 2. duodec.
[h] 14. quinti.



Facilis inuentio quadrati circulo æqualis ex Archimede.

IAM verò quoniam lib. 4. cap. 6. propoſ. 3. ex Archimede demonſtrauimus, quadratũ diametri ad circulum habere ferme proportionem, quam 14. ad 11. ſi quis volet ſecundũ hanc proportionem reperire quadratum circulo æquale; diuidenda erit recta A C, in 14. partes æquales, & ex vndecima parte D, (ita vt AD, contineat partes 11. & DC, 3.) excitanda perpendicularis DB, vſque ad circumferentiam circa A C, deſcriptam. Recta enim enim ducta A B, latus erit quadrati circulo diametri A C, æqualis. [i] Cum enim tres rectæ AC, AB, AD, ſint continue proportionales; [k] erit quadratum ex A C, ad quadratum ex A B, vt A C, ad A D, videlicet vt 14. ad 11. Cum ergo etiam ſit, vt diximus, quadratum diametri ad circulum, vt 14. ad 11. ferme: [l] erit quadratum ex AC, ad quadratum ex AB, vt ad circulum diametri AC. [m] Igitur quadratum ex AB, circulo diametri A C, æquale erit. Quod ſi ſecundum

[i] coroll. 2. ſexti.
[k] coroll. 20. ſexti.
[l] 11. quinti.
[m] 9. quinti.

cundum varias diametros deſcribantur circuli per A, tranſeuntes, abſcindent quoq; ij circuli ex recta AB, latera quadratorum illis circulis æqualium. Habes ergo viam facilem inueniendi quadratum circulo dato æquale, ſiue quadratricem noſtram adhibeas, ſiue demonſtrata ab Archimede ſequaris.

IV.

DATO quadrato circulum æqualem deſcribere.

SIT datum quadratum lateris AE, cui circulus æqualis eſt deſcribendus. In proxima figura ex recta AB, abſcindatur recta AE, dato lateri quadrati æqualis: Et ex E, ducatur ad AB, perpendicularis E F, ſecans A C, in F. Eritque circulus diametri AF, quadrato lateris AE, æqualis, vt ex proximè demonſtratis liquet.

COROLLARIVM.

Ex his, quæ demonſtrata ſunt, conſtruemus circulum cuicunq; figuræ rectilineæ æqualem. Et contra cuicunque circulo figuram rectilineam æqualem conſtituemus, quæ alteri datæ figuræ rectilineæ cuicunque ſimilis ſit. Nam ſi datæ figuræ rectilineæ [a] deſcribamus quadratum æquale, & huic quadrato circulum æqualem per hanc 4. propoſ. conſtituamus; erit idem hic circulus datæ figuræ rectilineæ æqualis. a 14. ſecundi.

RVRSVS ſi per propoſitionem 3. dato circulo quadratum ęquale conſtruamus, huic autem quadrato [b] conſtituamus figuram rectilineam æqualem, & ſimilem alteri datę figuræ rectilineæ; erit eadem hæc figura rectilinea conſtituta, dato circulo æqualis. quod eſt propoſitum. b 25. ſexti.

V.

DATÆ rectæ lineæ circumferentiam circuli reperire æqualem.

IN ſecunda figura propoſ. 3. ſit rectæ O, exhibenda æqualis circumferentia. Eius quartæ parti capiatur in latere Quadratricis A D, recta æqualis A I, ac per I, ipſi D E, agatur parallela I H. Eritque circumferentia circuli ex diametro A H, deſcripti æqualis datę rectæ O, propterea quod quarta pars eius circumferentiæ æqualis eſt rectæ AI, vt oſtenſum eſt ac proinde tota circũferentia æqualis erit quadruplæ rectæ AI, hoc eſt, æqualis rectæ O, cuius quarta pars poſita eſt recta AI. Datæ ergo rectæ circumfētiã æqualem reperim⁹. Quod faciendum erat.

FINIS LIBRI SEPTIMI.

GEOMETRIÆ PRACTICÆ

LIBER OCTAVVS.

Varia Theoremata, ac problemata Geometrica demonſtrans.

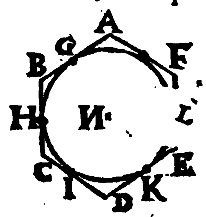
VT extremam manum Geometriæ huic noſtræ practicæ imponamus, concludemus eam variis nonnullis Theorematibus, atque problematibus Geometricis, tum collectis ex Geometris aliis, tum proprio, vt aiunt, Marte excogitatis, ac demonſtratis. Quã in re exemplum illuſtre habemus in Pappo Alexandrino, qui octo totos libros conſcripſit de Mathematicis collectionibus. Neque vero hoc præter inſtitutum noſtrum exiſtimare quis debet: cum per eiuſmodi demonſtrationes Geometricas ſtudioſo Lectori via multiplex aperiatur ad inueſtigandas ſimiles ſpeculationes in rebus Geometricis: quippe cum in iis ad exercendum ingenium ampliſſimum campum habeat. Eſt & alia cauſa, quæ me ad hunc librum octauum conſcribendum permouit, ne videlicet tot Theoremata, ac problemata non ſine magno labore perueſtigata pereant, cum ad nullam Geometriæ partem magis propriè pertineant, quam ad hanc Geometriam practicam: præſertim quod pleraque eorum praxes Geometricas pertractent. Adde quod non pauci viri docti & graues ad hunc librum perſcribendum auctores mihi, atque ſuaſores fuerunt.

THEOR. 1. PROPOS. 1.

FIGVRA regularis circulo circumſcripta maiorem ambitum habet, quam circulus.

Hæc eſt prima propoſitio Archimedis in lib. 1. de ſphæra & Cylindro: quã demonſtrat, hoc aſſumpto principio.

Si duæ lineæ in plano eaſdem habeant terminos, & in eaſdem partes caua ſint, comprehendens comprehenſa maior eſt. quod quidem principium eſſe verum, ex eo euidẽter intelligi poteſt quod ex eo, non ſolum Archimedes, verum etiam plurimi alij Geometræ tum veteres, tum recentiores, innumera propemodum, atque admiranda Theoremata, problemataque demonſtrarint, quæ vt veriſsima, ab omnibus recepta ſunt; neque vnquam ex illo abſurdi aliquid conſecutum eſt, aut contra id quiſquam hactenus à duobus ferme millibus annorum, noui quid commentus eſt. Hoc ergo poſito principio, facilis eſt demonſtratio Archimedis. Sit namque figura regularis ABCDEF, deſcripta circa circulũ, cuius centrũ N, tangens eũ in punctis G,H,I,K,L,M. Quoniã igitur per præmiſſum principium rectæ A G, A M, maiores ſunt arcu G M: Item B G, BH, maiores arcu GH, & ſic de reliquis; erunt omnes rectæ, ſimul conficientes totum ambitum figuræ, maiores omnibus arcubus ſimul conficientibus totam circuli peripheriam. quod erat demonſtrandum.



SCHOLIVM.

CARDANVS in libro quinto de proportionibus propoſ. 201. conatur demonſtrare, duas rectas circulum contingentes, cuiuſmodi ſunt AG, AM, maiores eſſe arcu intercepto GM, (quod Archimedes ex ſuo aſſumpto principio deduxit (præmiſsis tribus Lemmatibus, & vno principio. quorum primum eſt hoc.

LEMMA I.

SI fuerint quatuor quantitates, & minor ſit exceſſus inter primã & ſecũdã, quam inter tertiã & quartam; ſitq; prima non minor, quam tertia, maior verò quam ſecunda, Item tertia maior quam quarta: Erit minor proportio primæ ad ſecundam, quam tertiæ ad quartam.

SINT quatuor quantitates A, BC, D, EF; ſitque GB, exceſſus inter primam A, & ſecundam BC, minor exceſſu HE, inter tertiam D, & quartam E F; Item prima A, non ſit minor, quã tertia D: maior verò quam ſecunda B C: Ac denique tertia D; maior ſit quam quarta E F; Dico minorem eſſe proportionem primæ A, ad ſecundam B C, quam tertiæ D, ad quartam E F. Cum enim A, non minor ſit, q̃ D: at GB, minor, q̃ HE, [a] erit maior ꝓportio A, ad GB, quam ad HE: Eſt autem A, (ſi eſt æqualis ipſi D,) ad H E, vt D, ad H E; vel maior eſt proportio A, (ſi maior eſt, quam D,) ad HE. quam D, ad HE. Igitur maior erit proportio A, ad GB, quam D, ad H E. Si igitur fiat vt D, ad HE, ita A, ad G I, habebit quoque A, ad G B, maiorem proportionem, quam ad G I; [b] ac proinde erit GI, maior quam GB; ideoque I C, minor, quam B C. [c] Maior ergo erit proportio A, ad I C. quam



[a] 8. quinti.
[b] 10. quinti.
[c] 8. quinti.

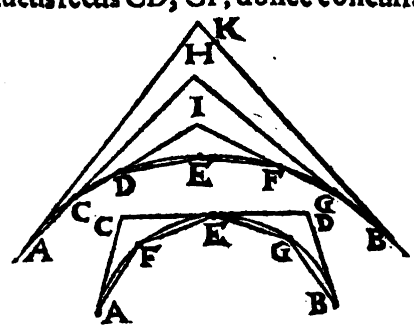
ad B C. Et quoniam G C, ipſi A, æqualis, eſt ad G I; vt H F, ipſi D, æqualis, ad H E; Erit quoque per conuerſionem rationis G C, hoc eſt, A, ad I C, vt H F, hoc eſt, vt D, ad E F. Cum ergo oſtenſum ſit, maiorem eſſe proportionem A, ad I C, quam ad B C; erit quoque maior proportio D, ad E F, quam A, ad B C, hoc eſt, A, ad B C, minorem proportionem habebit, quam D, ad E F. quod eſt propoſitum.

LEMMA II.

SI circuli arcum duæ rectæ tangant in vno puncto coeuntes; & in eodem arcu aptentur quotlibet rectæ æquales diuidentes ipſum in partes totidem æquales. Erunt duæ illæ tangentes omnibus hiſce chordis ſimul maiores.

TANGANT arcum AB, duæ rectæ AK, BK, coeuntes in K, aptenturq; quotlibet rectæ in eo æquales AC, CD, DE, EF, FG, GB, diuidentes arcum in totidem partes æquales. Dico rectas AK, BK, ſimul maiores eſſe omnibus illis rectis ſubtenſis ſimul. Productis enim rectis AC, BG, donec coeant in H; Item productis rectis CD, GF, donec concurrant in I, & ſic deinceps, ſi plures rectæ fuerint: [a] Erunt rectæ DI, FI, maiores rectis DE, FE. Additis ergo æqualibus DC, FG; erunt etiam rectæ C I, G I; maiores rectis CD, DE, EF, FG, ſimul. [b] Sed C H, G H, maiores ſunt rectis C I, G I. Igitur multo maiores erunt CH, GH, rectis C D, D E, EF, F G; additiſque æqualibus A C, B G, maiores erunt AH, B H, ſimul quam A C, CD, DE, EF, FG, GB, ſimul. [c] Sunt autem & AK, BK, maiores, quam AH, BH. Igitur multo maiores erunt A K, B K, ſimul quam AC, CD, DE, EF, FG, GB, ſimul. quod erat demonſtrandum.

[a] 21. primi.
[b] 21. primi.
[c] 21. primi.



LEMMA III.

SI circuli arcum tres rectæ tangant in duobus punctis coeuntes, ita vt contactuum punctum medium diuidat arcum bifariam: In eodem autem arcu accommodentur quotlibet rectæ numero pares, & inter ſe æquales, Erunt tres illæ tangẽtes omnib. his ſimul ſumptis maiores.

IN antecedente figura arcum AB, tangant tres rectæ AC, CD, DB, conuenientes in duobus punctis C, D, ſecantes ipſum bifariam in E. Accommodenturque in eodem arcu quotlibet rectæ æquales, & numero pares AF, F E, EG, GB. Dico tres AC, CD, DB, ſimul ſumptas eſſe maiores rectis AF, FE, EG, GB, ſimul ſumptis. Quoniam enim per Lemma præcedens A C, C E, maiores ſunt, rectis AF, FE: Item BD, DE, maiores rectis B G, G E, Erunt quoque A C, C D, DB, ſimul maiores rectis AF, FE, EG, GB, ſimul. quod oſtendendum erat.

HÆC

Hæc ergo ſunt tria lemmata, quæ Cardanus præmittit: quibus adiungit hoc poſtulatum, ſiue principium. Cum arcus quilibet maior ſit quotcunque rectis in eo ſubtenſis ſimul ſumptis, & quo plures ſubtenſæ fuerint, eo minori exceſſu arcus illas ſuperet: fieri poteſt, vt tot ſubtenſæ duci poſsint, ita vt exceſſus, quo arcus illas ſuperet, minor ſit quauis recta propoſita. Hoc principium videtur eſſe manifeſtum, cum tam paruus arcus poſsit accipi, vt eius chorda illi ferè æqualis ſit; adeò vt ſenſus nullam percipere poſsit inter arcum, & chordam differentiam. A poſteriori tamen illud confirmari poteſt per numeros. Poſita enim proportione circumferentiæ ad diametrum fermè 31415926. ad 10000000. vt lib. 4. cap. 7. Num. 5. ex probatis auctoribus retulimus, deprehendemus, ſi arcus propoſitus continuè ſecetur bifariam per rectas ſubtenſas, ſemper à præcedenti exceſſu plus dimidio auferri; [a] ac proinde tandem relinqui exceſſum omni quantitate minorem. Nam arcus verbi gratia graduum 4. erit 698131. & eius chorda ex tabula ſinuum eruta 697990. ita vt arcus chordam ſuperet hoc numero 141. Summa deinde duarum chordarum graduum 2. erit 698096. quæ ſuperatur ab eodem arcu grad. 4. numero hoc 35. qui minor eſt ſemiſſe præcedentis exceſſus 141. ac proinde plus dimidio ab eo ablatum erit. Rurſus ſumma quatuor chordarum gradus 1. erit 698120. quam idem arcus 4. graduum ſuperat hoc numero 11. qui etiam minor eſt ſemiſſe proximi exceſſus 35. Item ſumma 8. chordarum, quarum quælibet 30. minutis debetur, erit 698128. exceſſus autem inter eam, & eundem arcum 4. graduum, numerus 3. qui minor quoque eſt, quam ſemiſsis proximi exceſſus 11. & ſic deinceps. Scio confirmationem hanc propoſiti principii non eſſe demonſtratiuam, cum proportio circumferentiæ ad diametrum colligatur ex eo, quod demonſtrare conamur, nimirum figuram circulo circumſcriptam habere maiorem ambitum ambitu circuli: eam tamen probabilem eſſe, nemo dubitabit, cum vix credibile videatur, (ſi illa proportio longè à vero abeſſet) exceſſus illos paulatim ita minui, vt ſemper minor numerus ſemiſſe præcedentis exceſſus relinquatur; adeò vt tandem nulla ferè differentia inter arcum, & ſummam chordarum ſubtenſarum reperiatur.

Principium Cardani.

[a] *1. decimi.*

His præmiſsis, tangant duæ rectæ AB, AL, arcum BCL. Dico eas eſſe maiores arcu. Sint enim, ſi fieri poteſt, non maiores, ac proinde arcus BCL, ſit vel æqualis rectis AB, AL, vel maior. Secto ergo arcu bifariam in C, ducatur DCE, tangens arcum in C. Diuiſis quoque arcubus CB, CL, bifariam in G, F, iunganturrectæ BG, GC, CF, FL. [b] Et quia AD, AE, maiores ſunt quam DE; additis DL, EB, communibus, quæ æquales ſunt; (Nam iunctis rectis NA, NB, NL, ex centro N; quoniã tria latera trianguli ABN, tribus lateribus triãguli ALN, æqualia ſunt; [c] erunt tã anguli ad N, quam ad A, æquales; [d] ideoq; arcus CB, CL, æquales erunt; ac proinde recta NA, per contactum C, tranſibit, [e] eritque ad DE, perpendicularis. Cum igitur duo anguli DAC, DCA, duobus angulis EAC, ECA, æquales ſint, & latus adiacens AC, commune; [f] erunt latera AD, AE, æqualia: propterea que & reliquæ DL, EB, æquales erunt, cum tangentes AL, AB, æquales ſint) erunt AL, AB, maiores tribus LD, DE, EB. Sit ergo exceſſus H. Rurſus quia arcus BL, maior eſt rectis BG, GC, CF, FL, ſit exceſſus I, qui minor ſit exceſſu H. Si namque minor non eſt, diuidemus ar-



Demonſtratio Cardani

[b] *20. primi.*
[c] *8. primi.*
[d] *26. tertii.*
[e] *18. tertii.*
[f] *26. primi.*

cus LF, FC, CG, GB, bifariam, & hos rurſus bifariã, &c. connectemuſq; rectas, donec fiat exceſſus minor exceſſu H, per ſuperius principium Cardani. Quoniam igitur arcus LB, prima quantitas ſuperat ſecundam, videlicet rectas LF, FC, CG, GB, ſimul exceſſu I; Et tertia quantitas, nimirum ſumma rectarum AL, AB, ſuperat quartam, id eſt, ſummam rectarum LD, DE, EB, exceſſu H: Eſtque exceſſus I, minor exceſſu H; Et prima quantitas, hoc eſt, arcus BL, ponitur non minor, quam tertia ex AB, AL, conflata; item tertia AB, AI, maior, quam quarta LD, DE, EB: erit per 1. Lemma, minor proportio arcus BL, primæ quantitatis ad ſecundam LF, FC, CG, GB quam tertiæ quantitatis AL, AB, ad quartam LD, DE, EB; [a] Et permutando minor erit proportio arcus LB, ad AL, AB, ſimul, quam rectarum LF, FC, CG, GB, ſimul ad rectas LD, DE, EB, ſimul. Sit ergo vt compoſita ex LF, FC, CG, GB, ad compoſitam ex LD, DE, EB, ita arcus BK, ad rectas AL, AB, ſimul: Eritque propterea minor etiam proportio arcus BL, ad AL, AB, ſimul, quam arcus BL, ad arcum BK; [b] ideoque arcus BK, maior erit arcu BL. Cum ergo eadem ſit proportio rectarum LF, FC, CG, GB, ſimul ad LD, DE, EB, ſimul, quæ arcus BK, ad AL, AB, ſimul: ſintque per 3. Lemma, rectæ LF, FC, CG, GB, ſimul minores, quam LD, DE, EB, ſimul; erit quoque arcus BK, minor, quam AL, AB, ſimul. Multò ergo minor erit arcus BL, duabus AL, AB, ſimul. Quare rectæ tangentes AL, AB, ſimul maiores ſunt arcu BL, quod erat oſtendendum.

[a] *ſchol. 27. quinti.*

[b] *10. quinti.*

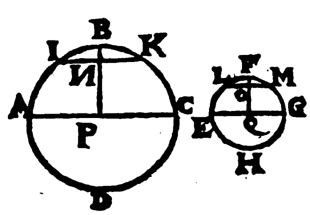
Est autem hæc demonſtratio Cardani admirabilis, & non abſimilis illi, qua Eucl. in propoſ. 12. lib. 9. vtitur. In vtraque enim infertur concluſio demonſtratione affirmatiua ex eius oppoſito, vt patet.

Attvli hanc demonſtrationem Cardani, non quòd verè Geometrica ſit, niſi principium illud ſuum admittatur, ſed quod ingenioſa ſit & acuta. Sine tamen hac demonſtratione concedendum erit, ambitum figuræ circumſcriptæ eſſe maiorem peripheria circuli propter demonſtrationem Archimedis, cum nihil vnquam in contrarium à quoquam ſit allatum, vt ſupra diximus.

THEOR. 2. PROPOS. 2.

CIRCVLORVM diametri inter ſe ſunt, vt circumferentiæ.

Hoc demonſtrauimus nos in libr. 4. cap. 7. num. 3. propoſ. 1. idem autem hic aliter demonſtrabimus ex Pappo, hoc modo. Sint duo circuli ABCD, EFGH, quorum diametri AC, EG. Dico eſſe circumferentiam ad circumferentiam, vt eſt diameter ad diametrum. [c] Quoniam enim eſt circulus ad circulum, vt quadratum diametri ad quadratum diametri. [d] Vt autem circulus ABCD, ad circulum EFGH, ita eſt quadruplum circuli ad quadruplum circuli. Igitur erit quoque quadruplum circuli ABCD, ad quadruplum circuli EFGH, vt quadratum diametri AC, ad quadratum diametri EG. Sed rectangulum ſub diametro AC, & recta, quæ circumferentiæ ABCD, ſit æqualis, comprehenſum, quadruplũ eſt circuli ABCD; & rectangulum ſub diametro EG, & circumferentia EFGH, quadruplum circuli EFGH, ex co-



[c] *2. duodec.*

[d] *15. quinti.*

ex coroll. propoſ.2. cap. 5. Num. 1. lib. 5. Igitur erit rectangulum ſub diametro AC, & circumferentia ABCD, contentum, ad rectangulum ſub diametro EG, & circumferentia EFGH, comprehenſum, vt quadratum ex AC, ad quadratum ex EG; Et permutando erit rectangulum ſub diametro AC, & circumferentia ABCD, ad quadratũ ex AC, vt rectangulum ſub diametro EG, & circumferentia EFGH, ad quadratũ ex EG. [a] Eſt autem rectangulum ſub AC, & recta, quæ circumferentiæ ABCD, ſit æqualis, ad quadratum ex AC, vt recta circumferentiæ æqualis ad AC: propterea quod rectangulum, & quadratum eandem habent altitudinem AC. Eodemque modo eſt rectangulum ſub EG, & recta, quæ circumferentiæ EFGH, ſit æqualis, ad quadratum ex EG, vt recta circumferentiæ æqualis ad EG. Igitur erit, vt circumferentia ABCD, ad diametrum AC, ita circumferentia EFGH, ad diametrum EG: Et permutando circumferentia ad circumferentiam, vt diameter ad diametrum, quod demonſtrandum erat. [a] 1. ſexti.

SCHOLIVM.

SVNT qui putent, fruſtrà à Pappo hoc theorema demonſtrari, cum videatur eſſe per ſe notum, ita eſſe circumferentiam cuiuſuis circuli ad ſuam diametrum, vt eſt circumferentia alterius circuli ad ſuam diametrum. ac proinde permutando eſſe circumferentiam ad circumferentiam, vt eſt diameter ad diametrum. Qua in re mirum in modum decipiuntur. Cum enim à Ptolomæo (quod & à nobis propoſ.10. Sinuum factum eſt) demonſtretur, maiorem eſſe proportionem maioris arcus ad minorem eiuſdem circuli, quam chordæ ad chordam, (quod etiam de arcubus, & chordis in circulis inæqualibus verum eſt, niſi arcus illi ſimiles ſint, vt in ſequenti Theoremate oſtendemus) quis ſine demonſtratione concederet, eandem eſſe proportionem circumferentiæ ad circumferentiã, quæ eſt diametri ad diametrum? Quod ſi demonſtratum eſſet, ita eſſe arcum cuiuſuis circuli ad ſimilem arcum alterius circuli, vt eſt corda ad chordam, tum demum conſtaret, ita eſſe circumferentiam ad circumferentiam, [b] ac proinde & ſemircumferentiam ad ſemicircumferentiam, vt eſt diameter ad diametrum: propterea quod arcus ſemicirculorum ſimiles ſunt, quorum chordæ ſunt diametri. Verum hoc demonſtrari non poteſt, niſi prius demonſtretur, ita eſſe circumferentiam ad circumferentiam, vt eſt diameter ad diametrum, vt in Theoremate ſequenti conſtabit. Meritò ergo, & non ſine cauſa, theorema præcedens à Pappo fuit demonſtratum. [b] 15. quinti.

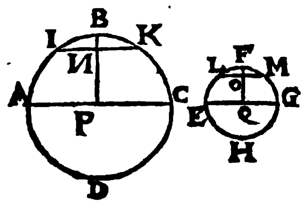
THEOR. 3. PROPOS. 3.

ARCVS cuiuſuis circuli ad arcum ſimilem alterius circuli eandem habet proportionem, quam chorda ad chordam. Et contra arcus eandem habentes proportionem, quam chordæ, ſimiles ſunt.

IN figura præcedentis propoſ. ducantur ad diametros perpendiculares PB, QF, ex centris P, Q, diuidentes ſemicirculos in binos quadrantes: ſintque arcus BI, BK, æquales, quibus ſimiles capiantur FL, FM; adeò vt toti arcus IK,

LM, ſi-

LM, ſimiles ſint, quorum chordæ IK, LM, bifariam ſectæ ſint à ſemidiametris in N, O. Dico eandem eſſe proportionem arcus IBK, ad arcum LFM, quæ eſt
[a] 2. huius. chordæ IK, ad chordam LM, &c. [a] Quoniam enim eſt circumferentia ABD, ad
[b] 15. quinti. circumferentiam EFH, [b] hoc eſt, quadrans AB, ad quadrantem EF, vt diameter AC, ad diametrum EG; hoc eſt, vt ſemidiame-
[c] 15. quinti. ter PB, ad ſemidiametrum QF. [c] Eſt autem, vt quadrans AB, ad quadrantem EF, ita arcus IB, ad arcum LF, cum ſimiles ponantur. Igitur erit quoque arcus IB, ad arcum LF, vt ſemidiameter PB, ad ſemidiametrum QF. Cum ergo ex Lemmate propoſ. 1. lib. 1. noſtræ Gnomonicæ, vel ex Lemmate 5. libr. 1. noſtri Aſtrolabilij, ita ſe habeat PB, ſinus totus ad QF, ſinum totum, quemadmodum ſinus IN, ad ſinum LO. erit quoque arcus



[d] 15. quinti. IB, ad arcum LF, vt ſinus IN, ad ſinum LO, [d] id eſt, duplus arcus IK, ad duplum arcum LM, vt chorda IK, ipſius IN, dupla, ad chordam LM, ipſius LO, duplam. quod eſt propoſitum.

VERVM ſit iam arcus IK, ad arcum LM, vt chorda IK, ad chordam LM. Di-
[e] 15. quinti. co arcus ſimiles eſſe. Facta enim eadem conſtructione, [e] erit quoque arcus IB, ad
[f] ſchol. 33. ſexti. arcum LF, ſemiſsis ad ſemiſſem, vt IN, ad LO, ſemiſsis ad ſemiſſem. [f] Vt autem IB, ad LF, ita eſt quadrans AB, ad quadrantem EF; [g] Et vt quadrans ad quadran-
[g] 2. huius. tem, ita eſt ſemidiameter PB, ad ſemidiametrũ. QF. Igitur erit quoque ſinus IN, ad ſinum LO, vt ſinus totus PB, ad ſinum totum QF: Atque idcirco ex Lemmate propoſ. 1. lib. 1. noſtræ Gnomonicæ, vel ex Lemmate 5. lib. 1. noſtri Aſtrolabij, arcus IB, LF, ſimiles erunt; ac proinde & eorum dupli IBK, LFM, ſimiles erunt. quod erat demonſtrandum.

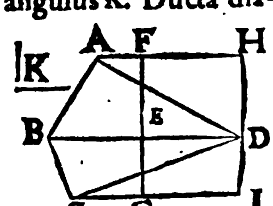
COROLLARIVM.

SEQVITVR hinc, ſi arcus IBK, LFM, non ſint ſimiles, eos non habere eandem cum chordis proportionem. Si namque eandem haberent, ipſi ſimiles eſſent, vt in ſecunda parte huius propoſ. fuit oſtenſum, quod eſt abſurdum, cum ponantur non ſimiles.

PROBL. 1. PROPOS. 4.

DATO quadrilatero æquale parallelogrammum in dato angulo facilius, quam per propoſ. 45. lib. 1. Euclid. conſtituere.

SIT quadrilaterum quodcunque ABCD, & datus angulus K. Ducta diametro BD, eaque diuiſa bifariam in E, ducatur per E, recta FG, faciens in E, angulum FED, dato angulo K, æqualem. Deinde ducta per D, ipſi FG, parallela HI, & per A, C, duabus AH, CI, ipſi BD, parallelis ſecanti-
[h] 29. primi. bus FG, HI, in F, H, G, I, conſtitutum erit parallelogrammum FI, in dato angulo G, [h] qui æqualis eſt angulo, FED, internus externo, hoc eſt, angulo K. Dico



idem

idem parallelogrammum quadrilatero dato ABCD, æquale eſſe. [a] Quia enim [a] parallelogrammum FD, triangulo ABD, & parallelogrammum EI, triangulo CBD, æquale eſt; erit totum parallelogrammum FI, toti quadrilatero ABCD, æquale. quod eſt propoſitum. *[a] ſchol.41. primi.*

PROBL. 2. PROPOS. 5.

DATO rectangulo ſupra datam rectam æquale rectangulum facilius, quam per propoſ.45. lib.1.Euclid. conſtituere.

SIT rectangulum ABCD, cui ſupra datam rectam conſtituendum eſt rectangulum æquale. Producto quolibet latere, nimirum AB, capiatur BE, æqualis datæ rectæ, ſiue ea ſit maior latere AB, ſiue minor: atque ex E, per C, recta ducatur ſecans AD, productam in F, compleaturque rectangulum AH, & rectæ BC, DC. producantur vſque ad G, I. [b] Erit igitur complementum CH, complemento CA, æquale. Cum igitur latus CI, ſit lateri BE, id eſt, datæ rectæ æquale: factum erit, quod proponitur. *[b] 43. primi.*



ALITER.

DATÆ rectæ BE, & duobus lateribus AB, BC, dati rectanguli, [c] inueniatur quarta proportionalis CG. [d] Nam rectangulum ſub BE, prima, & CG, quarta comprehenſum, rectangulum videlicet CH, æquale erit dato rectangulo AC, ſub ſecunda AB, & tertia BC, comprehenſo. quod eſt propoſitum. *[c] 17. ſexti.* *[d] 16. ſexti.*

PROBL. 3. PROPOS. 6.

DATO rectilineo æquale rectangulum facilius, quam per propoſ.45. lib. 1. Euclid. conſtituere.

HOC per duas præcedentes propoſ. facilè expedietur. Nam ſi figura rectilinea in triangula reſoluatur, conſtituent quælibet duo commune latus habentia trapezium, cuius latus commune eſt diameter. [d] Igitur ſi ſingulis trapeziis ſingula rectangula fiant æqualia, atque etiam vltimo triangulo, ſi fortè numerus triangulorum eſt impar. Deinde, ſi, vt in præcedenti propoſ. dictum eſt, vni lateri primi rectanguli, & duobus lateribus ſecundi, [e] inueniatur quarta proportionalis; [f] erit rectangulum ſub aſſumpto latere in primo rectangulo, & quarta proportionali, ſecundo rectangulo æquale. Quocirca ſi alterum latus prope aſſumptum in primo rectangulo producatur, & ex producto abſcindatur recta æqualis quartæ proportionali, compleaturque totum rectangulum, habebitur rectangulum ex duobus compoſitum æquale duobus primis trapeziis. Et ſi eidem lateri, ac duobus tertij rectanguli reperiatur rurſum quarta proportionalis, & huic quartæ ſumatur in priori latere producto recta æqualis, *[e] 4. huius.* *[f] 12. ſexti.* *[g] 16. ſexti.*

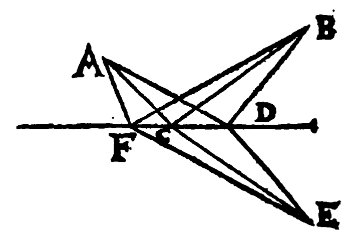
lis, conficietur eodem pacto rectangulum ex tribus conflatum æquale tribus trapeziis, &c.

a ſchol. 41. primi. [a] VLTIMO porrò triangulo, ſi quod fuerit, conſtituetur rectangulum æquale ſupra ſemiſſem baſis, in eadem altitudine cum triangulo.

THEOR. 4. PROPOS. 7.

SI ex duobus punctis ad vnum punctum cuiuſuis lineæ rectæ, quæ communis ſectio ſit plani per duo puncta ducti cum alio quopiam plano, duæ rectæ ducantur, facientes cum illa duos angulos æquales: erunt duæ hæ rectæ breuiores quibuſcunque aliis duabus rectis, quæ ex eiſdem duobus punctis ad aliud punctum eiuſdem lineæ rectæ ducuntur.

Ex duobus punctis A, B, ad C, punctum in recta CD, ita vt planum per CD, ductum tranſeat reuolutum per A, B, ducantur duæ rectæ AC, BC, facientes angulos ACF, BCD, æquales: & ex eiſdem punctis A, B, ducantur primum ad aliud punctum D, ad dextram ipſius C, aliæ duæ rectæ AD, BD. Dico AC, BC, eſſe breuiores, quam AD, BD. Producta enim AC, verſus C, fiat CE, ipſi CB, æqualis, iungaturque DE. Et quia angulus ACF, angulo BCD, ponitur æqualis, (b 15. primi.) [b] eſtque angulus ACF, angulo ECD, ad verticem æqualis, erit quoque angulus BCD, angulo ECD, æqualis. Cum ergo & duo latera BC, CD, duobus lateribus EC, CD, æqualia ſint: (c 4. primi.) [c] erit baſis DB, baſi DE, æqualis; ac proinde AD, DB, ſimul ipſis AD, DE, ſimul æquales erunt. (d 2. primi.) [d] Sunt autem AD, DE, maiores quam AE, hoc eſt, quam AC, CB; quod CB, CE, poſitæ ſint æquales. Igitur & AD, BD, maiores erunt, quam AC, BC. quod eſt propoſitum.



DVCANTVR deinde ex punctis A, B, ad aliud punctum F, ad ſiniſtram ipſius C, aliæ duæ rectæ AF, BF. Dico rurſus AC, BC, breuiores eſſe, quam AF, BF. Producta enim rurſum AC, ſumptaque CE, ipſi CB, æquali, iungatur EF. Et quoniam anguli ACF, BCD, æquales ponuntur; (e 15. primi.) [e] eſtque ACF, angulo ECD, ad verticem æqualis; erunt quoque anguli BCD, ECD, æquales: ac proinde & ex duobus rectis reliqui BCF, ECF, æquales erunt. Cum ergo & duo latera BC, CF, duobus lateribus EC, CF, æqualia ſint; (f 4. primi.) [f] erit quoque baſis BF, baſi EF, æqualis: Ac proinde AF, FE, ipſis AF, BF, æquales erunt. (g 20. primi.) [g] Sunt autem AF, FE, maiores, quam AE, hoc eſt, quam AC, BC, quod BC, CE, poſitæ ſint æquales. Igitur & AF, BF, maiores erunt, quam AC, CB. quod eſt propoſitum.

SCHOLIVM.

QVIA ergo Natura non impedita agit per lineas breuiſsimas; fit, vt radius Solis, vel viſualis cadens ex A, in planum terſum DF, ita vt reflectatur ad pun-

ctum

ctum B, cadat neceſſariò in punctum C, vbi angulus A C F, (quem Perſpectiui angulum incidentiæ dicunt.) æqualis efficitur angulo B C D, quem reflexionis appellant. Nam ſi radius caderet in D, vel F, reflecteretur que ad B, non ageret Natura per lineas breuiſsimas; cum tam AD, BD, quam AF, BF, longiores ſint, quam AC, BC vt demonſtrauimus. quod eſt abſurdum. Atque ita demonſtratum eſt, quod Perſpectiui aſſumunt, angulum ſcilicet incidentiæ æqualem eſſe angulo reflexionis.

PROBL. 4. PROPOS. 8.

SI quis numerum mente conceperit, quot ei vnitates poſt tres operationes imperatas reliquæ ſint, coniicere.

IVBE conceptum numerum per quemcunque numerum, vt per 2. vel 3. vel 4. vel 10. &c. multiplicari, & producto adde tu quemlibet numerum à numero multiplicante numeratum. Deinde iube ex parte aliquota ſummę totius à multiplicante numero denominata auferri ſimilem partem aliquotam numeri producti ex multiplicante in numerum conceptum, hoc eſt, ipſum numerum conceptum. Ita enim reliquus numerus erit ſimilis pars aliquota numeri, quem adiunxiſti. Cum ergo numerus adiunctus tibi notus ſit, habeatque partem aliquotam à numero multiplicante denominatam, ac proinde tibi cognitam: dices reliquas vnitates illam partem aliquotam conficere. Exempli gratia. Concipiat aliquis numerum 4. iube multiplicari per 6. fiunt 24. iube addi numerum 30. à multiplicante 6. numeratum, fiunt 54. Ex ſexta parte huius ſummæ denominata à multiplicante numero 6. id eſt, ex 9. fac detrahi partem quoque ſextam prioris numeri producti 24. nimirum 4. videlicet ipſum numerum conceptum. Ita namque remanet ſexta pars numeri adiuncti 30. nimirum 5. quod in hunc modum demonſtratur.

SIT conceptus numerus A, quo ducto verbi gratia in 6. gignatur B, & addito F, fiat ſumma C. Ex E, parte aliquota ſummæ C, denominata à 6. detrahatur D, pars aliquota prioris producti B, denominata quoque à 6. hoc eſt, ipſemet numerus conceptus A, reliquuſque fiat numerus G, quem dico partem eſſe aliquotam numeri adiuncti F, à numero quoque 6. denominatam. Quoniam enim ita eſt multiplex totus C, totius E, vt ablatus B, ex C, ipſius D, ex E, ablati, quippe cum ponatur E, talis pars ipſius C, qualis D, ipſius B, denominata videlicet à 6.[a] Igitur erit quoque reliquus F, (detracto nimirum producto B, ex ſumma C,) ita multiplex reliqui G, (dempto ſcilicet D, ex E,) vt totus C, totius E. quod erat demonſtrandum.

A	B	C	F
4	24	54	30
	D	E	G
	4.	9.	5.

[a] ſchol. 7. ſeptimi.

EST autem iucundum, hoc idem coniici poſſe inter plures. Nam ſi plures concipiant mente numeros, ſinguli videlicet ſingulos, nullo eorum conſcio, quem quiſq; numerum conceperit; & iubeas quemlibet ſuum numerum multiplicare per quemuis numerum à te electum; deinde addere numerũ à tuo electo

numeratum, quicunque ille ſit; ac poſtremo ex parte aliquota ſummæ, cuius denominator eſt numerus à te electus, auferre ſimilem partem ex productis ſingulorum, hoc eſt, ipſos conceptos numeros: reliquus numerus cuiuſque erit ſimilis pars numeri adiecti.

QVOD ſi malueris diuerſos numeros, dic vt ſecundus ſuum reſiduum duplicet, & tertius triplicet, &c. Ita enim coniicies, primi reſiduum eſſe illam partem aliquotam numeri adiecti: ſecundum verò habere duplum illius, & tertium triplum, &c. Vbi vides eos reſiduum illud per quoſcunque numeros poſſe multiplicare, dummodo memor ſis in coniiciendis numeris, per quos numeros factæ ſunt multiplicationes.

PROBL. 5. PROPOS. 9.

DATVM numerum quadratum in quotuis quadratos numeros partiri.

QVAMVIS problema hoc videatur ferè impoſsibile: (qui enim fieri poteſt, dicet aliquis, vt quilibet numerus quadratus diuidi poſsit in quotlibet numeros, qui omnes ſint quadrati?) ſolutio tamen eius non eſt difficilis. Sit igitur quadratus numerus datus 36. diuidendus in 5. numeros quadratos. Per ea, quæ ad propoſ. 47. lib. 1. Euclid. ſcripſimus, reperiantur tres numeri, quorum maioris quadratus reliquorum quadratis ſit æqualis, nimirum 5. 4. 3. Deinde dic: ſi 5. dant 4. quid dabunt 6. quadrata videlicet radix dati quadrati? Item ſi 5. dant 3. quid dabunt 6? Inueniesq; $\frac{24}{5}$. & $\frac{18}{5}$. hoc eſt, $4\frac{4}{5}$. & $3\frac{3}{5}$. radices duorum quadratorum quadrato 36. dato æqualium. Nam cum ita ſe habeat radix 6. ad inuentos duos numeros, vt 5. ad 4. & 3. ex conſtructione: fiet ex lateribus 6. $4\frac{4}{5}$. $3\frac{3}{5}$. triangulum rectangulum, ſimile nimirum triangulo rectangulo ex lateribus 5. 4. 3. constructo. [a] Igitur quadrati ex $4\frac{4}{5}$. & $\frac{3}{5}$. æquales erunt quadrato radicis 6. dato. Rurſus ſi fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita $3\frac{3}{5}$. ad aliud; (ſumendo minorem radicem inuentam, ne coincidamus cum aliqua præcedente radice iam inuenta) inuenientur alij duo numeri, quorũ quadrati æquales ſint quadrato radicis $3\frac{3}{5}$. nimirum $2\frac{22}{25}$. & $2\frac{4}{25}$. Atque ita iam (relicta radice $3\frac{3}{5}$.) inuentæ erunt tres radices $4\frac{4}{5}$. $2\frac{22}{25}$. $2\frac{4}{25}$. quarum quadrati æquales erunt quadrato 36. propoſito. Eodem modo, ſi fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita $2\frac{4}{25}$. ad aliud, reperientur duæ aliæ radices $1\frac{91}{125}$. & $1\frac{37}{125}$. Quare (relicta radice $2\frac{4}{25}$. cuius loco duas inuenimus) inuentæ iam erunt quatuor radices $4\frac{4}{5}$. $2\frac{22}{25}$. $1\frac{91}{125}$. & $1\frac{37}{125}$. quarum numeri quadrati quadrato 36. æquales erunt. Denique ſi rurſus fiat vt 5. ad 4. & ad 3. ita $1\frac{37}{125}$. minor radix inuenta ad aliud, reperientur duæ aliæ radices $1\frac{23}{625}$. & $\frac{486}{625}$. Quocirca (relicta radice $1\frac{37}{125}$. pro qua duas proximas inuenimus) inuentæ erunt quinque radices $4\frac{4}{5}$. $2\frac{22}{25}$. $1\frac{91}{125}$. $1\frac{23}{625}$. & $\frac{486}{625}$. quarum quadrati numeri $23\frac{1}{25}$. $8\frac{184}{625}$. $2\frac{15406}{15625}$. $1\frac{29279}{390625}$. & $\frac{236196}{390625}$. conficiunt datum quadratum 36. Atque in hunc modum plures quadrati inueniri poterunt æquales numero 36. ſi nimirum fiat, vt 5. ad 4. & ad 3. ita vltima radix inuenta $\frac{486}{625}$. quæ minima eſt, ad aliud, &c.

a 47. primi.

THEOR.

THEOR. 5. PROPOS. 10.

PROPOSITIS duabus minutiis inæqualibus; minutia, cuius numerator ex illarum numeratoribus, denominator autem ex denominatoribus conflatur, maior quidem eſt minore, minor vero maiore.

SINT duæ minutiæ inæquales, maior $\frac{3}{5}$. & minor $\frac{4}{7}$. Iungantur tam numeratores, quam denominatores, vt fiat minutia $\frac{7}{12}$. Dico hanc maiorem eſſe, quam $\frac{4}{7}$. & minorem quam $\frac{3}{5}$. Quoniam enim maior eſt minutia $\frac{3}{5}$. quam $\frac{4}{7}$. erit per propoſ. 8. Minutiarum lib. 9. Eucl. maior proportio 3. ad 5. quam 4. ad 7. [a] Et permutando, maior 3. ad 4. quam 5. ad 7. [b] Igitur & componendo, maior 3. 4. ſimul, hoc eſt, 7. ad 4. quam 5. 7. ſimul, id eſt, quam 12. ad 7. [c] Et permutando, maior 7. ad 12. quam 4. ad 7. Ac proinde per propoſ. 8. Minutiarum libri 9. Euclid. maior erit minutia $\frac{7}{12}$. quam $\frac{4}{7}$. quod eſt primum.

$\frac{3}{5}$. $\frac{4}{7}$. $\frac{7}{12}$.

[a] 27. quinti.
[b] 28. quinti.
[c] 27. quinti.

DEINDE quia minor eſt $\frac{4}{7}$. quam $\frac{3}{5}$. erit per propoſ. 8. Minutiarum libri 9. Euclid. minor proportio 4. ad 7. quam 3. ad 5. [d] & permutando, minor 4. ad 3. quam 7. ad 5. [e] Igitur & componendo minor 4. 3. ſimul, id eſt, 7. ad 3. quam 7. 5. ſimul, hoc eſt. quam 12. ad 5. [f] Et permutando, minor 7. ad 12. quam 3. ad 5. Ac proinde per propoſ. 8. Minutiarum lib. 9. Eucl. minor erit minutia $\frac{7}{12}$. quã $\frac{3}{5}$. quod eſt ſecundum.

[d] 27. quinti.
[e] 28. quinti.
[f] 27. quinti.

THEOR. 6. PROPOS. 11.

SI duo numeri inter ſe primi non ſint ambo quadrati aut cubi; neque eorum æquè multiplices vlli, quadrati erunt, aut cubi. Et ſi eorum æquè multiplices aliqui ſint ambo quadrati, aut cubi, etiam ipſi erunt quadrati aut cubi.

SINT enim A, B, numeri inter ſe primi, & non ambo quadrati, vel cubi, quãuis vnus eorum quadratus ſit, vel cubus. ſintque eorum æquè multiplices C, D. Dico neq; hos eſſe ambos quadratos, aut cubos. Sint enim, ſi fieri poteſt, ambo quadrati, vel cubi. Et quoniam idem numerus multiplicans A, & B, fecit C, & D, quod hi illorum ſint æque multiplices: [g] erit A, ad B, vt C, ad D. [h] Cadit autem inter C, & D, vnus medius proportionalis, aut duo. [i] Igitur & inter A, B, vnus cadet medius proportionalis, aut duo. Cum ergo extremi A, B, ponantur inter ſe primi; [k] erunt omnes tres, vel quatuor, proportionales, minimi in ſua proportione: [l] Ac proinde A, B, ambo quadrati erunt, vel cubi. quod eſt contra hypotheſim. Non ergo C, D, ambo quadrati ſunt, aut cubi. quod erat oſtendendum.

A	B
4.	11.
C	D
12.	33.

[g] 17. ſeptimi.
[h] 11. & 12. octaui.
[i] 8. octaui.
[k] 1. octaui.
[l] corol. 2. octaui.

SED ſint iam C, D, ipſorum A, B, inter ſe primorum æquè multiplices, & ambo quadrati, vel cubi. Dico etiam A, B, ambos eſſe quadratos, vel cubos. Si n.

non ſunt; neque ipſi C, D, erunt ambo quadrati, vel cubi, vt demonſtratum eſt. quod cum hypotheſi pugnat.

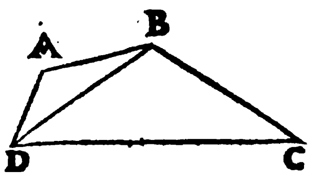
COROLLARIVM.

Hinc fit, ſi tam Numerator, quam Denominator alicuius minutiæ fuerit quadratus, aut cubus: tam Numeratorem quoque, quam Denominatorem eiuſdem minutiæ ad minimos reductę terminos, eſſe quadratum, vel cubum; cum minimi termini ſint numeri inter ſe primi, habeantque eandem proportionem, quam Numerator, ac Denominator prioris minutiæ: quippe cum minutiæ ſint æquales. Item ſi vterque numerus minutiæ cuiuſpiam in minimis terminis non ſit quadratus, aut cubus, neque vtrumque numerum alterius minutiæ æquiualentis eſſe quadratum, aut cubum.

THEOR. 7. PROPOS. 12.

IN omni quadrilatera figura rectilinea, tria latera, vt libet, aſſumpta, maiora ſunt reliquo latere.

Sit quadrilaterum ABCD. Dico quælibet tria latera, nimirum DA, AB, BC, ſimul ſumpta eſſe maiora reliquo latere DC.



Ducta enim diametro BD; [a] erunt rectæ BD, BC, maiores quam DC; Sed eadem ratione AB, AD, maiores ſunt quam BD. Maiores erunt ergo tres AD, AB, BC, quam duæ BD, BC; ac proinde multo maiores, quam DC. Idemque demonſtrabitur ſimili modo de quibuſcunque alijs tribus lateribus, vt conſtat. In omni ergo quadrilatera figura rectilinea, tria latera, vt libet, aſſumpta, maiora ſunt reliquo latere. quod erat demonſtrandum.

[a] 20. primi.

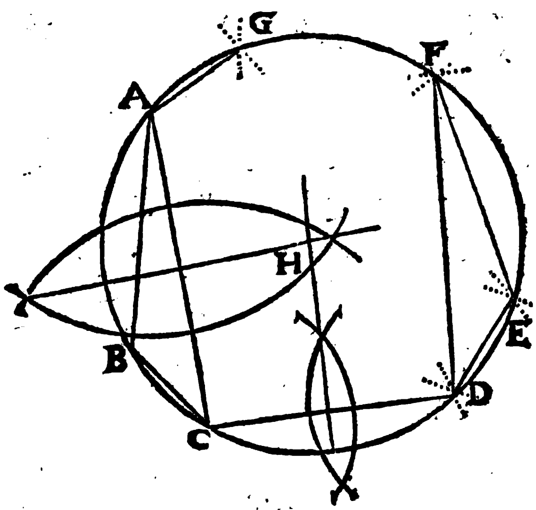
PROBL. 6. PROPOS. 13.

DATIS tribus punctis, per quæ circulis deſcribendus ſit, inuenire alia puncta, per quæ idem circulus tranſire debeat.

Solent interdum tria data puncta tam parum inter ſe diſtare, aut fere in recta linea iacere, vt non facilè eorum centrum inueniri poſsit, propterea quod rectæ ſecantes lineas illa puncta connectentes bifariam, & ad angulos rectos, nimis obliquè ſe in centro interſecant. Vt igitur magis exquiſitè centrum reperiatur, inueſtiganda erunt alia duo puncta, vel plura, per quæ idem circulus incedere debeat, hoc modo. Sint data tria puncta A, B, C. Iunctis rectis AB, AC, BC, conſtituatur ſuper baſem BC, triangulum BCD, triangulo ABC, æquilaterum, ita vt angulus D, vergat in eam partem, verſus quam circumferentia deſcribenda tranſire debet, lateraque æqualia non ab eodem puncto exeant, hoc eſt, latus CD, lateri BA, & latus BD, lateri CA, ſit æquale. Quod quidem fiet, ſi ex C, arcus delineetur ad interuallum BA, quem alius arcus ex B, ad interuallum CA, delineatus ſecet in D. [b] Erit enim angulus D, angulo A, æqualis: [c] ac proinde circulus per tria puncta A, B, C, deſcriptus tranſibit quoque per quartum

[b] 8 primi.
[c] ſchol. 21. tertij.

tum punctum D. Eadem ratione, ſi ſuper baſem C D, triangulum conſtruatur CDE, triangulo BCD, æquilaterum ordine prædicto, ita vt latus D E, lateri C B,



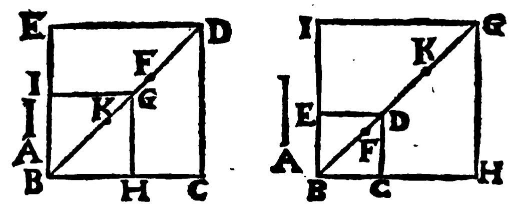
& latus CE, lateri BD, æquale ſit, inuentum erit aliud punctum E, per quod circumferentia incedat. Atque eadem arte reperietur aliud punctum F, per triangulum DEF, triangulo E D C, æquilaterum, &c. Eodem modo ex altera parte reperietur aliud punctum G, per triangulum A B G, triangulo B A C, æquilaterum, & ſic deinceps. Si igitur eligantur tria puncta, ita vt rectæ ea connectentes conſtituant quaſi angulum rectum, qualia ſunt tria puncta A, C, D, & ex proximis A, C, ad quodcunque idem interuallum bini arcus deſcribantur, & ex proximis C, D, bini alij; ac per interſectiones horum arcuum rectæ lineæ emittantur, ſecabunt ſeſe in centro H, &c. Aptiſsima quoque eſſent tria puncta G, B, D, quamuis angulus D B G, acutus ſit. Item tria puncta G, B, E, & C, E, F, &c.

PROBL. 7. PROPOS. 14.

DATO exceſſu diametri Quadrati ſupra latus: Item dato exceſſu diametri Rhombi ſupra latus, vel lateris ſupra diametrum (quando illud maius eſt) vna cum vno Rhombi angulo: Dato præterea exceſſu diametri rectanguli ſupra vtrumlibet laterum inæqualium, vna cum angulo, quem diameter cum eo latere facit, vel vna cum proportione eorundem inæqualium laterum: Dato deniq; exceſſu diametri Rhomboidis ſupra vtrumuis laterum inæqualium, vel vtriuſuis inæqualium laterũ ſupra diametrum (quando illud maius eſt) vna cũ vno angulo Rhomboidis, & inſuper cum angulo, quem diameter cum eo latere facit, vel inſuper cum proportione duorum laterum inæqualiũ; Quadratum ipſum, Rhombũ, Rectangulũ, & Rhomboides conſtituere.

Hoc

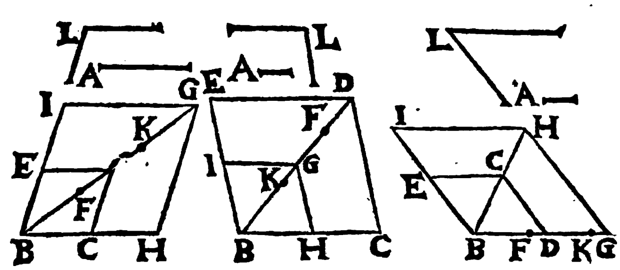
Hoc problema, quod ad quadratum attinet, alio modo ad finem lib. 2. Euclid. abſoluimus. Sit A, datus exceſſus diametri quadrati cuiuſpiam ſupra latus. Fiat quodcunque quadratum B C D E, cuius diameter B D, excedat latus



exceſſu D F; qui ſi æqualis fuerit dato exceſſui A; factum erit, quod iubetur: Si vero inæqualis, [a] fiat vt DF, ad datum exceſſum A, ita diameter BD, ad BG, perficiaturque quadratum H I; quod dico eſſe id, quod quæritur. Sumpta enim recta GK, ipſi A, æquali, quoniam eſt per conſtructionem, vt tota BD, ad totam BG, ita DF, ablata ad A, hoc eſt, ad GK, ablatam; [b] erit quoq; vt tota BD, ad totam BG, ita reliqua BF, ad reliquam BK. Et permutando, vt BD, ad BF, ita BG, ad BK,. [c] Eſt autem vt BD, ad BF, ita BD, ad BC, (quod BF, BC, æquales ſint; cum DF, ponatur exceſſus diametri BD, ſupra latus BC.) [d] Et vt BD, ad BC, ita BG, ad BH. Igitur erit quoque vt BG, ad BK, ita BG, ad BH; [e] Ac proinde BK, BH, æquales erunt. Diameter ergo BG, ſuperat latus BH, hoc eſt, BK, recta GK, quæ dato exceſſui A, æqualis eſt. Quod eſt propoſitum.

a 12. ſexti. *b 19. quinti.* *c 7. quinti.* *d 4. ſexti.* *e 9. quinti.*

Sit deinde A, exceſſus diametri in Rhombo aliquo ſupra latus, vna cum angulo L, datus. Fiat Rhombus quicunque BCDE, habens angulum C, æqualem dato angulo L, vt in primo Rhombo, vel angulum B, vt in ſecundo. Siue ergo diameter opponi debeat dato angulo C, vt in primo Rhombo, ſiue datum angulum B, ſecare, vt in ſecundo, ducatur diameter B D, excedens latus B C, recta DF, quæ ſi æqualis fuerit dato exceſſui A, factum erit, quod iubetur: Si ve-



ro inæqualis, [f] fiat vt D F, ad exceſſum datum A, ita diameter B D, ad B G, compleaturque Rhombus HI, quem dico eſſe, eum, qui quæritur. Abſciſſa enim recta GK, exceſſui dato A, æquali, adhibenda eſt, eadem omnino demonſtratio, quæ in quadrato facta eſt.

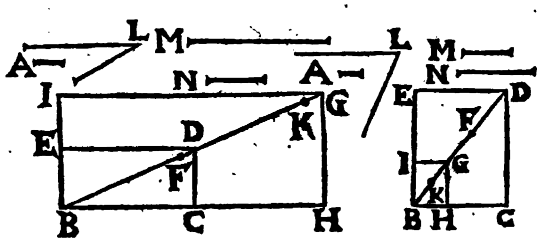
f 12. ſexti.

QVOD

Qvod ſi diameter latere Rhombi minor fuerit, ſit datus exceſſus A, lateris in aliquo Rhombo ſupra diametrum, vna cum angulo L. Conſtruatur Rhombus quantuſcunque BDCE, habens angulum D, æqualem dato angulo L, vt in tertio Rhombo. Et quia vt latus ſuperet diametrum, ducenda eſt diameter per angulos obtuſos, [a] (quod diameter per acutos angulos ducta ſemper maior eſt Rhombi latere) ducatur diameter BC, quam latus BD, excedat recta DF, quę ſi æqualis fuerit exceſſui dato A, factum erit, quod iubetur: Si verò inæqualis: fiat vt DF, ad exceſſum A, ita BD, latus ad BG, compleaturque Rhombus GI, circa eandem diametrum, quem dico eſſe quæſitum. Abſciſſa namq; recta GK, æquali exceſſui A: fiet demonſtratio, vt in quadrato, vt perſpicuum eſt, ſi loco diametrorum BD, BG, in quadrato, ſumantur hic latera BD, BG. *[a] 19. primi.*

Tvnc autem latus Rhombi maius erit diametro (vt hoc etiam obiter moneamus) cum ſemiſsis anguli obtuſi maior fuerit angulo acuto eiuſdē Rhombi. Nam ſi in tertio Rhombo angulus CBD, qui ſemiſsis eſt anguli obtuſi B, vt in ſchol. propoſ. 34. lib. 1. Euclid. oſtendimus, maior ſit angulo acuto D; [b] erit latus BD, hoc eſt, CD, maius diametro BC, in triangulo BCD. Quando autem ſemiſsis anguli obtuſi fuerit minor angulo acuto, vt in Rhombo ſecundo; [c] erit diameter latere maior in triangulo BCD. *[b] 19. primi.* *[c] 19. primi.*

Tertio ſit datus exceſſus A, diametri rectanguli alicuius ſupra alterum laterum inæqualium, vna cum angulo L, quem diameter cum eo latere conſtituit, vel vna cum proportione M, ad N, quam illud latus ad alterum habet. Si ergo angulus L, eſt ſemirecto minor, vel certè proportio M, ad N, maioris inæqualitatis, vt in priori rectangulo, erit A, exceſſus diametri ſupra maius latus: Si verò angulus L, eſt maior ſemirecto, vel proportio M, ad N, minoris inæqua-

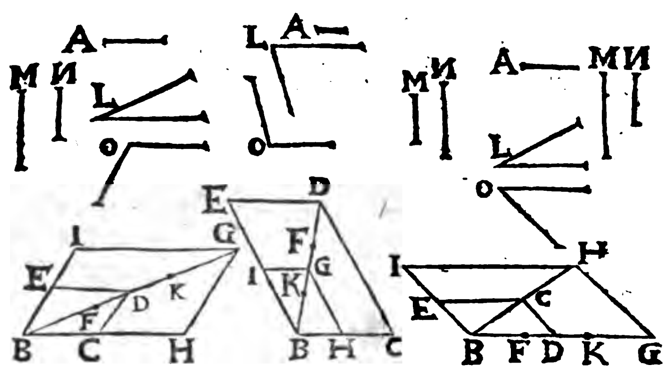


litatis, erit A, exceſſus diametri ſupra minus latus. Conſtituatur ergo angulus CBD, angulo L, æqualis, fiatque rectangulum BCDE, circa aſſumptam diametrum BD. Vel fiat BC, quantacunque ad CD, perpendicularem, vt M, ad N: completoque rectangulo CE, ducatur diameter BD, excedens latus BC, recta DF, quæ ſi fuerit æqualis dato exceſſui A, conſtructum erit rectangulum CE, quod quæritur: Si verò inæqualis, fiat vt DF, ad exceſſum datum A, ita BD, ad BG, compleaturque rectangulum HI, quod erit quæſitum. Abſciſſa enim recta GK, æquali exceſſui A, demonſtrabitur propoſitum, vt in quadrato.

Qvarto & vltimo ſit in aliquo Rhomboide datus exceſſus A, diametri ſupra vtrumuis inæqualium laterum, vna cum angulo Rhomboidis O, & inſuper cum angulo L, quem diameter cum latere, cuius exceſſus ſumptus eſt, effi-

cit, vel inſuper cum proportione M, ad N, quam latus illud ad alterum latus habet. Conſtituatur angulus BCD, in prima figura, vel CBE, in ſecunda dato angulo O, æqualis. Deinde ſiue diameter dato angulo C, opponi debeat, vt in prima figura, ſiue datum angulū CBE, ſecare, vt in ſecūda, fiat ad B, angulus CBD, angulo L, dato æqualis, ſecetque CD, rectam BD, in D: vel fiat vt M, ad N, ita BC, ad CD; ac Rhomboides compleatur CE, cuius diameter latus BC, excedat recta DF. quæ ſi æqualis fuerit dato exceſſui A, factum erit, quod iubetur. Si verò inæqualis, fiat vt DF, ad exceſſum A, ita BD, ad BG, compleaturque Rhomboides HI, circa eandem diametrum BD, quod dico eſſe quæſitum. Nam ſi reſecetur GK, exceſſui A, æqualis, adhibenda eſt eadem demonſtratio, quæ in præcedentibus.

QVOD ſi diameter Rhomboidis cuiuſpiam minor fuerit latere maiore, vt in tertia figura. Sit datus exceſſus A, lateris maioris in aliquo Rhomboide ſupra diametrum, vna cum angulo O, Rhomboidis, & inſuper cum angulo L, quem



diameter cum illo latere maiore efficere debet, vel inſuper cum proportione M, ad N, quam maius latus ad minus habet. Conſtituatur angulus BDC, dato angulo O, æqualis: Et ſi eſt acutus, fiat in B, angulus DBC, angulo L, æqualis, (ſi datus angulus Rhomboidis foret obtuſus, nimirum DBE, conſtituendus eſſet angulus DBC, in ipſo angulo dato) ſecetque recta BC, rectam DC, in C; vel fiat vt M, ad N, ita BD, ad DC; ac Rhomboides cōpleatur DE, cuius latus BD, diametrum BC, ſuperet recta DF, quæ ſi æqualis fuerit dato exceſſui, factum erit, quod iubetur: Si verò inæqualis, fiat vt DF, ad A, ita BD, ad BG, perficiaturque Rhomboides GI, quod dico eſſe quæſitum. Nam ſi capiatur GK, æqualis ipſi A, demonſtrabitur propoſitum, vt ſupra in quadrato, ſi loco diametrorū BD, BG, quadrati, accipiantur hic latera BD, BG, vt perſpicuum eſt.

TVNC autem latus maius diametrum excedet, quando angulus, quem diameter cum minore latere efficit, maior eſt acuto angulo Rhomboidis. Nam ſi in tertia figura angulus BCD, maior eſt angulo D; *erit recta BD, maior, q̃ BC.

* 19. primi.

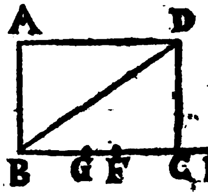
THEOR. 8. PROPOS. 15.

IN rectangulo parallelogrammo, ſumptis exceſſibus, quibus diameter duo latera ſuperat; Rectangulum ſub differentia exceſſuum, & minore exceſſu

re exceſſu

re exceſſu bis ſumptum, vna cum quadrato minoris exceſſus bis ſumpto, æquale eſt quadrato rectæ, qua minus latus minorem exceſſum ſuperat.

SIT rectangulum A C, cuius diametro B D, æqualis ſit recta B E, vt exceſſus minor, quo diameter maius latus BC, ſuperat, ſit CE; Sumpta autem BF, æquali minori lateri CD, vt EF, exceſſus ſit, quo diameter BD, vel illi æqualis BE, minus latus CD, vel illi æqualem BF, ſuperat: ac proinde CF, ſit differentia exceſſuum EC, EF. a Et quia latera BC, CD, maiora ſunt latere BD hoc eſt, recta BE, dempta communi B C, erit reliqua C D, maior, quam reliqua CE; ideoque & BF, æqualis ipſi CD, maior erit, quam CE. Abſciſſa ergo F G, ipſi C E, æquali, erit B G, exceſſus quo minus latus BF, minorem exceſſum FG, ſuperat. Dico rectangulum bis ſumptum ſub F C, differentia exceſſuum, vna cum quadrato minoris exceſſus CE, bis ſumpto, æquale eſſe quadrato rectæ BG, qua minus latus BF, minorem exceſſum FG, ſuperat. b Quoniam enim quadratum rectæ B E, æquale eſt quadratis rectarum B C, C E, vna cum rectangulo bis ſub BC, CE, hoc eſt, rectangulo ſemel ſumpto ſub B C, & recta ipſius C E, dupla: c Eſt autem rectangulum ſub B C, & dupla ipſius C E, æquale rectangulis ſub B F, & dupla ipſius C E, æquale rectangulis ſub B F, & dupla ipſius C E, & ſub FC, & dupla ipſius CE; hoc eſt, rectangulo ſub BF, & CE, bis vna cum rectangulo ſub FC, & CE, bis; Erit quadratum rectæ BE, ſiue rectæ BD, æquale quoque quadratis rectarum BC, CE, vna cum rectangulis ſub BF, CE, bis, & ſub FC, CE, bis; Ac proinde & quadrata rectarum BC, CD, d quæ quadrato rectæ BD, æqualia ſunt, æqualia erunt quadratis rectarum B C, C E, vna cum rectangulis ſub BF, CE, bis, & ſub FC, CE, bis. Ablato ergo communi quadrato rectæ BC, erit reliquum quadratum rectæ CD, hoc eſt, rectæ BF, æquale reliquis rectangulis ſub BF, CE, bis, & ſub FC, C E, bis, vna cum quadrato rectæ C E. Addito igitur communi quadrato rectæ F G, erunt quadrata rectarum B F, F G, æqualia rectangulis ſub BF, CE, bis, & ſub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarum CE, FG. e Sed quadrata rectarum BF, FG, æqualia ſunt rectangulo ſub BF, FG, bis, vna cum quadrato rectæ BG. Igitur rectangulum quoque ſub BF, FG, hoc eſt, ſub BF, CE, bis, vna cum quadrato rectæ BG, æquale erit rectangulis ſub BF, CE, bis, & ſub FC, CE, bis, vna cum quadratis rectarũ CE, FG. Ablato ergo cõmuni rectangulo ſub BF, C E, bis ſumpto; erit reliquum quadratum BG, æquale reliquo rectangulo ſub F C, C E, bis, vna cum quadratis rectarum C E, F G: hoc eſt, rectangulum ſub FC, differentia exceſſuum, & CE, minore exceſſu bis ſumptum, vna cum quadrato minoris exceſſus CE, bis ſumpto, æquale eſt quadrato rectæ BG, qua minus latus B F, minorem exceſſum F G, ſuperat, quod erat demonſtrandum.



a 20. primi.

b 4. ſecundi.

c 1. ſecundi.

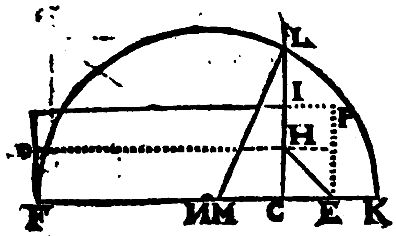
d 47. primi.

e 7. ſecundi.

PROBL. 8. PROPOS. 16.

DATIS duobus exceſſibus, quibus diameter rectanguli vtrumque latus ſuperat, vtrumque latus, & diametrum inuenire.

SIT datus exceſſus FE, diametri ſupra latus minus, & CE, ſupra maius, ita vt differentia exceſſuum ſit FC. Ex C, educatur ad FE, perpendicularis CL, capianturque CH, HI, EK, minori exceſſui CE, æquales, ita vt totæ CI, CK, æquales ſint, vt pote ipſius CE, duplæ, perficiaturque parallelogrammum FI. Diuiſa deinde FK, bifariam in N, deſcribatur ex N, per F, & K, ſemicirculus FLK, ſecans CL, in L. Ducta denique HE, ſumatur illi æqualis CM, iungaturque recta LM. Dico LM, differentiam eſſe inter minus latus quæſitum, & minorem exceſſum datum CE, ita vt CE, addita ad LM, efficiat minus latus; cui ſi addatur FC, differentia datorum exceſſuum, fiat maius latus. (Eſt enim differentia exceſſuum diametri ſupra vtrumque latus rectanguli æqualis exceſſui maioris lateris ſupra minus: vt in figura præcedentis propoſ. patet; vbi diameter eſt BD, vel BE; exceſſus maior FE, quo diameter minus latus BF, ſuperat; exceſſus minor CE, quo eadem diameter maius latus BC, ſuperat: eſtque FC, differentia exceſſuum, exceſſus, quo maius latus BC, ſuperat minus BF,) Ac tandem maiori lateri inuēto adijciatur minor exceſſus CE, vt diameter habeatur. quæ omnia ita demonſtrabuntur. Per præcedentem, rectangulum ſub FC, differentia exceſſuum, & CE, minori exceſſu bis ſumptum, hoc eſt, rectangulum FI, vna cum quadrato rectæ CE, bis etiam ſumpto, hoc eſt, vna cum quadrato rectæ HE, vel CM, æquale eſt quadrato rectæ, qua minus latus quæſitum, minorem exceſſum CE, ſuperat. Cum ergo quadratum rectæ CL, æquale ſit rectangulo FI, vt ex demonſtratione vltimæ propoſ. lib. 2. Euclid. conſtat; erunt quoque quadrata rectarum CL, CM, æqualia quadrato eiuſdem rectæ, qua minus latus quæſitum ſuperat minorem exceſſum CE, a Ac proinde cum quadratis rectarum CL, CM, ſit æquale quadratum rectæ LM: erit quoque quadratum rectæ LM, æquale quadrato rectæ, qua minus latus quæſitum minorem exceſſum CE, ſuperat. Eſt ergo LM, exceſſus minoris lateris quæſiti ſupra minorem exceſſum CE. Ideoque recta ex LM, CE, conflata erit minus latus quæſitum: cui ſi addatur FC, differentia exceſſuum, fiet maius latus quæſitum: cui ſi tandem minor exceſſus CE, adijciatur, conflabitur diameter quæſita. quæ omnia demonſtranda erant.



a 47. primi.

COROLLARIVM.

ITAQVE recta LM, cuius quadratum æquale eſt rectangulo FI, ſub FC, differentia exceſſuum, & dupla minoris exceſſus CE, comprehenſo vna cum duplo quadrati exceſſus minoris CE, addita minori exceſſui CE, efficit minus latus quæſitum, &c.

IMMO quia quadratum rectæ CL, rectangulo FI, ſub FC, differentia exceſſuum, & CK, duplo minoris exceſſus CE, comprehenſo æquale eſt, vt in demonſtratione dictum eſt; & rectangulum CP, duplum eſt quadrati exceſſus minoris CE, hoc eſt, quadrato rectæ CM, æquale: erit quadratū rectæ LM, toti rectāgulo FP, ſub maiori exceſſu FE, & EP, dupla minoris exceſſus CE, contento

æquale;

æquale; [a] ideoque L M, media proportionalis erit inter maiorem exceſſum, ac duplum minoris exceſſus. Quocirca ſi inter maiorem exceſſum, & duplum minoris exceſſus, ſumatur media proportionalis LM, habebitur rurſus differentia inter minus latus, & minorem exceſſum, &c. [a] *17. ſexti.*

SCHOLIVM.

Hoc problema, vna cum antecedente Theoremate in Gallia, vnde mihi tranſmiſſum eſt, ab ingenioſo quodam Geometra demonſtratum fuit, cuius nomen, ſi mihi eſſet cognitum, hic libenter aſſcriberem. Idem tamen problema ad finem lib. 2. Euclid. ex Marino Gheraldo Patritio Raguſino aliter quoque demonſtrauimus non infeliciter.

PROBL. 9. PROPOS. 17.

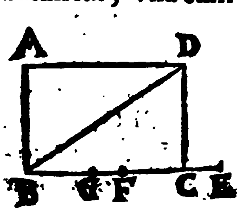
DATO exceſſu diametri rectanguli ſupra maius latus, & exceſſu maioris lateris ſupra minus: vtrumque latus, ac diametrum inuenire.

QVONIAM, vt in præcedenti problem. dictum eſt, exceſſus maioris lateris ſupra minus, æqualis eſt differentiæ inter exceſſus diametri ſupra vtrumque latus: fit vt exceſſus diametri ſupra maius latus, additus ad exceſſum maioris lateris ſupra minus, conficiat exceſſum diametri ſupra minus latus. Quare cum cogniti ſint exceſſus diametri ſupra vtrumque latus, reliqua cognoſcentur, vt in præmiſſo problemate traditum eſt.

PROBL. 10. PROPOS. 18.

SECTA linea recta vtcunque, adiungere ei verſus vtramuis partem lineam rectam, ita vt quadratum totius rectæ compoſitæ æquale ſit quadrato rectæ adiunctæ; vna cum quadrato rectæ, quæ ex adiuncta, & proximo ſegmento prioris lineæ conflatur.

IN figura propoſ. 15. ſit recta EF, ſecta in C, vtcunque, oporteatque ei verſus F, adiungere rectam, ita vt quadratum totius compoſitæ ſit æquale, quadrato adiunctæ, vna cum quadrato rectæ ex ſegmento FC, & adiuncta compoſitæ.

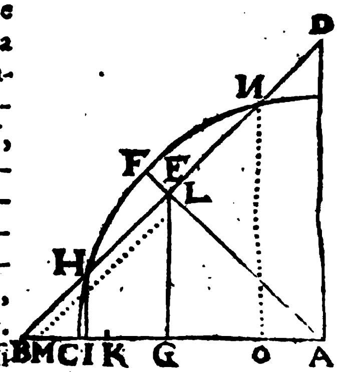


Statuantur EF, EC, exceſſus, quibus diameter alicuius rectanguli vtrumque latus ſuperat. Atque ex propoſ. 16. inueniatur minus latus BF. Dico rectam BF, ipſi EF, adiunctam efficere, quod proponitur. Fiat enim rectangulum AC, ſub BC, & CD, ipſi BF, æquali compreheſum. Et quia FC, differentia exceſſuum addita minori lateri inuēto BF, facit maius latus, vt propoſ. 16. dictū eſt, erit BE, diametro BD æqualis, quandoquidem excedit minus latus BF, vel CD, recta EF, & maius recta EC. [b] Quoniam verò quadratum rectæ BE, hoc eſt, diametri BD, æquale eſt quadrato rectæ CD, id eſt, adiunctæ BF, vna cum quadrato rectæ BC, compoſitæ ex adiuncta BF, & proximo ſegmento FC, liquidò conſtat id, quod proponitur. [b] *47. primi.*

PROBL. 11. PROPOS. 19.

DATIS duabus rectis inæqualibus, quarum maior diametrum quadrati ex minore deſcripti non ſuperet: maiorem ita ſecare in duas partes inæquales, vt earum quadrata ſimul ſumpta quadrato minoris lineæ ſint æqualia,

SINT datæ duæ rectæ AB, maior, & AC, minor, ita vt AB, non ſit maior diametro quadrati ex AC, deſcripti. Erigatur perpendicularis AD, maiori AB, æqualis: Et ducta recta BD, ſecetur bifariam in E, iungaturque recta AE, [a] quæ ad BD, perpendicularis erit: diuidetque angulum rectum A, bifariam in duos ſemirectos: [b] Sunt autem & B, D, ſemirecti. [c] Igitur latera EA, EB, æqualia ſint; ac proinde AB, diameter erit quadrati rectæ AE. Et quoniam AB, ponitur non maior diametro quadrati minoris AC, non erit AC, minor quam AE, ſed vel maior, vel æqualis. Si namque minor eſſet AC, quam AE, ſumpta ipſi æquali AL, ductaque LM, ipſi EB, parallela, eſſet AM, diameter quadrati minoris AL, ideoque maior AB, ſuperaret diametrum quadrati ex minore deſcripti. quod non ponitur. Sit ergo primum AC, maior quam AE, productaque AE, vt AF, ipſi AC, ſit æqualis, deſcribatur ex A, per C, F, circulus ſecans BD, in H, N, demittaturque HI, ad AB, perpendicularis. Dico maiorem AB, ita eſſe ſectam in I, vt quadrata rectarum AI, IB, æqualia ſint quadrato minoris AO. Quoniam enim angulus I, rectus eſt, & B, ſemirectus: erit quoque H, in triangulo BHI, ſemirectus; [d] ideoque latera BI, HI, æqualia erunt. [e] Cum ergo, ducta recta AH, quadrata rectarum AI, IH, quadrato rectæ AH, æqualia ſint; erunt quoque quadrata ſegmentorum AI, IB, æqualia quadrato rectæ AH, hoc eſt, quadrato rectæ AC. quod eſt propoſitum.



SIT deinde minor linea data AK, æqualis ipſi AE, ita vt maior AB. diametro quadrati ex minore AE, deſcripti æqualis ſit. Demittatur perpendicularis EG, [f] quæ & baſem AB, & angulum rectum E, diuidet bifariam in ſemirectos. Dico AB, ita eſſe ſectam in G, vt quadrata ſegmentorum æqualium AG, GB, æqualia ſint quadrato minoris AK, vel AE. [g] Erunt enim rurſus latera EG, GB, æqualia, ob ſemirectos angulos æquales B, & E, in triangulo BEG. [h] Cum ergo quadrata rectarum AG, GE, æqualia ſint quadrato rectæ AE, erunt quoque quadrata ſegmentorum AG, GB, æqualia quadrato AE, vel minoris lineæ AK. quod eſt propoſitum.

SI ex altera ſectione N, demittatur perpendicularis NO, erit AB, ſecta in O, vt in I, ita vt etiam quadrata ſegmentorum BO, OA, æqualia ſint quadrato minoris AC, vel AH. [i] Cum enim rectæ BD, BA, ſectæ ſint proportionaliter in H, I, & N, O, ſintque æquales BH, ND; [k] (propterea quod perpendicularis AE, ſecat HN, bifariam. Ablatis ergo æqualibus EH, EN, ex æqualibus EB, ED, reliquæ

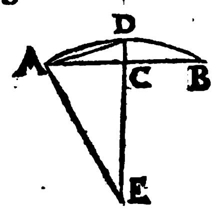
[a] ſchol. 26. primi.
[b] 2. coroll. 32. primi.
[c] 6. primi.
[d] 6. primi.
[e] 47. primi.
[f] ſchol. 26. primi.
[g] 6. primi.
[h] 47. primi.
[i] 2. ſexti.
[k] 3. tertii.

reliquæ B H, D N, æquales erunt) erunt quoque BI, A O, æquales; nec non B O, A C, &c.

PROBL. 12. PROPOS. 20.

DATA chorda alicuius arcus, vna cum perpendiculari, quæ ex medio puncto chordæ ad arcum vſque educitur: quot gradus, vel palmos tam arcus, quam ſemidiameter circuli complectitur, inuenire.

SIT data chorda AB, palmorum 74. & perpendicularis CD, ex medio puncto C, educta palmorum 10. Iuncta recta AD; quoniam in triangulo rectangulo ACD latera AC, CD, nota ſunt, quod CD, ſit 10. & AC, 37. ſemiſsis nimirum chordæ AB, 74. [a] Si fiat vt CD, 10. ad ſinum totum 100000. ita AC, 37. ad aliud; inuenietur AC, 370000, tangẽs anguli ADC; ac proinde ipſe angulus erit gr. 74. min. 53. fere. Et ſi concipiatur duci AE, ad centrum E, erit quoque angulus DAE, gr. 74. min. 53. fere; [b] quippe cum anguli ADE, DAE, æquales ſint. Quod ſi vtriuſque ſumma gr. 149. min. 46. fere, detrahatur ex duobus rectis, hoc eſt, ex gr. 180. reliquus fiet tertius angulus E, in centro gr. 30. min. 14. fere, ac totidem grad. erit arcus AD; ideoque eius duplus ADB, grad. 60. min. 28. fermè.



[a] 8. triang. rectil.

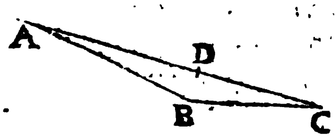
[b] 5. primi.

[c] Quia verò quadratum ex AC, æquale eſt rectangulo ſub CD, & reliqua parte diametri: ſi AC, 37, palm. ducatur in ſe, & productus numerus 1369. diuidatur per CD, palm. 10. prodibit reliqua pars diametri palm. $136\frac{9}{10}$. ac proinde addita CD, palm. 10. tota diameter erit palm. $146\frac{9}{10}$. & ſemidiameter palm. $73\frac{9}{20}$. Si igitur fiat vt 7. ad 22. ita $146\frac{9}{10}$. palmi ad aliud; reperietur per 1. regulam Num. 2. cap. 7. lib. 4. huius, circumferentia circuli palm. $430\frac{9}{35}$. Ergo ſi rurſus fiat, vt tota circumferentia grad. 360. ad palmos $430\frac{9}{35}$. ita arcus ADB, grad. 60. min. 28. ad aliud, inuenietur hic arcus palm. $72\frac{5453}{189000}$. hoc eſt, $72\frac{10}{39}$. paulò amplius.

[c] 35. tertii.

THEOR. 9. ROPOS. 21.

IN omni triangulo quadratum maximi lateris minus eſt, quam duplum ſummæ quadratorum ex reliquis duobus lateribus deſcriptorum.



IN triangulo ABC, maximum latus ſit AC, & angulus oppoſitus B, obtuſus. Si namque rectus eſſet, vel acutus; [d] eſſet quadratum rectæ AC, vel æquale duobus quadratis rectarum AB, BC; [e] vel minus: ac proinde multo minus duplo ſummæ quadratorum AB, BC. Ex maiore latere AC, dematur AD, recta æqualis lateri AB. [f] Et quia duo latera AB, BC,

[d] 47. primi.

[e] 13. ſecund.

[f] 20. primi.

maiora

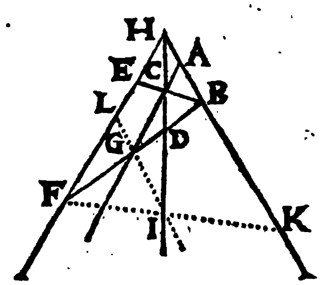
maiora ſunt latere AC; erit reliqua CD, minor latere BC; ac proinde duo quadrata AD, DC, minora duobus quadratis AB, BC. Eſt autem quadratum AC, minus duplo quadratorum AD, DC: [a] propterea quod æquale eſt duobus quadratis AD, DC, vna cum rectangulo bis ſub AD, DC; quod quidem rectangulum bis, minus eſt duobus quadratis AD, DC, ex Lemmate propoſ. 39. lib. 10. Euclid. Multo ergo minus erit quadratum AC, duplo quadratorum AB, BC. quod erat demonſtrandum.

a 4. ſecundi.

PROBL. 13. PROPOS. 22.

DATIS tribus rectis vtcunque in plano non parallelis, niſi quando extremæ à media æqualiter diſtant, rectam lineam ducere, & quidem per datum punctum in media, ſi omnes tres in vno puncto conueniant; ita vt eius ſegmenta inter mediam, & extremas ſint inter ſe æqualia, vel datam habeant proportionem.

SINT tres rectæ AB, CD, EF. Ducatur vtcunque recta BF, ſecans omnes tres. quæ ſecta bifariam in G, ſi quidem punctum G, cadet in mediam, factum erit, quod iubetur. Si verò G, cadet extra lineam mediam CD, agatur per G, alteri extremarum, nimirum ipſi EF, (dummodo ei non æquidiſtet media CD) parallela AG, ſecans mediam in C. Cum enim CD, ponatur non æquidiſtare ipſi EF, ſecabit vtique productam EF, & proinde eius quoque parallelam AG. Quod ſi CD, ipſi EF, æquidiſtaret, ducenda eſſet per G, ipſi AB, parallela. Poſtremò ex B, puncto ductæ rectæ BF, ſumpto in extrema AB, cui non æquidiſtat AG, ducatur per C, vbi parallela AG, mediam CD, ſecat, recta BC, ſecans EF, in E. Dico rectas BC, CE, æquales eſſe. Cum enim in triangulo BEF, recta CG, ſit baſi EF, parallela: [b] erit vt BG, ad GF, ita BC, ad CE; Sed BG, ipſi GF, per conſtructionem, æqualis eſt. Igitur & BC, ipſi CE, æqualis erit.



b 2. ſexti.

QVOD ſi per G, agatur ipſi AB, parallela GI, ſecans mediam CD, in I; erit ducta FIK, ſecta quoque bifariam in I: propterea quod in triangulo FBK, recta GI, baſi BK, æquidiſtat; [c] ideòque ſicut BF, in G, diuiſa eſt bifariam, ita quoque FK, in I, bifariam ſecabitur.

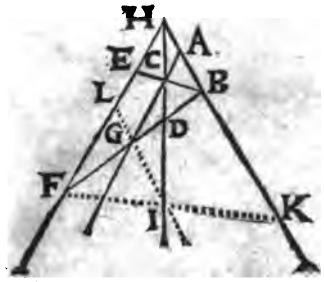
c 2. ſexti.

EX his patet, cur media linea non debeat vtrique extremæ æquidiſtare, ſed vel neutri, vel alteri tantum. Nam ſi vtrique æquidiſtaret, [d] recta per G, ducta parallela alterutra extremarum, æquidiſtaret quoque mediæ, ac proinde eam non ſecaret. Quod ſi neutri æquidiſtet, duci poterit per G, parallela vtrilibet extremarum. Si verò vni extremarum æquidiſtet, ducenda erit per G, alteri parallela.

d 30. primi.

IAM verò ſi tres datæ rectæ coeant in eodem puncto productæ, vt in H, facilius erit problema, etiamſi in media linea detur punctum C, per quod duci debeat

debeat linea. Ducta enim per datum punctum C, in i



rum, vt ipſi HF, ram extremam i capiatur A B, ſec biſariã: a quippe BA, ad rectam A punctum I, in m tri extremarum, ſumptaque ipſi bitur ducta FIK, ea quod eſt FI, &c.

Eadem ratione ducemus lineam, quæ à media ſe tam habentes proportionem. Si namque ducta BF, vt proportionẽ in G, & reliqua fiant, vt ſupra; c erit rurſ ad CB; Vel vt BG, ad GF, ita BC, ad CE, prout videlice ad GB, vel BG, ad GF. Sic etiam ſi tres rectæ datæ coea EF, parallela, fiatque H A, ad A B, vt antecedens datæ quens: ſi ducatur BCE, d erit EC, ad CB, vt HA, ad AB vt conſequens datæ proportionis ad antecedens, erit r antecedens ad conſequens AH.

PROBL. 14. PROP

CVIVSLIBET lineæ, quamuis minimæ, exhiber cunque, etiamſi circino ipſa non accipiatur.

Sit ſumenda verbi gratia lineolæ A B, tripla. Exte



bet ex A, ad C, ſum quales CF, FD, vt t tripla. Item ipſi C B les DG, GH, HE. I triplam. Quoniam AD, totius AC, qu DE, ablatæ CB, nimirum tripla: erit quoque ita multipl AB, vt tota totius, videlicet tripla. quod eſt propoſitu

PROBL. 15. PROP

EX qualibet lineola, quamuis minima, auferre par ratas,

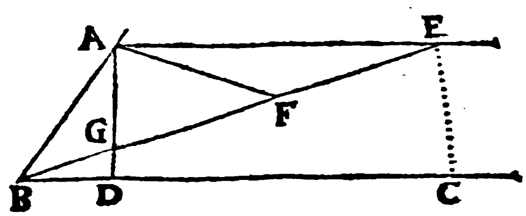
In figura præcedentis propoſ. ſit ex lineola AB, detra præcedentem ſumatur ipſius AB, tripla AE, quæ, ſi videbi tiplicetur, vt libet. In exemplo quadruplicata eſt vſq ipſius AB, duodecupla: (quod ſcietur, ſi numerus parti

catur in numerũ partium ipſius AD, ipſi AE, æqualium, nimirum in 4.) ac proinde ſi AB, diuiſa eſſe intelligatur in 3. partes, tota AD, continebit tales partes 36. Quocirca ſi in inſtrumento partiũ lib. 1. cap. 1. conſtructo interuallum AD, ſtatuatur inter partes 36.36. Deinde interuallũ inter 35.35. (nimirum tota AD, vna parte minus) tranferatur ex D, ad I, erit AI, tertia pars ipſius AB, hoc eſt, pars trigeſima ſexta totius AD. Cum ergo AB, contineat tres trigeſimas ſextas partes totius AD, erit AG, ipſius AB, pars tertia. quod eſt propoſitum.

PROBL. 16. PROPOS. 25.

ANGVLVM datum rectilineum in tres æquales partes partiri.

PROBLEMA hoc veteres Geometras diu, multumque exagitauit, neque ab vllo ad hanc vſque diem Geometrice eſt ſolutum. Pappus Alexandrinus inter alios illud ſoluere conatus eſt per deſcriptionem hyperboles. Nos idem



abſoluemus per lineam Conchoideos, quam lib. 6. propoſ. 15. huius ex Nicomede deſcripſimus, hoc modo. Sit datus angulus acutus ABC: Demiſſa autem ex quouis puncto A, ad BC, perpendiculari AD, ſumatur ipſius AB, dupla DC; Et polo B, interuallo autem DC, deſcribatur linea Conchoideos CE, ſecans rectam AE, ipſi BC, ductam parallelam in E, ducaturque recta BE. Dico angulum CBE, eſſe tertiam partem dati anguli ABC; hoc eſt, angulum ABE, duplum eſſe anguli CBE, adeò vt diuiſo angulo ABE, bifariam, totus angulus ABC, ſectus ſit in tres partes æquales. Quoniam enim ex deſcriptione Conchoideos, recta GE, ipſi DC, æqualis eſt; ac proinde ipſius AB, dupla: ſi ſecetur
a ſchol. 31. tertii. bifariam in F, erit vtraque ſemiſsis ipſi AB, æqualis. [a] Quia verò circulus ex F,
circa GE, deſcriptus tranſit per angulum rectum GAE, erit quoque ducta FA,
b 5. primi. vtrique ſemiſsi FE, FG, ideoque & ipſi AB, æqualis. [b] Igitur tam anguli FAE,
c 32. primi. FEA, quam AFB, ABF, æquales erunt. [c] Eſt autem externus AFB, duobus internis FAE, FEA. æqualis: ideoque ipſius FEA, duplus. Igitur & ABF, eiuſ-
d 29. primi. dem FEA, [d] hoc eſt, alterni CBE, duplus erit.

SI angulus datus rectus eſt, diuidetur in tres æquales angulos, vt in ſcholio propoſ. 32. lib. 1. Euclid. tradidimus.

SI verò eſt obtuſus, ſecabimus eum bifariam, & ſemiſſem alterutram in tres partes æquales, vt docuimus hoc loco. Nam duæ partes tertiæ illius ſemiſsis efficient propoſiti anguli obtuſi tertiam partem, vt perſpicuum eſt.

PROBL.

PROBL. 17. PROPO

SI per idem punctum diametri in rectangulo du
ribus parallelæ: Erit rectangulum ſub ſegme
henſum æquale duobus rectangulis ſub ſegme
comprehenſis.

In rectangulo BD, per E, punctum diametri AC, d
bus parallelæ. Dico rectangulum ſub AE, EC, æquale
FB, & ſub BI, IC. [a] Quoniam enim quadratum ex AC,
AE, EC, vna cum rectangulo bis ſub AE, EC. [b] Sunt a
BC, quadrato ex AC, æqualia; erunt quoque duo q
cum rectangulo bis ſub AE, EC, æqualia quadratis ex
AB, BC. [c] Sed quadratum ex AB, æquale eſt quadra-
tis duobus ex AF, FB, vna cum rectangulo bis ſub AF,
FB; Et quadratum ex BC, æquale eſt duobus quadra-
tis ex BI, IC, vna cum rectangulo bis ſub BI, IC. Igi-
tur duo quadrata ex AE, EC, vna cum rectangulo bis
ſub AE, EC, æqualia erunt quatuor quadratis ex AF,
FB, BI, IC, vna cum rectangulis bis ſub AF, FB, & ſub I
dratum ex AE, quadratis ex AF, FE, hoc eſt, ex AF, BI
quadratis ex EI, IC, hoc eſt ex FB, IC: æquale ſit; E
ex AF, BI, FB, IC, vna cum rectangulo bis ſub AE, EC
dratis ex AF, FB, BI, IC, vna cum rectangulis bis ſub AF,
latiſque vtrobique prædictis quatuor quadratis commu
ctangulum bis ſub AE, EC, reliquis rectangulis bis ſub A
quale. Ideoque rectangulum ſemel ſub AE, EC, rect
FB, & ſub BI, IC, erit æquale. quod erat demonſtrandu

COROLLARIV

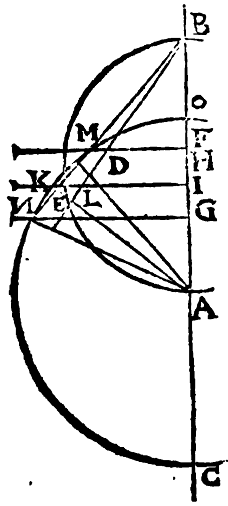
Itaqve in quadrato, vt in poſteriori figura, recta
diametri AE, EC, comprehenſum æquale eſt duobus co
quippe cum complementa ſub ſegmentis laterum comp

PROBL. 18. PROP

DATO centro Ellipſis in linea in infinitum proc
bus punctis ad eaſdem partes axis, vel centri, per
Ellipſis: vtrumque axis vtriuſque extremum in

Hoc problema conicum eſt, & acutum. Sit A, centru
dium alicuius Ellipſis in linea axis maioris BC, quanta cu
eadem Ellipſi D, E, verſus eandem partem, hoc eſt, ſiue
infra; è quibus ad BC, perpendiculares ducantur DF, E

quam EG, quod perpendicularis remotior à centro minor ſemper ſit, quam propinquior. Ducta igitur recta ED, ſecabit lineam axis in B. Secta autem AB, bifariam in H, deſcribatur ex H, circa AB, ſemicirculus AKB. Diuiſa quoque FG, inter ductas perpendiculares bifariam in I, ducatur IK, ad AB, perpendicularis ſecans circumferentiam in K, & rectam BE, in L. Ducta quoque recta BK, ſecante perpendiculares DF, EG, in M, N, iunganturrectæ AM, AK, AN. [a] Et quoniam eſt, vt FI, ad IG, æqualem, ita MK, ad KN, erit quoque MK, ipſi KN, æqualis. Igitur duo latera AK, KM, duobus lateribus AK, KN, æqualia erunt. Cum ergo & angulos æquales comprehendant, vtpote rectos, [b] quod angulus AKB, in ſemicirculo rectus ſit; [c] erunt baſes AM, AN, æquales. Circulus igitur ex A, per N, deſcriptus tranſibit per M, ſecabitque BC, in O, & C. Dico OC, eſſe axem Ellipſis maiorem. [d] Cum enim ſit, vt MD, ad DF, ita NE, ad EG, tranſibit neceſſariò Ellipſis, quæ per O, D, C, deſcribitur, (poſſe autem Ellipſim deſcribi circa OC, tanquam axem maiorem, per punctum D, conſtat ex iis, quæ ad finem ſcholij propoſ. 8. lib. 1. Gnomonices, & in ſcholio Lemmatis 50. lib. 1. Aſtrolabij ſcripſimus) per punctum E, ex ſcholio Lemmatis 51. Aſtrolabij: Ac proinde Ellipſis per data puncta D, E, circa centrum A, deſcripta tranſibit per O, C, ita vt ab Ellipſi per O, D, C, deſcripta non differat. Alioquin Ellipſis Ellipſim in 8. punctis ſecaret, nimirum in D, E, & aliis duobus reſpondentibus ex altera parte axis: deinde in aliis 4. infra centrum reſpondentibus. quod eſt abſurdum [e] quippe cum Ellipſis Ellipſim in 4. tantum punctis ſecet.



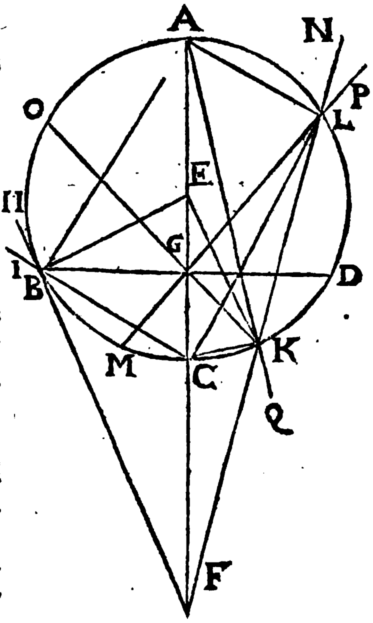
a 2. ſexti.
b 31. tertii.
c 4. primi.
d ſchol. 4.
e 25. quinti Apollonii.

THEOR. 10. PROPOS. 28.

SI in circuli diametro producta punctum ſumatur, ab eoque recta circulum tangens ducatur; à puncto autem contactus chorda ducatur ad diametrum perpendicularis: Recta ex eodem contactus puncto ad vtrumlibet extremum diametri ducta diuidet angulum à tangente, & prædicta chorda perpendiculari comprehenſum bifariam. Item ſi ab eodem puncto in diametro producta aſſumpto recta ducatur circulum ſecans, & ab alterutro ſectionis puncto ad interſectionem diametri cum prædicta chorda perpendiculari recta iungatur: Recta ex eodem ſectionis puncto ad vtrumlibet diametri extremum ducta ſecabit quoque angulum à linea ſecante, & illa alia, quæ per interſectionem diametri cum prædicta chorda perpendiculari ducitur, bifariam.

In circulo ABCD, cuius centrum E, producta ſit diameter AC, & ex F, ducatur primum recta FH, tangens circulum in B, atque ex B, ducatur chorda BD, ſecans

ſecans diametrum in G, ad rectos angulos, iunganturque ad extrema diametri rectæ BC,BA. Dico tam angulos CBF,CBG, quam (producta FB, ad H,) angulos ABH, ABG,eſſe æquales. [a] Quoniam enim angulus CBF, angulo BAC, in alterno ſegmento æqualis eſt. [b] & angulus CBD, eidem angulo BAC, æqualis, ob arcus æquales CB, CD;[c] (vel etiam angulus CBG,angulo BAC,æqualis eſt; quod BG,in triangulo rectangulo ABC,ad baſem AC,perpendicularis ſit) erunt anguli CBF, CBG, inter ſe quoque æquales. Producta autem CB, ad I, ſi ex rectis angulis ABC, ABI,tollantur æquales CBG,HBI,[d] (cum enim CBF, æqualis ſit angulo HBI,ad verticem: & angulus CBG, angulo CBF, oſtenſus æqualis; erit quoque angulus CBG, angulo HBI, æqualis.) erunt quoque reliqui anguli ABG,ABH,inter ſe æquales. quod eſt primum.



a 32.tertij.
b 27.tertij.
c 8.ſexti.
d 15.primi.

DEINDE ducatur recta FN,ſecans circulum in K,L,ductiſque rectis KGO, LGM,per G, iungantur tam rectæ KC, KA, quam LC, LA, ad extrema diametri. Dico rurſus, tam angulos CLF, CLG, quam ALG, ALN: Item tam CKF, CKG, quam AKG, AKL, eſſe æquales. Ductis enim ex centro rectis EB,EK;[e] erit angulus EBF, rectus: [f] Igitur erit FB,media proportionalis inter EF,FG: [g] Ideoque rectangulum ſub EF,FG,quadrato ex FB,æquale erit; [h] Eſt autem eidem quadrato æquale quoque rectangulum ſub LF, FK. Igitur rectangulum ſub EF,FG, rectangulo ſub LF,FK,æquale erit: [i] Ac pro inde erit vt EF,prima ad FK,ſecundam, ita LF,tertia ad FG,quartam. Quare cum triangula EFK,LFG,habeant latera circa communem angulum F,proportionalia; [k] erunt anguli FEK, FLG, homologis lateribus FK, FG, oppoſiti æquales. [l] Eſt autem angulus FEK,in centro anguli CIK,ad circumferentiam, (cum habeat eandem baſem CK,) duplus. Igitur & angulus FLG, eiuſdem anguli CLK, duplus erit; ac proinde angulus FLG, ſectus erit bifariam à recta LC,hoc eſt,anguli CLF, CLG,æquales erunt. Producta autem CL, ad P,ſi ex rectis angulis ALC, ALP,demantur æquales anguli CLG, PLN, (Cum enim CLF, oſtenſus ſit æqualis angulo CLG, [m] & CLF, & æqualis ſit angulo PLN, ad verticem, erit quoque CLG,eidem angulo PLN,æqualis.) erunt quoq; reliqui anguli ALG, ALN, æquales. Rurſus quia anguli CLK, CLM,oſtenſi ſunt æquales; [n] erunt arcus CK, CM,æquales. [o] Igitur anguli CGK, CGM: [p] Ideoq; & anguli AGO, AGL, ad verticem æquales erunt: [q] Ac proinde arcus etiam AO,AL,æquales erunt: [r] ideoque & anguli AKO, AKL,erunt æquales. Producta autem AK,ad Q,ſi ex rectis angulis CKA,CKQ,auferantur æquales AKG, FKQ,(Cum enim angulus AKG,angulo AKL,oſtenſus ſit æqualis: [s] hic autem angulo FKQ,ad verticem ſit æqualis; erit quoque angulus AKG,angulo FKQ, æqualis.) erunt etiam reliqui anguli CKG, CKF, inter ſe æquales. Quæ omnia demonſtranda erant.

e 18.tertij.
f coroll. 8. ſexti.
g 17.ſexti.
h 36.tertij.
i 16.ſexti.
k 6.ſexti.
l 20.tertij.
m 15.primi.
n 26.tertij.
o ſchol. 29. tertij.
p 15 primi
q ſchol. 29. tertij.
r 27.tertij.
s 15.primi.

SCHOLIVM

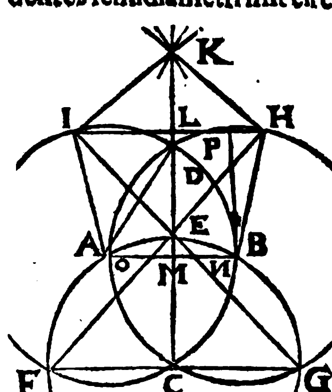
Hoc Theorema valdè vtile eſt ad deſcriptionem paralleli cuiuſuis circuli maximi per datum punctum in Aſtrolabio, vt ex propoſ. 18. lib. 2. Aſtrolabij perſpicuum eſt: cum multa ibi demonſtrari poſsint per hoc Theorema, ſine ijs, quæ ex Aſtrolabij deſcriptione pendent.

THEOR. 11. PROPOS. 29.

DESCRIPTIONEM Pentagoni æquilateri, & æquianguli ſupra datam rectam ab Alberto Durero traditam, & quam omnes fere Architecti, atq; artifices approbant, falſam eſſe, demonſtrare.

Praxis hæc eſt. Sit data recta AB. Ex centris A, B, & interuallo eodem AB, deſcribantur duo circuli ſe ſe interſecantes in C, D. Ducta autem CD, quãtacunque, deſcribatur eodem interuallo AB, ex C, per A, B, circulus rectam CD, in E, & priores circulos ſecans in F, G. Item ducantur ex F, G, per E, rectæ ſecantes priores circulos in H, I. Denique eodem interuallo ex HI, duo arcus deſcripti ſe ſe interſecent in K iunganturque rectæ AI, IK, KH, HB. Putat ergo Durerus, pentagonum ABHKI, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. quod falſum eſt. Nam æquilaterum quidem eſt, ex deſcriptione, non autem æquiangulum. quod vt manifeſtum fiat, demonſtranda ſunt prius nonnulla.

1. Arcvs tres FA, AB, BG, ſextæ partes circuli ſunt, quod rectæ eos ſubtẽdentes ſemidiametri ſint circuli FABG, ex conſtructione. Igitur FABG, ſemicirculus eſt, cuius diameter FG; [a] ideoque angulus FEG, in ſemicirculo rectus: [b] Et diameter FG, rectæ AB, parallela, ob arcus AF, BG, æquales. Et quoniã, vt conſtat ex demonſtratione praxis ſcholij propoſ. 10. & 11. lib. 1. Euclid. recta CD, ſecat rectam AB, bifariam in M, & ad angulos rectos; [c] ſecabit eadem parallela quoque FG, ad angulos rectos in C. [d] Eadem quoq; CD, ſecabit arcum AB, bifariam in E, ac propterea toti arcus EF, EG, æquales erunt, videlicet quadrantes; [e] ideoq; rectæ EF, EG, latera ſunt quadrati in circulo FABG, deſcripti, eiuſque diameter FG. [f] Igitur anguli F, G, ſemirecti erunt: ac proinde cum anguli ad C, recti ſint, [g] erunt quoque OEM, NEM, ſemirecti; ideoq; & EOM, ENM, ſemirecti. [h] Ac proinde tam latera EM, NO, quam EM, MN, æqualia: atque idcirco & OM, NM, inter ſe æqualia erunt; nec non & totæ OB, NA, æquales erunt. [i] Immo & EO, EN, erunt æquales, quod latera EM, MO, laterib. EM, MN, æqualia ſint, cõprehendãtq; angulos æquales, vt pote rectos.

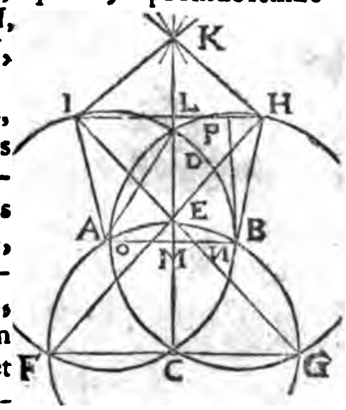


[a] 31. tertij.
[b] ſchol. 27. tertij.
[c] 29. primi.
[d] ſchol. 27. tertij.
[e] 6. quarti.
[f] ſchol. 34. primi.
[g] 32. primi.
[h] 6. primi.
[i] 4. primi.
[k] 19. primi.

2. Deinde quia latera AN, AI, lateribus BO, BH, æqualia ſunt; ſuntq; anguli N, O, ſemirecti æquales, & vterque reliquorum angulorum I, H, minor recto; [k] quod vterque minor ſit ſemirecto ad O, & N; propterea quod tam latus AN, minus eſt latere AI, q̃ latus BO, latere BH: erunt per ea, quæ ad finem lib. 1. Eu-

1. Euclid. demonſtrauimus, tam baſes NI, OH, quam anguli A, B, & I, H, æquales. Igitur duo anguli A, B, in pentagono æquales inter ſe ſunt.

3. RVRSVS demptis OE, NE, æqualibus ex æqualibus OH, NI, reliquæ rectæ EH, EI, æquales ſunt: a erunt anguli EIH, EHI, æquales, ac proinde ſemirecti, cum HEI, ſit rectus; b Sunt autem & anguli H, I, in Iſoſcele KIH, æquales. Igitur toti anguli H, I, in pentagono æquales ſunt. a 5. primi. b 5. primi.



4. POSTREMO cū latera EL, EI, lateribus EL, EH, ſint æqualia, contineantque angulos æquales ſemirectos; c erunt & baſes LI, LH, æquales, & anguli ad L, ideoque recti. Ex quo efficitur, d rectas AB, HI, eſſe parallelas; e quod etiam conſtat ex eo, quod alterni anguli INA, NIH, æquales ſint, nimirum ſemirecti. Hinc etiam ſequitur, rectam CDL, productam cadere in angulum K, diuidereque eum bifariam. Si enim dicatur non cadere in K, f diuidet perpendicularis ex K, ad HI, demiſſa baſem Iſoſcelis KIH, bifariam in alio puncto, quam in L, quod eſt abſurdum. Quia ergo latera KI, KL, lateribus KH, KL, æqualia ſunt, & baſis IL, baſi HL, oſtenſa æqualis: g erunt anguli ad K, æquales. c 4. primi. d 28. primi. e 27. primi. f ſchol. 26. primi. g 8. primi.

HIS ita præmiſsis, demonſtrabimus iam pentagonum ABHKI, non eſſe æquiangulum, hoc modo. h Omnes 5. anguli in pentagono quolibet, ſiue ſit æquilaterum, & æquiangulum, ſiue non, æquales ſunt 6. rectis, hoc eſt, gra. 540. quibus diuiſis per 5. efficitur vnus angulus pentagoni æquilateri, & æquianguli grad. 108. At vterlibet duorum angulorum A, B, in pentagono Dureri maior eſt, quam grad. 108. & vterlibet duorum H, I, minor, & angulus K, maior quolibet reliquorum quatuor. vt oſtendemus. Igitur pentagonū Dureri non eſt æquiangulum. Hoc autem ita fiet perſpicuum. h ſchol. 32. primi.

QVONIAM poſito ſinu toto AB, 10000000. eius ſemiſsis BM, ſinus videlicet grad. 30. eſt 5000000. cui ſi addatur MO, id eſt, ME, ſinus verſus grad. 30. nimirum 1339746. fiet tota BO, 6339746. Quia ergo in triangulo BHO, duo latera dantur BH, 10000000. & BO, 6339746. vna cum angulo O, grad. 45. nec non cum ſpecie anguli H, qui ſupra oſtenſus fuit recto minor: i Si fiat, i 15. triang. rectil.

Vt latus BH, 10000000.	*ad 707 068. ſinum anguli O, grad. 45.*	*Ita latus BO,* 6339746.	*ad aliud,*

inuenietur ſinus anguli BHO, 4482877⅟. ferme, qui in tabula ſinuum offeret ipſum angulum grad. 26. min. 38. cui ſi addatur angulus BOH, grad. 45. fiet ſumma angulorum H, O, grad. 71. min. 38. quæ ſumma dempta ex duobus rectis, id eſt, ex grad. 180. relinquet angulum OBH, grad. 108. min. 22. Igitur vterque angulus A, B, in pentagono maior eſt verò angulo pentagoni grad. 108.

DEINDE ducta BP, ad HI, perpendiculari, ſi iterum ſtatuatur BH, ſinus totus 10000000. erit HP, 3150970. anguli HBP, grad 18. min. 22. qui relinquitur, ſi rectus angulus ABP, grad 90. detrahatur ex angulo ABH, inuento grad. 108. min. 22. Si igitur addatur PL. 5000000. k cum ſit æqualis ipſi BM, ſemiſsi ſinus totius, fiet tota HL, ſinus anguli HKL, 8150970. Ac propterea angulus ipſe erit grad. 54. min. 36. qui duplicatus dabit totum angulum HKI, grad. 109. min. 12. maiore verò angulo pentagoni grad. 108. k 34. primi.

IAM

IAM verò ſi ſumma trium angulorum A, B, K, inuentorum, nimirum grad. 325. min. 56. auferatur ex grad. 540. ſumma omnium 5. angulorum pentagoni, reliqua fiet ſumma angulorum H, I, grad. 214. min. 4. Ac proinde vterque erit grad. 107. min. 2. minor verò angulo pentagoni grad. 180. Non ergo æquiangulum eſt Dureri pentagonum, ſed ſolum æquilaterum. Omnes tamen 5. anguli cõficiunt ſummam grad. 540. ſicut in pentagono æquilatero, atque æquiangulo, vt hæc formula indicat.

Angulus	A	Grad.	108	min.	22
	B	Grad.	108	min.	22
	H	Grad.	107	min.	2
	I	Grad.	107	min.	2
	K	Grad.	109	min.	12
Summa			540	min.	0

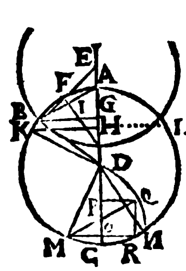
SCHOLIVM.

SVNT alij nonnulli, qui ad interuallum cuiuſuis rectæ AB, deſcriptis ex cẽtris A, B, duobus circulis ſe interſecantibus in C, D, vt in ſuperiori figura, ducunt rectam AD, affirmantque AD, latus eſſe pentagoni in circulo, cuius ſemidiameter DM, inſcripti. ſed toto cœlo aberrant. Eſt enim AD, minus latere pentagoni circuli prædicti. [a] Nam quia latus pentagoni poteſt & latus hexagoni, & latus decagoni circuli eiuſdem: [b] Poteſt autem AD, rectas DM, MA; [c] & DM, latus eſt hexagoni in circulo, cuius ſemidiameter DM, eſſet AM, latus decagoni in eodem circulo. quod falſum eſt. Quoniam enim latus decagoni maius eſt ſemiſſe lateris pentagoni, quod duo latera decagoni ſupra latus Pentagoni conſtituant Iſoſceles [d] in quo duo latera maiora ſunt latere pentagoni: Erit AM, ſemiſsis ipſius AB, vel AD, minor latere decagoni. Igitur AD, minor eſt latere pẽtagoni; [e] quandoquidem latus pentagoni poteſt & latus hexagoni DM, & latus decagoni, quod maius eſt, quam AM, ſemiſsis ipſius AD, vt diximus.

a 10. tertijdecimi.
b 47. primi.
c coroll. 15. quarti.
d 20. primi.
e 10. tertijdecimi.

THEOR. 12. PROPOS. 30.

INVENTIONEM lateris heptagoni in dato circulo non rectè à quibuſdam tradi, demonſtrare.



CAROLVS Marianus Cremonenſis totum vnum libellũ edidit de inuentione lateris heptagoni in circulo dato, in quo probare conatur, latus heptagoni reperiri hac ratione. Sit circulus ABC, cuius centrum D, diameter CA, in qua producta capiatur AE, æqualis quartæ parti ſemidiametri AD, ita vt AE, quinta pars ſit rectæ DE. Deſcripto autem ex E, ad interuallum ſemidiametri AD, circulo ſecante datum circulum in B, iũgatur recta AB, quam dicit eſſe latus heptagoni, quod falſum eſſe, ita oſtendemus. Si AB, eſſet verum latus heptagoni, & ducta BE, æquali ſemidiametro DB, (quod fiet, ſi ex B, ad

B,ad interuallum ſemidiametri recta DE, ſecetur in E,) ſecante arcum AB,in F, diuideretur arcus AB,in F, vel angulus ADB, bifariam. quod tamen in eius deſcriptione non contingit, vt demonſtrabitur. Non ergo eius linea AB, verum latus eſt heptagoni. Ductis enim rectis DB,DF, ſi AB, eſt ſeptima pars circumferentiæ, continebit tam angulus ADB, quam DEB, ([a] qui æquales ſunt) $\frac{2}{7}$. vel $\frac{4}{14}$. duorum rectorum. [b] Ergo reliqui DAB,DBA, ſimul continebunt $\frac{5}{7}$. vel $\frac{10}{14}$. duorum rectorum. Ac proinde vterque ipſorum continebit $\frac{5}{14}$. duorum rectorum. [c] Cum ergo DAB, æqualis ſit duobus E, & ABE, continebunt etiam hi ſimul $\frac{5}{14}$. duorum rectorum. Continet autem E, ſolus $\frac{4}{14}$. duorum rectorum. Igitur ABE, continebit $\frac{1}{14}$. duorum rectorum. [d] Et quia ADF, duplus eſt ipſius ABE, propter eandem baſem AF, continebit angulus ADF, $\frac{2}{14}$. id eſt, $\frac{1}{7}$. duorum rectorum. Cum ergo totus ADB, complectatur $\frac{2}{7}$. vt dictum eſt, continebit quoq; BDF, $\frac{1}{7}$. duorum rectorum; ideoque æquales erunt ADF,BDF.

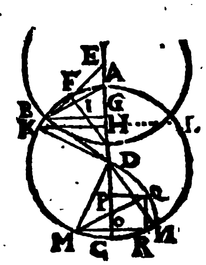
a 5. primi.
b 32. primi.
c 32. primi.
d 20. tertij.

SED iam AB, ſit inuenta per conſtructionem prædicti auctoris; eritque EB, æqualis ipſi DB. Si ergo AB, eſſet verum latus heptagoni, caderet DI, perpendicularis, diuidens nimirum angulum ADB, bifariam, in F, quod verum non eſt. Poſita enim BE, 4. erit tota CE, 9. & DE, 5. [e] Cum ergo ſit, vt BD, ad DE, ita BF, ad FE; (quod angulus ADB, ſectus ſit bifariam) erit componendo, ſumma ex BD, DE, nimirum 9. ad DE, 5. vt BE, ad FE. Si igitur fiat, vt 9. ad 5. ita BE, 4. ad aliud, inuenietur FE, $2\frac{2}{9}$. ac propterea rectangulum ſub BE, 4. & EF, $2\frac{2}{9}$. erit $8\frac{8}{9}$. & rectangulum ſub CE, 9. & EA, 1. erit 9. quod eſt abſurdum; [f] cum hæc rectangula ſint æqualia. Non ergo recta DI, cadit in punctum F, interſectionis rectæ BE, cum arcu AB, quandoquidem rectangulum ſub BE, EF, æquale non eſt rectangulo ſub CE, EA, ſed minus: Ac proinde non rectè illa ratione latus heptagoni inuenitur.

e 3. ſexti.
f 1. coroll. 36. tertij.

ALBERTVS Durerus ad KL, latus trianguli æquilateri (ſumptis videlicet arcubus AK, AL, quorum vterque ſextam partē circumferentiæ contineat) perpendicularem ducit AH, dicitque KH, ſemiſſem illius lateris eſſe latus heptagoni. quod ſimiliter falſum eſt. Nam KH, omnino æqualis eſt rectæ AB, quam proximè demonſtrauimus non eſſe latus heptagoni. Si enim iungeretur recta AK, fieret triangulum æquilaterum AKD. [g] Igitur perpendicularis KH, diuidet AD, bifariam: Ac proinde poſita DK, vel DA, 4. erit DH, 2. Quocirca ſi detrahemus 4. quadratum DH, ex 16. quadrato DK, [h] reliquum erit quadratum KH, 12. At tantum etiam deprehendemus eſſe quadratum AB. Quoniam enim quadratum BE, eſt 16. hoc eſt, $\frac{64}{4}$. & quadratum EG, $\frac{25}{4}$. (Nam perpendicularis BG, ſecat in Iſoſcele EBD, baſem ED, bifariam. Cum ergo ED, ſit 5. erit DG, $2\frac{1}{2}$. cuius quadratum eſt $\frac{25}{4}$.) [i] erit quadratum BG, $\frac{39}{4}$. Sed quadratum AG, eſt $\frac{9}{4}$. quod recta AG, ſit $1\frac{1}{2}$. [k] Igitur quadratum AB, erit $\frac{48}{4}$. id eſt, 12. quod eſt propoſitum.

g ſchol 26. primi.
h 47 primi.
i 47. primi.
k 47 primi.



FRANCISCVS Fluſſas Candalla vir nobiliſsimus, ac doctiſsimus conatus eſt conſtruere triangulum Iſoſceles habens vtrumuis angulorum æqualiū ad baſem triplum reliqui anguli, vt beneficio ipſius in dato circulo heptagonum inſcribatur, vt in ſcholio propoſ. 16. lib. 4. Euclid. tradidimus. Ita ergo ſcribit. Sit triangulum æquilaterum DMN, in quo perpendicularis DO, ad baſem ſecetur bifariam in P. Deſcripto deinde ex M, per N, D, circulo, quem ſecet perpendicu-

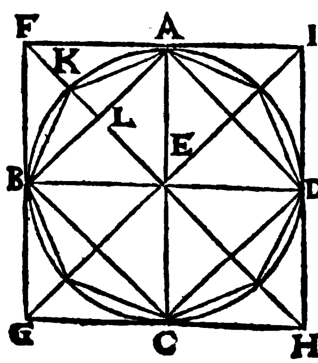
pendicularis PQ in Q, iungantur rectæ QN, MQ. Dicit igitur, in Iſoſcele MNQ, vtrumlibet angulorum N, Q, triplum eſſe anguli M. quod falſum eſſe, hinc intelligi poteſt. Demiſſa perpendiculari QR, pro ſinu arcus QN, vel anguli N, poſito ſinu toto MQ, vel MN, 10000000. [a] Quoniam latus DN, potentia ſeſquitertium eſt perpendicularis DO, ſi fiat vt 4. ad 3. ita 100000000000000. quadratum lateris DN, ad aliud reperietur quadratum DO, 75000000000000. [b] quod cum ſit quadruplum quadrati PO, vel QR, erit quadratum QR, 18750000000000. ipſumque latus QR, erit 4330127. verò minus, vel 4330128. verò maius, cui in tabula ſinuum (adhibita parte proportionali) reſpondent grad. 25. min. 39. ſec. 32. pro arcu QN, vel angulo MNQ, quo ablato ex duobus rectis, ſiue ex grad. 180. reliqua erit ſumma angulorum æqualium ad baſem QN, grad. 154. min. 20. ſec. 28. atque idcirco vterque complectetur grad. 77. min. 10. ſec. 14. qui maior eſt, quam triplus anguli MNQ. grad. 25. min. 39. ſec. 32. cum hic angulus triplicatus efficiat tantummodo grad. 76. min. 58. ſec. 36. Falſum ergo eſt, quod Candalla nititur probare. Paralogiſmos tum Caroli Mariani, tum Candallæ, quos committunt, non eſt huius loci manifeſtare: ſatis nobis eſt, indicaſſe eos non rectè deſcripſiſſe heptagonũ æquilaterũ, & æquiangulũ.

[a] 12. quartidecimi.
[b] ſchol. 4. ſecundi.

THEOR. 13. PROPOS. 31.

OCTOGONVM æquilaterum & æquiangulum circulo inſcriptum medio loco proportionale eſt inter quadratum eidem circulo circũſcriptum, & quadratum inſcriptum.

Hoc Theorema eſt Orontij, quod facilè ita demonſtrabitur. Sit circulus ABCD, cuius centrum E; duæ diametri AC, BD, ſecantes ſe ſe in E, ad angulos rectos. Iunctis ergo rectis AB, BC, CD, DA, erit quadratum circulo inſcriptum ABCD, vt ex demonſtratione propoſ. 6. lib. 4. Euclid. conſtat. Ducantur quoque per A, B, C, D, perpendiculares ad diametros coeuntes in F, G, H, I, eritque quadratum circumſcriptum FGHI, vt patet ex demonſtratione propoſ. 7. lib. 4. Euclid. Ductis autem diametris FH, GI, [c] ſecabuntur quadrantes AB, BC, CD, DA, bifariam; propterea quod anguli in centro ſunt omnes æquales, [d] nimirum ſemirecti: [e] ac proinde & latera quadrati inſcripti diuiſa erunt bifariam, & ad angulos rectos. Et ſi iungantur rectæ, AK, KB, &c. deſcriptum erit octogonum intra circulum. Dico ita eſſe quadratum exterius ad octogonum, vt octogonum ad quadratum interius. Quoniam enim triangula AEF, EAL, æquiangula ſunt, quod rectos habeant angulos, & ſemirectos: [f] Erit EF, ad FA, hoc eſt, ad EK, (eſt namque EK, ipſi EA, hoc eſt, ipſi AF, æqualis) vt EA, hoc eſt, vt EK, ad AL, hoc eſt, ad EL, [g] quod AL, EL, ſint æquales, propter angulos ſemirectos A, E, in triangulo AEL. Sunt ergo tres rectę EF, EK, EL, continue proportionales. Igitur & triangula AEF, AEK, AEL, continue erunt proportionalia: [h] na baſibus EF; EK, EL, ſint proportionalia; [i] Ac proinde & eorũ octupla con-



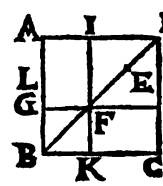
[c] 27. tertij.
[d] ſchol. 34. primi.
[e] ſchol. 27. tertij.
[f] 4. ſexti.
[g] 6. primi.
[h] 1. ſexti.
[i] 15 quinti.

pla continuerunt proportionalia, quadratum videlicet FGHI, octogonum A-KBCDA, & quadratum ABCD; quippe cum prædicta triangula ſint harum figurarum octauæ partes, vt liquet. Octogonum igitur medio loco proportionale eſt inter quadrata FGHI, ABCD, quod demonſtrandum erat.

THEOR. 14. PROPOS. 32.

SI ex diametro quadrati detrahatur ipſius latus: Reliqua linea erit latus alterius quadrati, cuius diameter eſt linea, quæ relinquitur, ſi latus inuentum bis ex diametro prioris quadrati auferatur; vel ſi idem latus inuentum ex prioris quadrati latere tollatur.

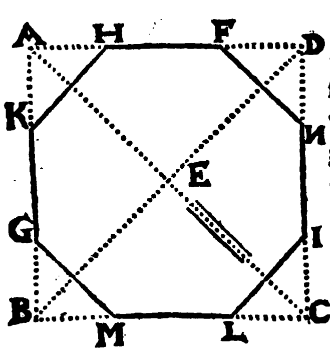
Ex diametro BD, quadrati ABCD, abſcindatur recta BE, lateri AB, æqualis, & ex eadem diametro dematur reliqua DE, bis vſque ad F, ita vt EF, ſit ipſi DE, æqualis: vel (quod idem eſt) reliqua DE, ſiue EF, illi æqualis ex latere AB, hoc eſt, ex BE, auferatur. Dico DE, vel EF, latus eſſe quadrati, cuius diameter BF. Ductis enim per F, rectis GH, IK, parallelis ipſis AD, AB; [a] erunt GK, HI, circa diametrum quadrata. *[a] coroll. 4. ſecundi.* Dico rectam EF, vel DE, æqualem eſſe lateri BG, quadrati GK, cuius diameter BF, reliqua fuit poſt detractionem DE, bis ex diametro BD. [b] Quoniam enim quadratum ex DF, duplum eſt quadrati ex IF, ſiue ex AG, [c] & quadruplum quadrati ex EF; ſi quadratum ex DF, ponatur 4. erit quadratum ex AG, 2. & quadratum ex EF, 1. Ac proinde quadratum ex AG, duplum erit quadrati ex EF. *[b] ſchol. 47. primi.* *[c] ſchol. 4. ſecundi.*



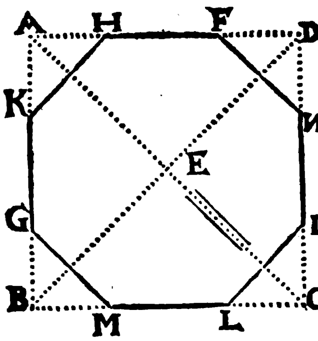
[d] Eſt autem & quadratum ex BF, quadrati ex BG, duplum. [e] Igitur erit vt recta AG, ad rectam EF, ita recta BF, ad rectam BG; quandoquidem quadrata earum proportionalia ſunt, habentia nimirum proportionem duplam. Capiatur BL, ipſi BF, æqualis ita vt reliqua LA, reliquæ FE, æqualis ſit. Erit igitur quoq; AG, ad AL, vt BF, ſiue BL, ad BG; Et diuidendo GL, ad LA, vt GL, ad BG. [f] Quocirca AL, ſiue EF, & BG, æquales ſunt. quod erat oſtendendum. *[d] ſchol. 47. primi.* *[e] 22. ſexti.* *[f] 9. quinti.*

PROBL. 19. PROPOS. 33.

OCTOGONVM æquilaterum, & æquiangulum ad datam altitudinem, latitudinemue conſtituere.



SIT ad altitudinem datam AB, conſtruendum octogonum æquilaterum, & æquiangulum. Deſcripto ex AB, quadrato ABCD, ductiſque diametris AC, BD, ſe in E, ſecantibus bifariam, & ad angulos rectos; abſcindantur ad interuallum EA, ex quatuor angulis quadrati rectæ æquales AF, AG; DH, DI; BK, BL; CM, CN, iunganturq; rectæ HK, GM, LI, NF. Dico octogonum FHKGMLIN, eſſe æquilaterum, & æquiangulum. Quoniam enim rectæ AH, AK; BG, BM; CL, CI; DF, DN, relinquuntur poſt detractionem



rectæ AE, ex lateribus æqualibus quadrati ABCD, ipſæ inter ſe æquales erunt; ideoq; & earũ, quadrata erunt æqualia.[a] Cũ ergo quadratũ ex KH, æquale ſit quadratis ex AH, AK, ipſum duplũ erit tã quadrati ex AH, q̃ quadrati ex AK. Quia verò AB, diameter eſt quadrati ex AE, deſcripti, abſciſſaq; eſt recta BK, lateri AE, æqualis;[b] erit reliqua AK, lat[9] quadrati, cuius diameter GK, quæ relinquitur poſt detractionem ipſius AK, bis ex diametro AB, vel ex latere AG, ſemel. [c] Igitur & quadratum ex GK, duplum erit quadrati ex KA: ac proinde quadrata ex KH, KG, æqualia inter ſe erunt; ideoque & rectæ KH, KG, æquales erunt. Eadem ratione oſtendemus, eandem GK, æqualem eſſe rectæ GM; & GM, æqualem rectæ ML, & ſic de cæteris. Æquilaterum ergo eſt octogonum. [d] Quoniam autem bini anguli ad H, K, G, M, L, I, N, F, æquales ſunt duobus rectis; [e] ſuntque anguli acuti verſus angulos quadrati omnes inter ſe æquales: [f] immo ſemirecti, quod KH, GM, &c. ſint diametri quadratorum ex lateribus AH, GB, &c. deſcriptorum: Erunt reliqui anguli obtuſi in octogono æquales; ideoque octogonum æquiangulum etiam eſt. quod eſt propoſitum.

[a] 47. primi.
[b] 32. huius.
[c] ſchol. 47. primi.
[d] 13. primi.
[e] 4. primi.
[f] ſchol. 34. primi.

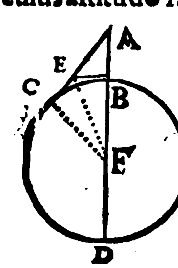
SCHOLIVM.

Hæc praxis, quam antè aliquot annos à quodam Architecto ſine demonſtratione tamen accepi, pulcherrima eſt: quippe quæ non requirat diuiſionem circuli in octo partes æquales, & deſcribat octogonum ad datam altitudinem, latitudinemuè, vt patet. Quam praxem vt demonſtrarem, oportuit prius demonſtrare præcedens theorema. Ex eo enim facile problema propoſitum conficitur, vt patuit.

PROBL. 20. PROPOS. 34.

AMBITVM terræ ex edito aliquo monte metiri.

Circa finem cap. 1. ſphęræ Ioan. de Sacro boſco propoſui rationem, qua Franciſcus Maurolycus ambitum terræ ex edito aliquo monte inueſtigare docuit, quæ talis eſt. Sit circulus terræ BCD, in quo eligatur editiſsimus aliquis mons, (ipſe in Sicilia montem Ætnam ad hoc negotium cenſuit eligendum) cuius altitudo AB, inquiratur vel per Quadrantem, vt lib. 2. problem. 2. 3. & 4. docuimus, vel per Quadratum Geometricum, vt lib. 3. problem. 6. 7. 8. & 9. vel potius vt in ſcholio problem. 7. ac 9. tradidimus. Deinde ex A, vertice montis menſuretur totum illud ſpacium pelagi, ſeu terrę, (vbi tamen montes non ſint) quod inde conſpicitur, ita vt radius AC, maris vel terræ ſuperficiẽ contingat in C. Hoc autẽ fiet per ea, quæ in problematib. citatis tradita ſunt. Ex his poſtea explorat magnitudinẽ lineæ tangẽtis AC,[g] ꝑpterea q, ei[9] quadrato æqualia ſunt quadrata AB, BC, (ſumpto ſpacio BC, ꝓ linea recta) [h] cuius quadratum



[g] 47. primi.
[h] 36. tertij.

quadratum æquale eſt rectangulo ſub AD, AB, quo diuiſo per AB, altitudinem montis, prodibit in Quotiente recta AD; ex qua ſi dematur altitudo montis AB, nota relinquetur diameter terræ BD. [a] Ac proinde circumferentia BCD, cognita fiet.

[a] *coroll. 2. de Dimens. circuli lib. 4. huius.*

Sed quia in hac ratione metiendi ambitus terreſtris aſſumitur, arcum BC, à linea recta non differre. quod verum non eſt, quando mons tam altus eſt, vt ſpacium 200. vel 300. milliariorum cerni poſsit, quod tunc arcus BC, iuxta ambitum à Ptolomæo poſitum contineat grad. 3. min. 11. vel grad. 4. min. 48. Ac proinde non rectè linea tangens AC, ex lateribus AB, BC, colligitur. Adde quod per problemata lib. 2. & 3. citata inuenitur perpendicularis BE, in plano, ad quod mons eſt ad angulos rectos: Redigemus rationem hanc ad meliorem formam multis viis hoc modo. Deprehenſo angulo A, per Quadrantem, vel Quadratum, quando radius viſualis per dioptram circulum terræ tangit. Quod tum denique certiſsimè fiet, cum per dioptram conſpicitur Sol, aut alia ſtella, quando oritur, vel occidit. Deprehenſo, inquam, angulo A, inuenienda erit perpendicularis BE, per problemata paulò ante citata. [b] Et recta AE, ex duabus AB, BE. Si enim ad AE, adiicietur BE, hoc eſt, EC, [c] quæ ipſi BE, æqualis eſt, nota fiet tota tangens AC, ex qua, vt ſupra dictum eſt, & diameter terræ BD, & circumferentia inueſtigabitur. Quin etiam cognito angulo A, ac proinde & eius complemento E, [d] reperietur tam latus BE, [e] quam baſis AE, ſine problematibus ex lib. 2. & 3. citatis, &c.

[b] *47. primi.* [c] *2. coroll. 36. tertii.* [d] *4. triang. rectil.* [e] *5. triang. rectil.*

Vel ſic agemus. Cognito per dioptram angulo A, cognitus etiam erit (ducta recta FC, [f] quæ ad AC, perpendicularis erit) angulus F, eius complementum in centro. Quia verò ducta recta FE, duo latera EC, CF, duobus lateribus EB, BF, æqualia ſunt, comprehenduntque angulos æquales, nempe rectos: [g] erunt anguli ad F, æquales. Cum ergo totus angulus BFC, cognitus ſit, vt proximè diximus; cognitus etiam erit BFE, tanquam ſemiſsis ipſius: ac proinde & eius complementum BEF, notum erit. Igitur in triangulo ABE, ex angulis A, E, & latere AE, [h] reperietur BE, in partibus altitudinis montis AB, notæ. Atque eodem modo in triangulo BEF, ex angulis E, F, & latere BE, cognoſcetur ſemidiameter BF, in partibus lateris BE, hoc eſt, in partibus altitudinis montis AB; ideoque & tota diameter BD, nota fiet, & ex hac ambitus terræ. quod eſt propoſitum.

[f] *18. tertii.* [g] *4. primi.* [h] *4. triang. rectil.*

Deniqve hoc etiam modo idem aſſequemur. Cognito per dioptram angulo A, quando radius viſualis terram contingit, cognitus etiam erit angulus AFC, eius complementum. Ergo huius anguli ſecans AF, cognita erit in partibus ſinus totius FC. Ex qua ſecante, ſi dematur ſinus BF, nota relinquetur altitudo montis AB, in partibus ſinus totius BF. Si igitur fiat, vt altitudo montis AB, nota in partibus ſinus totius ad eandem AB, notam in data menſura, ita ſinus totus BF, ad aliud; proueniet ſemidiameter BF, nota in partibus altitudinis montis, &c.

PROBL. 21. PROPOS. 35.

PRISMATI cuicunque Cylindrum æqualem, & Pyramidi Conum æqualem: Ac viciſsim Cylindro Priſma æquale, & Cono æqualem Pyramidem conſtituere.

Si baſi priſmatis, vel pyramidis conſtruatur circulus æqualis, per ea, quæ ad finem lib. 7. ſcripſimus: Et ſuper hunc circulum extruatur cylindrus, vel conus eiuſdem altitudinis cum priſmate, vel pyramide; erit cylindrus priſmati, & conus pyramidi æqualis. Cum enim tam baſes, quam altitudines æquales ſint: producatur autem priſma, & Cylindrus ex baſe in altitudinem multiplicata, & pyramis, atque conus ex tertia parte baſis in altitudinem multiplicata, vt lib. 5. cap. 1. declarauimus; manifeſtum eſt, cylindrum priſmati, & conum pyramidi eſſe æqualem.

Si viciſsim baſi cylindri, vel coni conſtituatur quadratum, aut alia quæuis rectilinea figura æqualis, per ea, quæ ad finem lib. 7. diximus, & ſuper hoc quadratum, aut figuram rectilineam fiat priſma, vel pyramis eiuſdem altitudinis cum cylindro, vel cono, erit priſma cylindro, & pyramis cono æqualis. quod eſt propoſitum.

PROBL. 22. PROPOS. 56.

DATO Cylindro, aut priſmati æqualem conum, vel pyramidem ſub eadem altitudine. Et viciſsim dato cono, vel pyramidi æqualem cylindrum, aut priſma eiuſdem altitudinis conſtituere.

a 16. ſexti. huius. b 10. duodecimi. c coroll. 7. duodec. d 11. & 6. duodec. e 9. quinti. f 16. ſexti. huius. g 11. & 10. duodec. h 6 & 7. duodec. i 9. quinti.

[a] Si tam baſis cylindri, quam priſmatis tripletur, & ſuper triplicatam extruatur conus, vel pyramis eiuſdem altitudinis, factum erit, quod in prima parte proponitur. [b] Cum enim cylindrus triplus ſit coni eandem cum illo baſem, & altitudinem habentis: [c] Item priſma triplum pyramidis eandem cum illo baſem, atque altitudinem habentis: [d] Sit autem & conus extructus eiuſdem illius coni triplus; necnon & pyramis conſtructa eiuſdem illius pyramidis tripla. [e] Erit tam conus extructus cylindro æqualis, quam pyramis conſtructa priſmati. quod eſt propoſitum.

[f] Si viciſsim baſes coni, & pyramidis in tripla proportione minuantur, & ſuper tertias has partes cylindrus erigatur, & priſma: Erit tam cylindrus dato cono, quam priſma datæ pyramidi æquale. [g] Quoniam enim tam conus datus, quam cylindrus extructus, triplus eſt coni eandem baſem, altitudinemque habentis cum cylindro extructo. [h] Item tam data pyramis, quam priſma extructum, triplum eſt pyramidis eandem habentis baſem, atque altitudinem cum priſmate extructo. [i] Erit tam cylindrus extructus dato cono æqualis, quam priſma conſtructum datæ pyramidis æquale. quod eſt propoſitum.

COROLLARIVM I.

k 35. huius. l 36. huius.

QVIA igitur [k] omne priſma in cylindrum, & pyramis in conum conuertitur: Et contra cylindrus in priſma, & conus in pyramidem: [l] Item cylindrus in conum, & priſma in pyramidem: Et contra conus in cylindrum, & pyramis in priſma conuerti poteſt; fit vt indifferenter tam cylindrus, quam priſma tranſmutari poſsit in pyramidem, aut conum, ac pyramis in cylindrum, aut priſma æquale.

COROL-

COROLLARIVM II.

Ex his etiam manifeſtè colligitur, omnem cylindrum, ac priſma; ſimiliter & conum, ac pyramidem conuerti poſſe in parallelepipedum rectangulum, cuius baſis ſit quadrata. [a] Nam conuerſo cylindro, aut cono, vel pyramide in priſma [a] 35. & 36. huius.
qualecunque, ſi baſi priſmatis fiat quadratum æquale, & ſupra illud erigatur parallelepipedum eiuſdem altitudinis; [b] erit hoc parallelepipedum priori æquale, [b] 2. coroll. 7. duodec.
ac proinde & propoſito cylindro, vel cono, aut pyramidi.

PROBL. 23. PROPOS. 37.

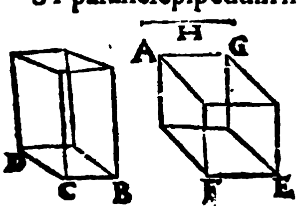
DATVM cylindrum, vel priſma: ſimiliter datum conum, vel pyramidem cuiuſcunque altitudinis, in æqualem ſub data qualibet alia altitudine, & ſupra baſem quotcunque angulorum, reuocare.

In proportione, quam data altitudo ad altitudinem propoſiti ſolidi habet, [c] augeatur vel minuatur baſis eiuſdem ſolidi dati. Nam ſolidum ſupra hanc baſem auctam, vel diminutam ſecundum datam altitudinem conſtructum, erit id, [c] 16. ſexti huius.
quod quæritur. [d] Erit enim æquale dato ſolido: quippe cum altitudines cum [d] 15. & 9. duodec.
baſibus reciprocæ ſint. Quod ſi baſi conſtructi ſolidi fiat æqualis baſis quotcunque angulorum & ſupra eam conſtituatur ſolidum ſub data altitudine; erit hoc etiam ſolidum ſolido propoſito æquale.

PROBL. 24. PROPOS. 38.

DATO parallelepipedo rectangulo cubum æqualem deſcribere.

Si parallelepipedum non habet baſem quadratam, [e] fiat eius baſi quadra- [e] 14. ſecundi.



tum æquale BCD, ſupra quod erigatur parallelepipedum rectangulum eiuſdem altitudinis AB, cum parallelepipedo dato, [f] quod æquale erit dato parallelepipedo. [f] 2. coroll. 7. duodec.
Huic ergo cubum æqualem conſtruemus hac arte. Inter BC, latus quadrati BD, & AB, altitudinem parallelepipedi, inueniantur duæ mediæ proportionales EF, H: ita vt ſit BC, ad EF, quemadmodum EF, ad H, & H, ad AB. Et ſuper EF, propinquiorem lateri BC, conſtruatur cubus EFG. [g] qui parallelepipedo [g] Lemma 18. ſexti huius.
ABCD, æqualis erit.

Qvod ſi fortè accidat, tres dimenſiones parallelepipedi dati, cuius baſis quadrata non ſit, eſſe continuè proportionales; [h] erit cubus ex media deſcriptus [h] 36. undec.
parallelepipedo æqualis.

COROLLARIVM.

[i] Cvm igitur omnis cylindrus, omne priſma, conus ac pyramis in rectangu- [i] 2. coroll.
lum parallelepipedum poſſit commutari, liquidò conſtat, cuilibet ſolido eiuſ- 36. huius.
modi, cubum poſſe conſtrui æqualem.

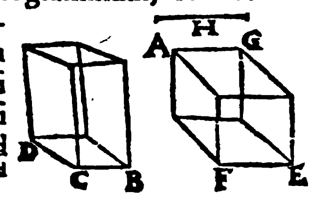
PROBL.

PROBL. 25. PROPOS. 39.

DATO cubo æquale parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel ſupra datam baſem conſtruere.

a 11. ſexti. SIT in præcedenti figura datus cubus EFG, & primum data altitudo AB, ſub qua conſtruendum ſit parallelepipedum rectangulum cubo æquale. [a] Altitudini AB, & lateri cubi EF, reperiatur tertia proportionalis BC. Et fiat rectangulum BD, comprehenſum ſub tertia proportionali BC, & recta CD, lateri cubi EF, æquali; erigaturque ſupra BD, parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine AB. quod dico cubo eſſe æquale. Quoniam enim parallelepipedum rectangulum ABD, continetur ſub tribus rectis AB, CD, BC, hoc eſt, ſub AB,
b 36. vndec. EF, BC, continuè proportionalibus; [b] erit parallelepipedum æquale cubo ex media EF, deſcripto. quod eſt propoſitum.

c 45. primi. SIT deinde data baſis BD, quæ ſi non eſt parallelogrammum, [c] reuocetur ad parallelogrammum æquale. Et quam proportionem habeat baſis data BD, ad baſem cubi dati, eam habet latus cubi EF, ad rectam AB. (quod fiet, ſi ſupra latus cubi EF, fiat rectangulum æquale baſi BD, & ſuper alterum latus huius rectanguli aliud
d 1. ſexti. rectangulum æquale quadrato lateris cubi EF. [d] Nam tunc erit, vt primum rectangulum, id eſt, baſis BD, ad ſecundum rectangulum, id eſt, ad quadratum, vel baſem cubi, ita primi rectanguli baſis, videlicet EF, ad baſem ſecundi rectanguli.) Nam ſi ſupra baſem
e 34. vndec. BD, erigatur parallelepipedum in altitudine inuenta AB, [e] erunt parallelepipedum, & cubus æqualia: quippe cum baſes, & altitudines ſint reciprocæ, ex conſtructione. quod eſt propoſitum.



COROLLARIVM.

f coroll. 38. huius. g 38. huius. h 39. huius. [f] QVONIAM igitur cuilibet cylindro, priſmati, cono, ac pyramidi parallelepipedum rectangulum conſtrui poteſt æquale: [g] ſi huic parallelepipedo fiat cubus æqualis; [h] & huic cubo parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel baſe data æquale: commutatus erit cylindrus, priſma, conus, ac pyramis in parallelepipedum rectangulum æquale datæ altitudinis, vel baſis.

PROBL. 26. PROPOS. 40.

SPHÆRÆ datæ cubum æqualem: Et dato cubo æqualem ſphæram conſtituere.

QVONIAM per propoſ. 32. lib. 1. Archimedis de ſphæra, & cylindro, Cylindrus rectus, cuius baſis eſt maximus ſphæræ circulus, & altitudo diametro eiuſ-
i 14. vndec. dem ſphæræ æqualis, ſeſquialteram habet proportionem ad ſphæram: [i] Habet autem idem cylindrus ad cylindrum eiuſdem baſis, cuius altitudo contineat
k 9. quinti. $\frac{2}{3}$. diametri ſphæræ, proportionem quoque ſeſquialteram; [k] erit poſterior hic cylin-

cylindrus ſphæræ æqualis. Si igitur huic cylindro [a] fiat cubus æqualis; erit idem hic cubus datæ ſphæræ æqualis. quod eſt propoſitum. [a] *coroll. 38. huius.*

Vel quia per eandē propoſ. 32. Archimedis, ſphæra quadrupla eſt coni, cuius baſis eſt maximus ſphærę circulus, & altitudo ſemidiameter ſphæræ æqualis: [b] Eſt autem eiuſdem coni quadruplus etiam conus eiuſdem altitudinis, baſem habens circuli maximi in ſphæra quadruplam, hoc eſt, baſem habens circulum, cuius ſemidiameter æqualis diametro maximi circuli; [c] erit poſterior hic conus ſphæræ æqualis. [d] Si igitur huic cono fiat cubus æqualis, erit hic idem cubus ſphæræ datæ æqualis. quod eſt propoſitum. [b] *11. duodec.* [c] *9. quinti.* [d] *coroll. 38. huius.*

Sit viciſſim dato cubo fabricanda ſphæra æqualis. [e] Fiat cubo, tanquam Priſmati, cylindrus æqualis. Deinde ſphæra fabricetur, habens diametrum ſeſquialteram altitudinis cylindri. [f] Hæc enim ſphæra cylindro, ac proinde cubo dato æqualis erit: propterea quod cylindrus eiuſdem baſis altitudinem habens æqualem diametro ſphæræ, [g] ſeſquialter eſt tam prioris cylindri, [h] quam datæ ſphæræ. quod eſt propoſitum. [e] *35. huius.* [f] *9. quinti.* [g] *14. duodec.* [h] *32. lib. 1. de ſph. & cyl.*

COROLLARIVM I.

Qvia verò [i] ſi baſi cubi fiat æqualis figura quotcunq; laterum, ſiue ea regularis ſit, ſiue non; & ſupra hanc figuram erigatur ſolidum rectangulum ad altitudinē cubi [k] ſolidum hoc cubo eſt æquale: fit vt ſphæræ datæ conſtrui poſſit æquale ſolidum rectangulum ſupra baſem quotlibet angulorum; [l] ſi nimirum prius conſtruatur cubus æqualis; deinde huic cubo ſolidum rectangulum æquale, vt proximè dictum eſt. [m] Item quia cuicunque priſmati pyramis conſtrui poteſt æqualis: ſi cubo, qui ſphærę eſt æqualis, tanquam priſmati, fiat pyramis æqualis; erit quoque eadem pyramis ſphærę æqualis. [n] Immo quoniam cuilibet cylindro conus fieri poteſt æqualis: ſi cylindrus extruatur ſphærę æqualis, ſupra baſem videlicet maximo circulo in ſphæra æqualē, & cuius altitudo contineat $\frac{2}{3}$. diametri, vt ad initium huius propoſ. oſtendimus: Deinde huic cylindro conus æqualis; conſtitutus erit conus quoque datæ ſphærę æqualis. [i] *25. ſexti.* [k] *2. coroll. 7. duodec.* [l] *40. huius.* [m] *36. huius.* [n] *36. huius.*

Viciſſim [o] quia cuilibet priſmati conſtrui poteſt cubus æqualis: [p] Si huic cubo fiat æqualis ſphæra, erit eadem hæc ſphæra conſtituta æqualis dato priſmati ſupra baſem quotcunque angulorum. [o] *37. huius.* [p] *40. huius.*

COROLLARIVM II.

Qvin etiam colligitur, poſſe ſphęram conſtrui æqualem cuilibet corpori regulari. Nam de cubo quidem oſtenſum eſt hac propoſ. 40. De Tetraedro verò, ſiue Pyramide regulari patet. Nam ſi Pyramidi [q] fiat Parallelepipedum æquale: [r] Et huic parallelepipedo cubus æqualis; Ac tandem huic cubo fabricetur ſphęra æqualis; erit eadem hæc ſphæra Tetraedro, ſiue pyramidi regulari æqualis. De Octaedro autem, Icoſaedro, & Dodecaedro ita res peragetur. Si omnibus baſibus corporis regularis fiat quadratum æquale, per ea, quæ ad finem lib. 2. Euclid. vel potius per ea, quę lib. 4. huius Geometrię cap. 4. Num. 4. tradidimus; & ſuper hoc quadratum fiat pyramis habens altitudinem æqualem perpendiculari è centro corporis ad quamlibet baſem ductę, hoc eſt, altitudini vnius pyramidis ex iis, in quas corpus diuiditur è centro: [s] Erit hæc pyramis [q] *2. coroll. 36. huius.* [r] *38. huius.* [s] *9. quinti.*

[a] 6. duodec. corpori regulari æqualis; [a] quippe cum ita ſe habeat tam pyramis hæc quadrilatera ad vnam pyramidem corporis regularis, quam omnes pyramides corporis regularis ad vnam pyramidem, vt baſis illius, vel baſes omnium pyramidum corporis, ad vnam baſem; propterea quod in Octaedro proportio eſt vtrobique octupla: In Icoſaedro, vigecupla: Et in Dodecaedro, duodecupla. Quare ſi toti illi pyramidi cubus conſtruatur æqualis, vt paulò ante de Tetraedro dictum eſt: atque huic tandem cubo ſphæra æqualis fabricetur; erit eadem ſphæra illi pyramidi, hoc eſt, corpori regulari æqualis.

PROBL. 27. PROPOS. 41.

DVOBVS aut pluribus cubis vnum cubum æqualem efficere.

[b] 39 huius. Si ſupra baſem ſuperiorem primi cubi, [b] conſtruatur parallelepipedum rectangulum ſecundo cubo æquale, vt fiat vnum parallelepipedum duobus cubis æquale: Et ſupra huius parallelepipedi baſem ſuperiorem aliud parallelepipedum æquale tertio cubo, & ſic deinceps, ſi plures adſint cubi, conſtructum erit parallelepipedum propoſitis cubis æquale. Huic ergo [c] ſi fiat cubus æqualis, factum erit, quod proponitur. [c] 38. huius.

SCHOLIVM.

[d] 37. huius. EADEM arte quotlibet figuris ſolidis non cubis, conſtruetur cubus æqualis: [d] ſi nimirum reuocentur ad vnum parallelepipedum, &c.

PROBL. 28. PROPOS. 42.

DATO cubo, corpus regulare, quod ex quinque elegeris, æquale conſtruere.

[e] 17. tertii decimi. SIT datus cubus, cuius latus A, cui verbi gratia conſtruendum ſit æquale Dodecaedrum. [e] Fiat quodcunque Dodecaedrum, cuius latus B: cui per ea, quæ in 2. coroll. præcedentis propoſ. dicta ſunt, fiat æqualis cubus, cuius latus C. [f] Et tribus lateribus C, A, B, reperiatur quarta proportionalis D. Dico Dodecaedrum ſupra latus D, conſtructum, æquale eſſe dato cubo lateris A. Quoniam enim, vt ex demonſtratione propoſ. 37. lib. 11. Eucl. patet, ita eſt cubus lateris C, ad cubum lateris A, vt Dodecaedrum lateris B, ad Dodecaedrum lateris D: Eſt autem per conſtructionem, cubus lateris C, æqualis Dodecaedro lateris B; [g] erit quoque cubus lateris A, Dodecaedro lateris D, æqualis. quod eſt propoſitum.

C. A. B. D.

[f] 12. ſexti.

[g] 14. quinti.

PROBL. 29. PROPOS. 43.

EX maiori cubo detrahere minorem, reſiduoque cubum æqualem exhibere.

SVPRA

SVPRA baſem maioris cubi [a] conſtruatur parallelepipedum cubo minori æquale. Et ex latere cubi maioris abſcindatur recta æqualis altitudini conſtructi parallelepipedi. Si enim per punctum abſciſsionis ducatur planum baſibus cubi parallelum, detractum erit parallelepipedum parallelepipedo conſtructo æquale, cum habeat eandem baſem & altitudinem cum illo, hoc eſt, minori cubo æquale. [b] Si igitur reliquo parallelepipedo fiat cubus æqualis, factum erit, quod proponitur. a 39. huius. b 38. huius.

SCHOLIVM.

IDEM fieri poteſt in aliis figuris ſolidis; [c] ſi prius reducantur ad parallelepipeda rectangula, quando non ſunt parallelepipeda. [d] & deinde parallelepipeda ad cubos, &c. c 1. & 2. coroll. 36. huius. d 38. huius.

PROBL. 30. PROPOS. 44.

DATIS duabus, aut pluribus ſphæris, ſphæram vnam æqualem conſtituere.

SPHÆRIS propoſitis [e] conſtruantur cubi æquales: [f] His deinde vnus cubus æqualis fiat, qui etiam ſphæris datis erit æqualis. [g] Si igitur huic cubo extruatur ſphæra æqualis; factum erit, quod iubetur. e 40. huius. f 41. huius. g 40. huius.

PROBL. 31. PROPOS. 45.

EX maiori ſphæra minorem ſphæram detrahere, reſiduoque ſphæram æqualem exhibere.

[h] VTRAQVE ſphæra in cubum reuocetur. [i] Detracto deinde minore ex maiore, [k] ſi reſiduo ſphæra fiat æqualis; factum erit, quod proponitur. h 40. huius. i 43. huius. k 40. huius.

PROBL. 32. PROPOS. 46.

DATVM cubum aut parallelepipedum, ſecundum proportionem datam ſecare.

SI namque vnum latus in baſe cubi, aut parallelepipedi ſecetur ſecundum datam proportionem, & per punctum ſectionis ducatur planum duabus baſibus erectis ſolidi parallelum, diuidens ipſum ſolidum in duo parallelepipeda: habebunt hæc parallelepipeda datam proportionem. [l] Habent enim proportionem inter ſe eandem, quam baſes. [m] Cum ergo baſes habeant eandem proportionem, quam ſegmenta lateris ſecundum datam proportionem diuiſi; conſtat id, quod propoſitum eſt. l 32. [...] dec. m 1. ſexti.

SCHOLIVM.

NON aliter priſma quodlibet, aut cylindrus ſecundum datam proportionem ſecabitur, ſi altitudo in datã ſecetur proportionem, & per punctũ ſectionis

 planum

a ſchol. 14. duodec. b 14. duodec.

planum ducatur baſibus parallelum. Hoc enim ſecabit [a] tam priſma, [b] quam cylindrum in datam proportionem.

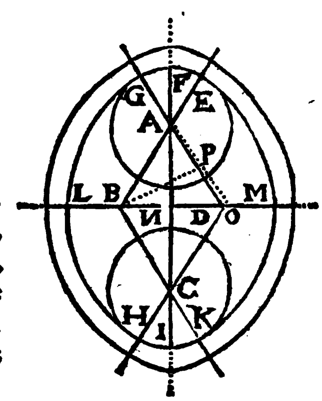
PROBL. 33. PROPOS. 47.

FIGVRAM Ellipſi ſimilem, quam ouatam dicunt, circino deſcribere.

LIBET miſcellaneorum hunc librum peruulgato illo problemate concludere, quo artifices ope circini deſcribere ſolent figuram ouatam Ellipſi ſimilem, ita vt nulli anguli appareant: cum non rarò eiuſmodi figura à Geometris in ſuis delineationibus adhibeatur. Docui quidem in lib. 1. noſtræ Gnomonicę in ſcholio propoſ. 8. qua ratione vera Ellipſis, quę conica ſectio eſt, deſcribenda ſit: Sed hic ſimilem figuram ex ſegmentis circulorum conſtantem deſcribendam proponimus. Ita ergo, vt ex variis ſcriptoribus colligitur, agemus. Conſtruantur duo triangula æquilatera, vel Iſoſcelia ſupra baſem communem AC, in diuerſas partes ABC, ADC. (Æquilatera venuſtiorem faciunt figuram, vt experientia te docebit) productiſque lateribus, deſcribantur ex A, C, duo arcus EFG, HIK, vſque ad latera producta. Si namque ex B, D, per E, K, G, H, alij arcus deſcribantur, [c] tangent hi priores arcus in punctis E, K, G, H: ac proinde illos non ſecabunt, conſtitutaque erit figura ouata.

c 15. primi.

d ſchol. 13. tertii.



BENE autem vides, ex eiſdem centris A, C, B, D, deſcribi poſſe varias figuras, prout arcus EFG, HIK, maiores fuerint, aut minores, vt in figura apparet.

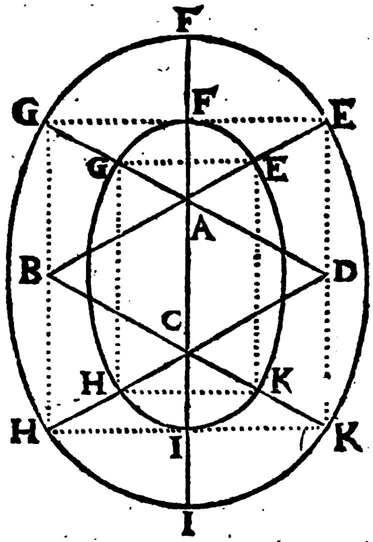
QVOD ſi triangula conſtituta ſint Iſoſcelia, poterunt latera AB, CB, &c. vel maiora fieri baſe AC, vel minora. In figura noſtra ſunt minora.

POTES etiam, ſi placet, primo loco ex centris B, D, deſcribere arcus EMK, GLH, ad quodcunque interuallum, pro latitudine figuræ deſcribendę: deinde ex centris A, C, minores arcus delineare EFG, HIK.

QVIN etiam ſine conſtructione triangulorum idem efficiemus hoc modo. Ductis duabus rectis AC, BD, ad angulos rectos ſe ſecantibus in N; ſumptiſque æqualibus NA, NC, quantiſcunque pro longitudine figurę, deſcribantur ex A, C, arcus circulorum EFG, HIK, parui, aut magni, prout deſideras extremitates figurę ſecundum longitudinem habere anguſtiores, latioreſue. Deinde acceptis aliis duabus rectis æqualibus NB, ND, quantiſcunque, (quo autem puncta B, D, remotiora fuerint ab N, eo anguſtior figura euadet: & quo minus remota, eo latior. Sed vſus magiſter optimus facilè docebit, quantæ debeant eſſe rectæ NB, ND,) ducantur ex B, D, per centra A, C, rectæ ſecantes priores arcus in E, K, &c. Nam ſi ex B, D, per puncta E, K, &c. alij duo arcus deſcribantur, perfecta erit figura Ellipſi ſimilis.

VT autem videas, venuſtiores figuras deſcribi, ſi triangula ABC, ADC, ſint æqui-

æquilatera, quæ fere ratio ab artificibus ſeruari ſolet, deſcripſimus hic duas figuras. In minori eſt latus BA, rectæ AE, duplum, in maiori vero æquale, &c.

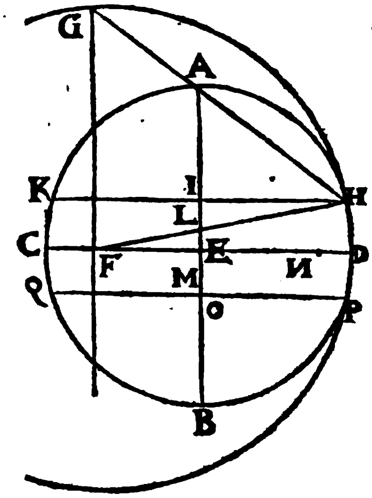


Area figuræ ouatæ his deſcripta.

Iam verò area figuræ ouatæ, beneficio trianguli æquilateri deſcriptæ, quam artifices non raro expetunt, facilè inuenietur, hoc modo. Sector BEK, eſt ſexta pars circuli, cuius ſemidiameter BE, nota, nimirum latus trianguli æquilateri BEK, quod eſt in maiori figura duplum lateris AB, aſſumpti ad libitum: in minori vero ſeſquialterum eſt eiuſdem lateris AB. Inuenta ergo area illius circuli, vt lib. 4. cap. 7. docuimus, ſi ex eius ſexta parte dematur triangulum æquilaterum BEK, cuius area reperietur per ea, quæ in eodem lib. 4. cap. 2. Num. 5. tradita ſunt: reliquum fiet ſegmentum EK, ac proinde & GH, notum. Item ſector AGE, eſt pars duodecima circuli, cuius ſemidiameter AG, nota, nimirum vel æqualis lateri aſſumpto AB, vel ſemiſsis ipſius. Si igitur ex duodecima parte areæ illius circuli auferatur area Iſoſcelis AGE, quæ reperietur per ea, quæ lib. 4. cap. 2. Num. 4. ſcripſimus: remanebit ſegmentum GFE, notum, ideoque & ſegmentum HIK. Quocirca ſi quatuor ſegmentis cognitis adijciatur area rectanguli EGHK, cognita erit area totius figuræ. Cognoſcetur autem area huius rectanguli ex doctrina cap. 1. lib. 4. cum latus EK, chorda ſit ſextæ partis circuli, hoc eſt, ſemidiametro æquale: at EF, ſit ſinus grad. 60. id eſt, ſemiſsis chordæ grad. 120.

Verum quia hac ratione deſcribi nequit figura ad datam longitudinem, latitudinemque; (quoniam ſi longitudo eligatur FI, ignotum erit, quanta ſit futura latitudo: propterea quod arcus ex B, D, deſcripti raro tranſeunt per electa puncta latitudinis: Si verò eligatur latitudo LM, in prima figura, ignorabitur futura longitudo: quippe cum arcus ex A, C, deſcripti raro etiam per electa puncto longitudinis tranſeant: vt perſpicuum eſt.) docebimus cum Ioan. Baptiſta Benedicto, quo pacto, data tam longitudine, quam latiudine figura Ellipſi ſimilis deſcribenda ſit. Sit ergo data longitudo AB, & latitudo CD, quæ ſe bifa-

tiam, & ad rectos angulos ſecent in E. Ex latitudine CD, abſcindatur recta DF, quantacunque vltra E, maior tamen interuallo inter punctum F, & A, extremum longitudinis. Hoc enim niſi fiat, deſcribi non poterit figura ouata. Deinde centro F, & interuallo FD, deſcribatur circulus DG, qui neceſſario vltra punctum A, tranſibit, quippe cum ſemidiameter FD, maior poſita ſit interuallo FA. Ducta autem FG, longitudini AB, parallela ſecante circulum deſcriptum in G; ducatur ex G, per A, recta ſecans eundem circulum in H, puncto, è quo ducatur HIK, latitudini CD, parallela, iungaturque HF, ſecans AB, longitudinem in L; eruntque FG, FH, æquales è centro F, ad circumferentiam. [a] Et quia triangula HGF, HAL, ſimilia ſunt; [b] erit vt GF, ad FH, ita AL, ad LH. Cum ergo GF, ipſi FH. ſit æqualis; erit quoque AL, ipſi LH, æqualis. Circulus ergo AH, ex L, per A, deſcriptus tranſibit per H, [c] ibique priorem circulum DG, tanget. Si igitur capiatur EO, æqualis ipſi EI, & EM, ipſi EL, ducaturque POQ per O, rectæ CD, parallela, atque ex M, centro, interuallo autem LH, vel MP, circulus PBQ, deſcribatur, tanget hic quoque priorem circulum in P. Si denique ſumpta EN, ipſi EF, æquali, deſcribatur ex N, ad interuallum FD, prioris circuli circulus KCQ, tanget hic circulos HAK, PBQ, in K, Q, perfectaque erit figura ouata.



[a] coroll. 4. ſexti.
[b] 4. ſexti.
[c] ſchol. 13. tertij.

Sed quia, vt dictum eſt, conſtatque ex deſcriptione, niſi latitudo CD, tanta ſit, vt ex ea abſcindi poſſit recta DF, maior interuallo FA, figura hac ratione deſcribi nequit: adeo vt longitudo, ac latitudo ad libitum aſſumi non poſſint; inſtituetur operatio alio modo, ſumpta quacunque longitudine AB, & latitudine CD. Secent ſe in prima figura longitudo, latitudoque FI, LM, datæ mutuo bifariam in N, & ad angulos rectos, & ſumantur rectæ FA, IC, æquales, & minores ſemiſſe latitudinis LN; deſcribanturque ex A, & C, per F, & I, circelli EFG, HIK. Sumpta deinde MO, ſemidiametro AF, æquali, iungatur OA, ex O, ad centrum A, quam bifariam, & ad angulos rectos in P, ſecet recta PB, ſecans LM, etiam productum, ſi opus eſt, in B, ducaturque BA, vſque ad circulum GFE. Et quoniam duo latera OP, PB, duobus lateribus AP, PB, æqualia ſunt, anguloſque continent rectos, id eſt, æquales: [d] erunt baſes OB, AB, æquales; additiſque æqualibus OM, AE, (ſumpta namque fuit MO, æqualis ſemidiametro FA, vel IC,) totæ BE, BM, æquales erunt. Deſcriptus ergo circulus ex B, per M, tranſibit per E, [e] ibique circellum GFE, tanget. Eodemque modo circellum HIK, tanget. Si igitur ſumpta ND, ipſi NB, æquali, deſcribatur ex D, per L, circulus tangens eoſdem priores circellos in G, H, abſoluta erit figura.

[d] 4. primi.
[e] ſchol. 13. tertij.

SCHOLIVM.

Qvo autem ſemidiameter FA, ſumpta fuerit minor, quam MN, eo certius centrum B, reperietur vt liquet.

ROGATV

ROGATV multorum placet Epilogi loco apponere tabulam quadratorũ, & cuborum, qui ex numeris ab 1. vſque ad 1000. producuntur: propterea quod huiuſce tabulæ multiplex, & inſignis eſt vſus cum in alijs rebus Mathematicis, tum verò maxime in radicibus quadratis, & cubicis ex magnis numeris extrahendis, vt poſt tabulam paucis exponam. Non extendi autem tabulam vltra radicem 1000. contentus radicibus tres figuras non ſuperantibus: propterea quod ſi extenderetur vſque ad radicem 10000. vt radices haberentur quatuor figurarum, decies maior tabula conficienda eſſet. Si quis tamen eam extendere volet, inueniet ad finem tabulæ regulas, quibus id facile poſsit exequi. Quamuis quadratorum tabulam Doctiſsimus Maginus in ſua tabula Tetragonica vſque ad radicem 10000. promouerit.

SEQVITVR TABVLA QVADRATOrum, & Cuborum, quorum radices maiores non ſunt, quam 1000.

Tabula.

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi
1	1	1	41	1681	68921	81	1656	531441
2	4	8	42	1764	74088	82	4672	551368
3	9	27	43	1849	79507	83	6889	571787
4	16	64	44	1936	85184	84	9705	592704
5	25	125	45	2025	91125	85	7225	614125
6	36	216	46	2116	97336	86	7396	636056
7	49	343	47	2209	103823	87	7569	658503
8	64	512	48	2304	110592	88	7744	681472
9	81	729	49	2401	117649	89	7921	704968
10	100	1000	50	2500	125000	90	8100	729000
11	121	1331	51	2601	132651	91	8281	753571
12	144	1728	52	2704	140608	92	8464	778688
13	169	2197	53	2809	148877	93	8649	804357
14	196	2744	54	2916	157464	94	8836	830584
15	225	3375	55	3025	166375	95	9025	857375
16	256	4096	56	3136	175616	96	9216	884736
17	289	4913	57	3249	185193	97	9409	912673
18	324	5832	58	3364	195112	98	9604	941192
19	361	6859	59	3481	205379	99	9801	970299
20	400	8000	60	3600	216000	100	10000	1000000
21	441	9261	61	3721	226981	101	10201	1030301
22	484	10648	62	3844	238328	102	10404	1061208
23	529	12167	63	3969	250047	103	10609	1092727
24	576	13824	64	4096	262144	104	10816	1124864
25	625	15625	65	4225	274625	105	11025	1157625
26	676	17576	66	4356	287496	106	11236	1191016
27	729	19683	67	4489	300763	107	11449	1225043
28	784	21952	68	4624	314432	108	11664	1259712
29	841	24389	69	4761	328509	109	11881	1295029
30	900	27000	70	4900	343000	110	12100	1331000
31	961	29791	71	5041	357911	111	12321	1367631
32	1024	32768	72	5184	373248	112	12544	1404928
33	1089	35937	73	5329	389017	113	12769	1442897
34	1156	39304	74	5476	405224	114	12996	1481544
35	1225	42875	75	5625	421875	115	13225	1520875
36	1296	46656	76	5776	438976	116	13456	1560896
37	1369	50653	77	5929	456533	117	13685	1601613
38	1444	54872	78	6084	474552	118	13924	1643032
39	1521	59319	79	6241	493039	119	14161	1685159
40	1600	64000	80	6400	512000	120	14400	1728000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi
121	14641	1771561	161	25921	4173281	201	40401	8120601
122	14884	1815848	162	26244	4251528	202	40804	8242408
123	15129	1860867	163	26569	4330747	203	41209	8365427
124	15376	1906624	164	26896	4410944	204	41616	8489664
125	15625	1953125	165	27225	4492125	205	42025	8615125
126	15876	2000376	166	27556	4574296	206	42436	8741816
127	16129	2048383	167	27889	4657463	207	42849	8869743
128	16384	2097152	168	28224	4741632	208	43264	8998912
129	16641	2146689	169	28561	4826809	209	43681	9129329
130	16900	2197000	170	28900	4913000	210	44100	9261000
131	17161	2248091	171	29241	5000211	211	44521	9393931
132	17424	2299968	172	29584	5088448	212	44944	9528128
133	17689	2352637	173	29929	5177717	213	45369	9663597
134	17956	2406104	174	30276	5268024	214	45796	9800344
135	18225	2460375	175	30625	5359375	215	46225	9938375
136	18496	2515456	176	30976	5451776	216	46656	10077696
137	18769	2571353	177	31329	5545233	217	47089	10218313
138	19044	2628027	178	31684	5639752	218	47524	10360232
139	19321	2685619	179	32041	5735339	219	47961	10503459
140	19600	2744000	180	32400	5832000	220	48400	10648080
141	19881	2803221	181	32761	5929741	221	48841	10793861
142	20164	2863288	182	33124	6028568	222	49284	10941048
143	20449	2924207	183	33489	6128487	223	49729	11089567
144	20736	2985984	184	33856	6229504	224	50176	11239424
145	21025	3048625	185	34225	6331625	225	50625	11390625
146	21316	3112136	186	34596	6434856	226	51076	11543176
147	21609	3176523	187	34969	6539203	227	51529	11697083
148	21904	3241792	188	35344	6644672	228	51984	11852352
149	22201	3307949	189	35721	6751269	229	52441	12008989
150	22500	3375000	190	36100	6859000	230	52900	12167000
151	22801	3442951	191	36481	6967871	231	53361	12326391
152	23104	3511808	192	36864	7077888	232	53824	12487168
153	23409	3581577	193	37249	7189057	233	54289	12649337
154	23716	3652264	194	37636	7301384	234	54756	12812904
155	24025	3723875	195	38025	7414875	235	55225	12977875
156	24336	3796416	196	38416	7529536	236	55696	13144256
157	24649	3869893	197	38809	7645373	237	56169	13312053
158	24964	3944312	198	39204	7762392	238	56644	13481272
159	25281	4019679	199	39601	7880599	239	57121	13651919
160	25600	4096000	200	40000	8000000	240	57600	13824000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi
241	58081	13997521	281	78961	22188041	321	103041	33076161
242	58564	14172488	282	79524	22425768	322	103684	33386248
243	59049	14348907	283	80089	22665187	323	104329	33698267
244	59536	14526784	284	80656	22906304	324	104976	34012224
245	60025	14706125	285	81225	23149125	325	105625	34328125
246	60516	14886936	286	81796	23393656	326	106276	34645976
247	61009	15069223	287	82369	23639903	327	106929	34965783
248	61504	15252992	288	82944	23887872	328	107584	35287552
249	62001	15438249	289	83521	24137569	329	108241	35611289
250	62500	15625000	290	84100	24389000	330	108900	35937000
251	63001	15813251	291	84681	24642171	331	106561	36264691
252	63504	16003008	292	85264	24897088	332	110224	36594368
253	64009	16194277	293	85849	25153757	333	110889	36926037
254	64516	16387064	294	86436	25412184	334	111556	37259704
255	65025	16581375	295	87025	25672375	335	112225	37595375
256	65536	16777216	296	87616	25934336	336	112896	37933056
257	66049	16974593	297	88209	26198073	337	113569	38272753
258	66564	17173512	298	88804	26463592	338	114244	38614472
259	67081	17373979	299	89401	26730899	339	114921	38958219
260	67600	17576000	300	90000	27000000	340	115600	39304000
261	68121	17779581	301	90601	27270901	341	116281	39651821
262	68644	17984728	302	91204	27543608	342	116964	40001688
263	69169	18191447	303	91809	27818127	343	117649	40353607
264	69696	18399744	304	92416	28094464	344	118336	40707584
265	70225	18609625	305	93025	28372625	345	119025	41063625
266	70756	18821096	306	93636	28652616	346	119716	41421736
267	71289	19034163	307	94249	28934443	347	120409	41781923
268	71824	19248832	308	94864	29218112	348	121104	42144192
269	72361	19465109	309	95481	29503629	349	121801	42508549
270	72900	19683000	310	96100	29791000	350	122500	42875000
271	73441	19902511	311	96721	30080231	351	123201	43243551
272	73984	20123648	312	97344	30371328	352	123904	43614208
273	74529	20346417	313	97969	30664297	353	124609	43986977
274	75076	20570824	314	98596	30959144	354	125316	44361864
275	75625	20796875	315	99225	31255875	355	126025	44738875
276	76176	21024576	316	99856	31554496	356	126736	45118016
277	76729	21253933	317	100489	31855013	357	127449	45499293
278	77284	21484952	318	101124	32157432	358	128164	45882712
279	77841	21717639	319	101761	32461759	359	128881	46268279
280	78400	21952000	320	102400	32768000	360	129600	46656000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi
361	130321	47045881	401	160801	64481201	441	194481	85766121
362	131044	47437928	402	161604	64964808	442	195364	86350888
363	131769	47832147	403	162409	65450827	443	196249	86938307
364	132496	48228544	404	163216	65939264	444	197136	87528384
365	133225	48627125	405	164025	66430125	445	198025	88121125
366	133956	49027896	406	164836	66923416	446	198916	88716536
367	134689	49430863	407	165649	67419143	447	199809	89314623
368	135424	49836032	408	166464	67917312	448	200704	89915392
369	136161	50243409	409	167281	68417929	449	201601	90518849
370	136900	50653000	410	168100	68921000	450	202500	91125000
371	137641	51064811	411	168921	69426531	451	203401	91733851
372	138384	51478848	412	169744	69934528	452	204304	92345408
373	139129	51895117	413	170569	70444997	453	205209	92959677
374	139876	52313624	414	171396	70957944	454	206116	93576664
375	140625	52734375	415	172225	71473375	455	207025	94196375
376	141376	53157376	416	173056	71991296	456	207936	94818816
377	142129	53582633	417	173889	72511713	457	208849	95443993
378	142884	54010152	418	174724	73034632	458	209764	96071912
379	143641	54439939	419	175561	73560059	459	210681	96702579
380	144400	54872000	420	176400	74088000	460	211600	97336000
381	145161	55306341	421	177241	74618461	461	212521	97972181
382	145924	55742968	422	178084	75151448	462	213444	98611128
383	146689	56181887	423	178929	75686967	463	214369	99252847
384	147456	56623104	424	179776	76225024	464	215296	99897344
385	148225	57066625	425	180625	76765625	465	216225	100544625
386	148996	57512456	426	181476	77308776	466	217156	101194696
387	149769	57960603	427	182329	77854483	467	218089	101847563
388	150544	58411072	428	183184	78402752	468	219024	102503232
389	151321	58863869	429	184041	78953589	469	219961	103161709
390	152100	59319000	430	184900	79507000	470	220900	103823800
391	152881	59776471	431	185761	80062991	471	221841	104487111
392	153664	60236288	432	186624	80621568	472	222784	105154048
393	154449	60698457	433	187489	81182737	473	223729	105823817
394	155236	61162984	434	188356	81746504	474	224676	106496424
395	156025	61629875	435	189225	82312875	475	225625	107171875
396	156816	62099136	436	190096	82881856	476	226576	107850176
397	157609	62570773	437	190969	83453453	477	227529	108531333
398	158404	63044792	438	191844	84027672	478	228484	109215352
399	159201	63521199	439	192721	84604519	479	229441	109902239
400	160000	64000000	440	193600	85184000	480	230400	110592000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi	Radices	Quadrati	Cubi
481	231361	111284641	521	271441	141420761	561	314721	176558481
482	232324	111980168	522	272484	142236648	562	315844	177504328
483	233289	112678587	523	273529	143055667	563	316969	178453547
484	234256	113379904	524	274576	143877824	564	318096	179406144
485	235225	114084125	525	275625	144703125	565	319225	180362125
486	236196	114791256	526	276676	145531576	566	320356	181321496
487	237169	115501303	527	277729	146363183	567	321489	182284263
488	238144	116214272	528	278784	147197952	568	322624	183250432
489	239121	116930169	529	279841	148035889	569	323761	184220009
490	240100	117649000	530	280900	148877000	570	324900	185193000
491	241081	118370771	531	281961	149721291	571	326041	186169411
492	242064	119095488	532	283024	150568768	572	327184	187149248
493	243049	119823157	533	284089	151419437	573	328329	188131518
494	244036	120553784	534	285156	152273304	574	329476	189119224
495	245025	121287375	535	286225	153130375	575	330625	190109375
496	246016	122023936	536	287296	153990656	576	331776	191102976
497	247009	122763473	537	288369	154854153	577	332929	192100033
498	248004	123505992	538	289444	155720872	578	334084	193100552
499	249001	124251499	539	290521	156590819	579	335241	194104539
500	250000	125000000	540	291600	157464000	580	336400	195112000
501	251001	125751501	541	292681	158340421	581	337561	196122941
502	252004	126506008	542	293764	159220088	582	338724	197137368
503	253009	127263527	543	294849	160103007	583	339889	198155287
504	254016	128024064	544	295936	160989184	584	341056	199176704
505	255025	128787625	545	297025	161878625	585	342225	200201625
506	256036	129554216	546	298116	162771336	586	343396	201230056
507	257049	130323843	547	299209	163667323	587	344569	202262003
508	258064	131096512	548	300304	164566592	588	345744	203297472
509	259081	131872229	549	301401	165469149	589	346921	204336469
510	260100	132651000	550	302500	166375000	590	348100	205379000
511	261121	133432831	551	303601	167284151	591	349281	206425071
512	262144	134217728	552	304704	168196608	592	350464	207474688
513	263169	135005697	553	305809	169112377	593	351649	208527857
514	264196	135796744	554	306916	170031464	594	352836	209584584
515	265225	136590875	555	308025	170953875	595	354025	210644875
516	266256	137388096	556	309136	171879616	596	355216	211708736
517	267289	138188413	557	310249	172808693	597	356409	212776173
518	268324	138991832	558	311364	173741112	598	357604	213847192
519	269361	139798359	559	312481	174676879	599	358801	214921799
520	270400	140608000	560	313600	175616000	600	360000	216000000

Tabula Quadratorum, & cuborum.

Radices	Quadrati :	Cubi	Radices	Quadrati :	Cubi	Radices	Quadrati :	Cubi
601	361201	217081801	641	410881	263374721	681	463761	315821241
602	362404	218167208	642	412164	264609288	682	465124	317214568
603	363609	219256227	643	413449	265847707	683	466489	318611987
604	364816	220348864	644	414736	267089984	684	467856	320013504
605	366025	221445125	645	416025	268336125	685	469225	321419125
606	367236	222545016	646	417316	269586136	686	470596	322828856
607	368449	223648543	647	418609	270840023	687	471969	324242703
608	369664	224755712	648	419904	272097792	688	473344	325660672
609	370881	225866529	649	421201	273359449	689	474721	327082769
610	372100	226981000	650	422500	274625000	690	476100	328509000
611	373321	228099131	651	423801	275894451	691	477481	329939371
612	374544	229220928	652	425104	277167808	692	478864	331373888
613	375769	230346397	653	426409	278445077	693	480249	332812557
614	376996	231475544	654	427716	279726264	694	481636	334255384
615	378225	232608375	655	429025	281011375	695	483025	335702375
616	379456	233744896	656	430336	282300416	696	484416	337153536
617	380689	234885113	657	431649	283593393	697	485809	338608873
618	381924	236029032	658	432964	284890312	698	487204	340068392
619	383161	237176659	659	434281	286191179	699	488601	341532099
620	384400	238328000	660	435600	287496000	700	490000	343000000
621	385641	239483061	661	436921	288804781	701	491401	344472101
622	386884	240641848	662	438244	290117528	702	492804	345948408
623	388129	241804367	663	439569	291434247	703	494209	347428927
624	389376	242970624	664	440896	292754944	704	495616	348913664
625	390625	244140625	665	442225	294079625	705	497025	350402625
626	391876	245314376	666	443556	295408296	706	498436	351895816
627	393129	246491883	667	444889	296740963	707	499849	353393243
628	394384	247673152	668	446224	298077632	708	501264	354894912
629	395641	248858189	669	447561	299418309	709	502681	356400829
630	396900	250047000	670	448900	300763000	710	504100	357911000
631	398161	251239591	671	450241	302111711	711	505521	359425431
632	399424	252435968	672	451584	303464448	712	506944	360944128
633	400689	253636137	673	452929	304821217	713	508369	362467097
634	401956	254840104	674	454276	306182024	714	508796	363994344
635	403225	256047875	675	455625	307546875	715	511225	365525875
636	404496	257259456	676	456976	308915776	716	512656	367061696
637	405769	258474853	677	458329	310288733	717	514089	368601813
638	407044	259694072	678	459684	311665752	718	515524	370146232
639	408321	260917119	679	461041	313046839	719	516961	371694959
640	409600	262144000	680	462400	314432000	720	518400	373248000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati:	Cubi	Radices	Quadrati:	Cubi	Radices	Quadrati:	Cubi
721	519841	374805361	761	579121	440711081	801	641601	513922401
722	521284	376367048	762	580644	442450728	802	643204	515849608
723	522729	377933067	763	582169	444194947	803	644809	517781627
724	524176	379503424	764	583696	445943744	804	646416	519718464
725	525625	381078125	765	585225	447697125	805	648025	521660125
726	527076	382657176	766	586756	449455096	806	949636	523606616
727	528529	384240583	767	588289	451217663	807	651249	525557943
728	529984	385828352	768	589824	452984832	808	652864	527514112
729	531441	387420489	769	591361	454756609	809	654481	529475129
730	532900	389017000	770	592900	456533000	810	656100	531441000
731	534361	390617891	771	594441	458314011	811	657721	533411731
732	535824	392223168	772	595984	460099648	812	659344	535387328
733	537289	393832837	773	597529	461889917	813	660969	537367797
734	538756	395446904	774	599076	463684824	814	662596	539353144
735	940225	397065375	775	600625	465484375	815	664225	541343375
736	541696	398688256	776	602176	467288576	816	665856	543338496
737	543169	400315553	777	603729	469097433	817	667489	545338513
738	544644	401947272	778	605284	470910952	818	669124	547343432
739	546121	403583419	779	606841	472729139	819	670761	549353259
740	547600	405224000	780	608400	474552000	820	672400	551368000
741	549081	406869021	781	609961	476379541	821	674041	553387661
742	550564	408518488	782	611524	478211768	822	675684	555412248
743	552049	410172407	783	613089	480048687	823	677329	557441767
744	553536	411830784	784	614656	481860304	824	678976	559476224
745	555025	413493625	785	616225	483736625	825	680625	561515625
746	556516	415160936	786	617796	485587656	826	682276	563559976
747	558009	416832723	787	619369	487443403	827	683929	565609283
748	559504	418508992	788	620944	489303872	828	685584	567663552
749	561001	420189749	789	622521	491169069	829	687241	569722789
750	562500	421875000	790	624100	493039000	830	688900	571787000
751	564001	423564751	791	625681	494913671	831	690561	573856191
752	565504	425259008	792	627264	496793088	832	692224	575930368
753	567009	426957777	793	628849	498677257	833	693889	578009537
754	568516	428661064	794	630436	500566184	834	695556	580093704
755	570025	430368875	795	632025	502459875	835	697225	582182875
756	571536	432081216	796	633616	504358336	836	698896	584277056
757	573049	433798093	797	635209	506261573	837	700569	586376253
758	574564	435519512	798	636804	508169592	838	702244	588480472
759	576081	437245479	799	638401	510082399	839	703921	590589719
760	577600	438976000	800	640000	512000000	840	705600	592704000

Tabula Quadratorum, & cuborum.

Radices	Quadrati:	Cubi	Radices	Quadrati:	Cubi	Radices	Quadrati:	Cubi
841	707281	594823321	881	776161	683797841	921	848241	781229961
842	708964	596947688	882	777924	686128968	922	850084	783777448
843	710649	599077107	883	779689	688465387	923	851929	786330467
844	712336	601211584	884	781456	690807504	924	853776	788889024
845	714025	603351125	885	783225	693154125	925	855625	791453125
846	715716	605495736	886	784996	695506456	926	857476	794022776
847	717409	607645423	887	786769	697864103	927	859329	796597983
848	719104	609800192	888	788544	700227072	928	861184	799178752
849	720801	611960049	889	790321	702595369	929	863041	801765089
850	722500	614125000	890	792100	704969000	930	864900	804357000
851	724201	616295051	891	793881	707347971	931	866761	806954491
852	725904	618470208	892	795664	709732288	932	868624	809557568
853	727609	620650477	893	797449	712121957	933	870489	812166237
854	729316	622835864	894	799236	714516984	934	872356	814780504
855	731025	625026375	895	801025	716917375	935	874225	817400375
856	732736	627222016	896	802816	719323136	936	876096	820025856
857	734449	629422793	897	804609	721734273	937	877969	822656953
858	736164	631628712	898	806404	724150792	938	879844	825293672
859	737881	633839779	899	808201	726572699	939	881721	827936019
860	739600	636056000	900	810000	729000000	940	883600	830584000
861	741321	638277381	901	811801	731432701	941	885481	833237621
862	743044	640503928	902	813604	733870808	942	887364	835896888
863	744769	642735647	903	815409	736314327	943	889249	838561807
864	746496	644972554	904	817216	738763264	944	891136	841232384
865	748225	647214625	905	819025	741217625	945	893025	843908625
866	749956	649461896	906	820836	743677416	946	794916	846590536
867	751689	651714363	907	822649	746142643	947	896809	849278123
868	753424	653972032	908	824464	748613312	948	898704	851971392
869	755161	656234909	909	826281	751085429	949	900601	854670349
870	756900	658503000	910	828100	753571000	950	902500	857375000
871	758641	660776311	911	829921	756058031	951	904401	860085351
872	760384	663054848	912	831744	758550528	952	906304	862801408
873	762129	665338617	913	833569	761048497	953	908209	865523177
874	763876	667627624	914	835396	763551944	954	910116	868250664
875	765625	669921875	915	837225	766060875	955	912025	870983875
876	767376	672221376	916	839056	768575296	956	913936	873722816
877	769129	674526133	917	840889	771095213	957	915849	876467493
878	770884	676836152	918	842724	773620632	958	917764	879217912
879	772641	679151439	919	844561	776151559	959	919681	881974079
880	774400	681472000	920	846400	778688000	960	921600	88 736000

Tabula Quadratorum, & Cuborum.

Radices	Quadrati:	Cubi	Radices	Quadrati:	Cubi	Radices	Quadrati:	Cubi
961	923521	887503681	975	950625	926859375	989	978121	967361669
962	925444	890277128	976	952576	929714176	990	980100	970299000
963	927369	893056347	977	954529	932574833	991	982081	973242271
964	929296	895841344	978	956484	935441352	992	984064	976191488
965	931225	898632125	979	958441	938313739	993	986049	979146657
966	933156	901428696	980	960400	941192000	994	988036	982107784
967	935089	904231063	981	962361	944076141	995	990025	985074875
968	937024	907039232	982	964324	946966168	996	992016	988047936
969	938961	909853209	983	966289	949862087	997	994009	991026973
970	940900	912673000	984	968256	952763904	998	996004	994011992
971	942841	915498611	985	970225	955671625	999	998001	997002999
972	944784	918330048	986	972196	958585256	1000	1000000	1000000000
973	946729	921167317	987	974169	961504803			
974	948676	924010424	988	976144	964430272			

DE

DE DIFFERENTIIS QVADRATO-rum & cuborum, & de continuatione tabulæ eorundem.

QVONIAM quadrati numeri creantur per continuam additionem numerorum imparium, vt Arithmetici demonſtrant: fit vt differentia inter quemlibet quadratum, & proximè inſequentem ſit dupla radicis minoris, addita inſuper vnitate. Itaque duobus modis tabula quadratorum componi poteſt, & continuari. Vno modo, ſi omnes numeri impares ordine ponantur, initio ſumpto ab 1. Nam 1. dat primum quadratum 1. Et ex 1. & 3. fit ſecundus 4. cui ſi addatur ſequens impar 5. fit tertius 9. & ſi addatur impar ſequens 7. fit quartus quadratus 16. atque ita deinceps. Habet autem quilibet quadratus radicem tot vnitatum, quot numeri impares ipſum conficiunt. Vt quia ſolus impar 1. dat primum quadratum 1. propterea eius radix eſt 1. Deinde quia duo impares 1. & 3. conficiunt ſecundum quadratum 4. erit eius radix 2. Sic quia duodecim numeri impares 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. componunt quadratum 144. erit eius radix 12. & ſic de cæteris. Atq; in hũc modum ſi ſemper ſequens numerus impar adiiciatur ad quadratum præcedentem, conflatur ſequens numerus quadratus, continuabiturque tabula in infinitum: ſi tamen prius ſeries numerorum imparium continuetur. Radices ſerie numerorum naturali progrediuntur.

Differentia quadratorum

Compoſitio tabula quadratorum.

Numeri impares.	Quadrati.	Radices.
1	1	1
3	4	2
5	9	3
7	16	4
9	25	5
11	36	6
13	49	7
15	64	8
17	81	9
19	100	10
21	121	11
23	144	12

ALIO modo condi poterit tabula quadratorum, & in infinitum continuari, ſine numerorum imparium ſerie, ſi omnes radices ponantur ordine, vt in tabula vides. Cum enim primus quadratus ſit 1. cuius radix 1. ſi hæc radix duplicata, addita inſuper 1. addatur primo quadrato 1. fit ſecundus 4. cuius radix 2. Hæc duplicata; & inſuper addita 1. ſi adiiciatur ſecundo quadrato 4. fit tertius 9. cuius radix 3. quæ duplicata, & inſuper addita 1. facit 7. Si igitur addantur 7. ad quadratum 9. fit quartus quadratus 16. & ſic in infinitum.

NVMERI autem cubi gignuntur quoque ex additione numerorum imparium, hoc modo. Deſcripta ſerie imparium numerorum ab 1. incipientium, pri-

Generatio cuborum. mus 1. dat primum cubum 1. cuius radix 1. Duo deinde ſequentes 3. 5. coaceruati præbent ſecundum cubum 8. cuius radix 2. Tres inſequentes 7. 9. 11. exhibent tertium cubum 27. cuius radix 3. Atque eundem in modũ ſequentes quatuor impares conficiẽt quartum cubum, & inſequentes quinq; quintum, & ſic deinceps in infinitum. Quilibet autem cubus radicem habet tot vnitatum quot impares numeri coaceruati ipſum componunt.

Numeri impares.	Cubi	Radices.
1	1	1
3		
5	8	2
7		
9		
11	27	3
13		
15		
17		
19	64	4
21		
23		
25		
27		
29	125	5

PRODVCITVR quoq; cubus cuiuſcunque radicis, ſi ea radix in ſuum quadratum ducatur. Vt cubus radicis 16. eſt 4096. genitus ex radice 16. multiplicata in 256. quadratum eiuſdem radicis.

VERVM quia permoleſtum eſt, tam ſeriem numerorum imparium in tot terminis continuare, vt ex eorum additione omnes cubi generentur, vt dictum eſt, quã radices omnes per ſuos quadratos multiplicare; obſeruauit Ioan. Baptiſta Villalpandus noſtræ Societatis ſacerdos Theologus, ac Mathematicus egregius, cuius eruditionis in rebus Mathematicis ſpecimẽ præclarum extat in apparatu Vrbis, ac Templi Hieroſolymitani, præſertim verò in multiplici duarum mediarum proportionalium inter duas rectas inuentione, obſeruauit inquam pulcherrimam proprietatem cuborum numerorum, per quam differentiæ cuborum ordine ſine magna difficultate reperiuntur, quæ poſtea ordine ad cubos præcedentes additæ conficiunt cubos inſequentes. Res autem ſic ſe habet. In columna ſiniſtra ſcribatur progreſsio Arithmetica, quæ à 6. incipiat, & per 6. progrediatur. In ſecunda columna reponantur numeri, qui ex numeris primæ columnæ componuntur hac arte. Iuxta 6. ponatur 1. Deinde 7. qui numerus ex 1. & 6. conflatur. Poſt hæc numerus 19. ex 7. & 12. coaceruatus. Atque ita deinceps quilibet bini numeri primæ, ac ſecundæ columnæ ſimul additi conficient numerum inferiorem in ſecunda columna. In tertia deinde columna collocentur omnes cubi, qui per continuam additionem numerorum ſecundæ columnæ, quæ quidem differentias cuborum continet, colliguntur hac ratione. Primus cubus eſt 1. cui ſi addas ſequentem differentiam 7. facies ſecundum cubum 8. & addendo differentiam ſequentem 19. conflabis tertium cubum 27. & ita deinceps. Semper enim in tabella appoſita iuxta quemlibet cubum

Differentiæ cuborum quo modo reperiantur.

Conſtructio tabulæ cuborum.

bum ponitur differentia, qua à præcedenti cubo differt. In quarta denique columna ſcribantur ordine cuborum radices.

Progreſſio ſenarij.	Differẽtiæ cuborum.	Cubi.	Radices.
6	1	1	1
12	7	8	2
18	19	27	3
24	37	64	4
30	61	125	5
36	91	216	6
42	127	343	7
48	169	512	8
54	217	729	9
60	271	1000	10
66	331	1331	11
72	397	1728	12
78	469	2197	13
84	547	2744	14
90	631	3375	15
96	721	4096	16

EÆDEM differentiæ cuborum in ſecunda columna deſcriptæ inuenientur quoque hoc modo. Radicis propoſitæ quadratum triplicetur, addaturq; radix triplicata, atque inſuper 1. Conflatus enim numerus erit differentia, qua cubus propoſitæ radicis ab inſequenti cubo differt. Vt ſi deſideretur differentia inter cubum 216. radicis 6. & cubum proximè maiorem. Quadratum radicis 6. eſt 36. triplum eius eſt 108. cui ſi addatur triplum radicis, videlicet 18. & inſuper vnitas, conflabitur differentia 127. quæſita. Atque hoc modo, ſi continuentur differentiæ cuborum ope progreſsionis ſenarij, extẽdetur tabula cuborum, quantum libuerit. Sunt autem, vt vides, numeri progreſsionis ſenarij ſextupli radicum cuborum, ſinguli ſingularum. Vt 60. ſextuplus eſt radicis 10.

QVIA verò diximus, cubos gigni ex additione numerorum imparium, nimirùm primum eſſe 1. ſecundum ex duobus ſequentibus 3. 5. confici, & tertium ex tribus ſequentibus 7. 9. 11. &c. ita vt quilibet ex tot imparibus coaceruetur, quot vnitates in eius radice continentur; ſi curioſus quiſpiam noſſe deſideret,

Qui numeri impares datum cubum componant.

(quod ſcire non iniucundum eſt) quotnam ſint illi numeri impares propoſitum cubum componentes, hoc eſt, à quonam impari illi impares incipiant, & in quo deſinant, conſequetur id hoc artificio. Radix propoſiti cubi, ſi impar eſt, multiplicetur per ſemiſſem numeri proximè minoris, & duplo producti addatur 1. Numerus enim conflatus erit primus imparium quæſitorum. Quod ſi radix fuerit par, ducatur eius ſemiſsis in numerum proximè minorem radice, & duplo producti adiiciatur 1. Rurſus enim primus imparium, qui quæruntur, conficietur. Exempli gratia. Propoſitus ſit cubus 125. cuius radix 5. ac proinde ex quinque numeris imparibus coaceruatus. Duco radicem 5. quia eſt impar, in 2. ſemiſſem numeri 4. proximè minoris, efficioque 10. duplico. fiunt 20. & addita 1. fit primus imparium 21. Ergó quinque impares quæſiti ſunt. 21. 23. 25. 27. 29. qui in vnam ſummam collecti conſtituunt cubum 125. Rurſus datus ſit cubus 1728. cuius radix 12. ideoque ex 12. imparibus numeris coagmentatus, Semiſſem radicis, quia par eſt, nimirum 6. duco in 11. numerum proximè minorem radice, numerumq; productum 66. duplico, addoq; 1. Numerus enim compoſitus 133. erit primus 12. imparium, quos quærimus. Ergo omnes 12. erunt hi. 133. 135. 137. 139. 141. 143. 145. 147. 149. 151. 153. 155. conficientes cubum 1728.

Regula hæc ſic demonſtratur. Quando radix impar per ſemiſſem numeri proximè minoris multiplicatur, vel ſemiſsis radicis paris per numerum proximè minorem radice, producitur ſumma terminorum ſeriei naturalis numerorum ab 1. vſque ad numerum proximè minorem radice, vt in progreſsione Arithmetica diximus, hoc eſt, numerus terminorum imparium, qui primum imparem quæſitum præcedunt in ſerie numerorum imparium; cum primus ſit vnus, deinde ſequantur duo, poſtea tres, &c. Igitur ea ſumma indicat, quotum locum occupet impar numerus imparem quæſitum antecedens: quia verò is locus duplicatus, dempta 1. ex duplo, exhibet vltimum illum imparem, ſi ad eundem duplicatum addatur 1. efficietur primus imparium quæſitorum. Verbi gratia, ſi quæratur primus ſeptem imparium, qui conficiunt cubum 343. cuius radix 7. quærimus prius ſummam 6. terminorum ſeriei naturalis, quæ eſt 21. quod fit, ſi ad 6. addo 1. & ſummam 7. id eſt, radicem imparem, ducam in 3. ſemiſſem 6. terminorum. Igitur impar numerus præcedens primum quæſitum ponitur in 21. loco. Duplico, addoq; 1. fit primus impar quæſitus 43. Sunt ergo ſeptem quæſiti 43. 45. 47. 49. 51. 53. 55. qui conſtituunt cubum 343.

Sed vt certi ſimus, quando radix eſt magna, num primus imparium rectè ſit inuentus, ne cogamur omnes impares cõtinuare, quod laborioſum eſt, inueſtigabimus vltimum ex primo, deinde ſummam omnium, hoc modo. Differentiam progreſsionis numerorum imparium, nimirum 2. ducemus in numerum terminorum, minus vno, productumq; primo inuento addemus. Conflatus enim numerus erit poſtremus imparium quæſitorum. Si igitur ad hunc apponamus primum, & ſummæ ſemiſſem in numerum terminorum, id eſt, in radicem cubi propoſiti ducamus, producetur propoſitus cubus, ſi primus imparium rectè inuentus eſt. Vt in proximo cubo 343. cuius radix 7. ſi ad 43. primum imparem inuentum addamus 12. numerum ſcilicet productum ex 2. in radicẽ 7. minus vno, fit ſeptimus numerus impar quæſitus 55. ad quem ſi apponatur primus 43. fiunt 98. Et ſi huius numeri ſemiſsis 49. ducatur in radicẽ 7. producetur cub⁹ 343. &c.

Alia etiam ratione perfacili eoſdem numeros impares datum cubum componen-

ponentes reperiemus hoc modo. Sit datus cubus 117649. cuius radix 49. ac proinde reperiendi 49. numeri impares, quorum ſumma ſit 117649. Ponamus primum imparem eſſe 1. ℞. id eſt, 1. Radicem (vt in Algebra fieri ſolet) Et quia differentia numerorum imparium eſt 2. erit ſecundus impar 1. ℞. † 2. hoc eſt, 1. ℞. plus 2. tertius 1. ℞. † 4. Et ne cogamur continuare omnes 49. terminos, ducemus differentiam 2. in 48. numerum terminorum, minus vno, & ad productum 96. addemus primum, quem poſuimus eſſe 1. ℞. Ita enim fiet vltimus terminus quæſitus 1. ℞. † 96. cui ſi addamus primum, videlicet 1. ℞. fit ſumma 2. ℞. † 96. cuius ſemiſsis 1. ℞. † 48. ducta in 49. numerum terminorum, facit numerum 49. ℞. † 2352. qui æquatur cubo propoſito 117649. Ablatis ergo vtrinque 2352. remanebunt 49. ℞. æquales numero 115297. quo diuiſo per 49. fit Quotiens 2353. pro primo impari quæſito. quod vt probemus, ducemus differentiam imparium, nimirum 2. in 48. numerum terminorum, minus vno, productumque 96. primo 2353. addemus, vt conficiamus vltimũ terminum 2449. Deinde primum huic adijciemus, & ſummæ 4802. ſemiſſem 2401. in 49. numerum terminorum ducemus, procreabiturque numerus 117649. qui dato cubo æqualis eſt. Recte ergo primus impar inuentus eſt.

VSVS PRÆCEDENTIS TABVLÆ quadratorum, & cuborum in radicibus extrahendis.

INTER alias vtilitates habet ſuperior tabula quadratorum, & cuborum egregium vſum in radicibus quadratis, & cubicis extrahendis; quippe cum per eam ſtatim expediantur tria prima puncta ad ſiniſtram, ſimulque tres figuræ radicis inueniantur: quod vno, aut altero exemplo planum fiet.

SIT primum extrahenda radix quadrata ex appoſito numero. Primum

1 1 7 6 8 9 0 1 4 5 (3 4 3 0 5.

quæro inter quadratos numerum 117689. trium punctorum, quem quia non inuenio, capio proximè minorem quadratum 117649. eiuſque radicem 343. in Quotiente pono. Inuento autem quadrato ſubtracto ex numero 117689. trium punctorum, remanent 40. Ergo ſequens punctum erit 4001. quo (relicta figura 1.) diuiſo per 686. duplum radicis inuentæ, reperitur Quotiens 0. eritque vltimum punctum 400145. quo (relicta etiam figura 5.) diuiſo per 6860. duplum radicis inuentæ, inuenitur Quotiens 5. Eſt ergo tota radix 34305 $\frac{57120}{68611}$.

SIT deinde ex appoſito numero extrahenda radix cubica. Primum inter

4 2 5 0 9 5 4 9 6 1 3 0 7 (1 6 1 9 9

cubos quæro numerum 4250954. trium primorũ punctorum, quem quia non reperio, accipio cubum proxime minorem 4173281. cum ſua radice 161. qui cubus ex tribus punctis ſubtractus relinquit 77673. ita vt ſequens punctum ſit 77673961.

PARO ergo diuiſorem, vt lib. 6. ad finem propoſ. 19. docuimus, multipli-

 cando

cando radicis inuentæ quadratum ex eadem tabula excerptum, nimirum 25921. per 300. qui erit 7776300. per quem ſi meum punctum diuido, reperio Quotiẽtem 9. & facta operatione remanent 7295302. adeo vt vltimum punctum ſit 7295302307

DENIQVE paro nouum diuiſorem, multiplicando radicis 1619. inuentæ quadratum 2621161. per 300. qui erit 786348300. per quem ſi vltimum meum punctum diuido, inuenio Quotientem 9. Facta autem operatione, remanent 214232708. abſolutaque eſt extractio.

NEQVE vero negligendum videtur non inutile compendium in extractione cubica. quod eſt eiuſmodi. Quando nouus diuiſor parandus eſt, ne cogamur totius radicis inuentæ quadratum ſupputare, diuidemus radicem inuentam in duas partes, ita vt vna pars ſit vltima figura Quotientis inuenta, nimirum inuenta quarta figura 9. in dato exemplo, partiemur radicem inuentam 1619. in 1610. & 9. quas partes bis ſcribemus, vt in appoſita formula vides. Si igitur ſingulas partes in ſingulas partes ducemus, producetur quadratus quæſitus radicis 1619. vt ad propoſ. 1. lib. 2. Euclid. demonſtrauimus. Verbi gratia quia præcedens

1610. 9.
1610. 9.

quadratum numeri 161. fuit 25921. appoſitis duabus cifris, habebimus productum 2592100. ex 1610. in 1610. cui ſi addemus 14490. bis numerum videlicet productum ex 1610. in 9. vel ex 9. in 1610. & inſuper 81. productum ex 9. in 9. conficiemus 2621161. quadratum radicis inuentæ 1619. Eadem ratione ſi huius numeri 16199. quadratum deſideremus, diuidemus eum in 16190. 9. bis, vt in hac formula vides. Deinde quia iam quadratum habuimus 2621161. numeri 1619. appoſitis duabus cifris, habebimus 262116100. quadratum numeri 16190. cui ſi addemus 145710. bis, productum videlicet ex 16190. in 9. vel ex 9. in 16190. &

16190. 9.
16190. 9.

inſuper 81 productum ex 9. in 9. efficiemus 262407601. quadratum numeri 16199. & ſic de cæteris. Hoc ergo compendium reddet faciliorem cubicæ radicis extractionem, cum ſemper præcedentis radicis inuentæ quadratum habeamus, & appoſitis duabus cifris, quadratum conficiamus eiuſdem radicis, appoſita ei vna cifra, &c.

BENE autem vides, ſi tabula ſuperior extenderetur, vt haberentur quadrati, & cubi radicum 4. aut 5. figurarum, multo faciliorem effici extractionem radicum. Sed quia tabula excreſceret hac ratione in immenſum, contenti fuimus tabula, in qua radices habent 3. figuras ad ſummum, cum eã quilibet ex ijs, quæ diximus, extendere poſsit, & continuare.

FINIS LIBRI OCTAVI.

ALPHA-

INDEX.
ALPHABETICUS RERUM, AC VERBORUM.

A.

ACCLIVIUM diſtantiã mõtis à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſitæ, etiam non viſam, vnà cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, propè verum, beneficio quadrati efficere cognitam. 132

Acliuem montis aſcenſum à loco menſoris vſq; ad baſem altitudinis monti impoſitæ, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum, beneficio quadrantis notum efficere. 79

Aceruus tritici, quo pacto menſuretur. 209

Ædificij cuiuſcumq; ad perpendiculum erecti, vel putei profunditatem, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadrantem reperire. 80

Ædificij cuiuſuis ad perpendiculum erecti, vel putei profunditatem, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadratũ efficere cognitam. 134

Æquilateri trianguli area. 166

Agri, campi, aut vrbis, vel regionis ſitũ in plano deſcribere. 148

Agro propoſito figuram ſimilem in charta deſcribere. 172

Alberti Dureri quadratura circuli per numeros falſa eſt. 318

Aliquota partes ſimiles plurium magnitudinũ eandem habent proportionem. 218

Altera parte longioris area. 158

Altimetra ſcala quid. 85

Altitudinem ad cuius baſem pateat acceſſus beneficio ſpeculi plani, vnà cum diſtantia ſpeculi à cacumine altitudinis deprehendere. 144

Altitudinem, cuius baſis impoſita ſit monti, vel alteri cuipiã altitudini, & vtraque illius extremitas cerni poſſit, etiamſi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiuſdem puncti infimi diſtantia à loco menſoris cognita nõ ſit, per quadratum ex valle, aut ex plano Horizontis explorare. 131

Altitudinem cuiuslibet rei erectæ, per eius diſtantiam ab oculo menſoris, beneficio quadrati conijcere. 108

Altitudinẽ cuiuslibet rei erectæ, et ſi ei9 diſtantia ab oculo menſoris neq; data ſit, neq; inuenta, per duas ſtationes in plano factas, auxilio quadrati patefacere. 107

Altitudinem cuius baſis impoſita ſit alteri altitudini, & vtraque illius extremitas cerni poſſit, etiamſi infimum punctum alterius, cui imponitur, lateat, & eiuſdẽ puncti infimi diſtantia à loco menſoris cognita non ſit, per quadrantẽ ex valle, aut ex plano Horizontis explorare. 77

Altitudinẽ cuiuſq; rei erectæ, ex eius vmbra, quam Sole lucente proijcit, ſi nota fuerit, per quadratũ deprehendere. 140

Altitudinem inacceſſibilem beneficio ſpeculi plani, vna cum ſpeculi diſtantia tam à baſe etiam non viſa, quam a cacumine altitudinis, cognoſcere. 145

Altitudinem inacceſſibilem, quando neq; diſtantia à loco menſoris ad eius baſem nota eſt, neq; è directo ipſius duæ ſtationes in plano fieri poſſunt, neque denique baſis apparet, per quadrantem notam reddere. Atque hinc obiter ipſam quoque diſtantiam elicere. 72

Altitudinem inacceſſibilem, cuius baſis nõ videatur, & ad quam per nullum ſpatium ſecundum lineam rectam accedere poſſimus, aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolũ ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis appareat, per quadrantẽ explorare. 72

Altitudinem inacceſſibilem, cuius baſis non videatur, & ad quã per nullũ ſpatiũ ſecundũ rectã lineã accedere poſſit

menſor, aut recedere, vt duæ ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis cernatur, per quadratum explorare. 129

Altitudinem inacceſſibilem, quando diſtantia à loco menſoris ad baſem altitudinis ignota eſt, per duas ſtationes in plano factas per quadrantem dimetiri. Atque hinc diſtantiam quoq; ipſam eruere, etiamſi extremus eius terminus non cernatur. 57

Altitudinem maiorem ex minori incognita, ſi tamen baſis maioris cerni poſſit, per quadratum venari. 130

Altitudinem maiorem ex minori cognita, etiamſi ſolum maioris vertex cernatur, per quadratum efficere notam. 129

Altitudinem maiorem ex minori cognita, per duas ſtationes in ſummitate, vel in duabus feneſtris factas, etiamſi ſolum maioris altitudinis vertex cernatur, per quadrantem adinuenire. Atq; hinc diſtantiam quoq; inter altitudines colligere. 74

Altitudinem maiorem ex minori incognita, dummodo baſis maioris cerni poſſit, per quadrantem perſcrutari. 75

Altitudinem minorem ex maiori cognita, licet baſis minoris cerni non poſſit, per quadratum ſcrutari. 130

Altitudinem minorem ex maiori incognita, dummodo baſis minoris appareat, per quadratum elicere. 130

Altitudinem minorem ex maiori cognita, licet baſis minoris non cerni poſſit, ope quadrantis peruestigare. Atq; hinc diſtantiam quoq; inter altitudines duas eruere. 76

Altitudinem minorem ex maiori incognita, dummodo baſis minoris videri poſſit, per quadrantem explorare. Atque hinc diſtantiam quoque inter duas altitudines conijcere. 76

Altitudinem montis, vel turris ex eius faſtigio, quando è directo menſoris interuallum aliquod inter duo ſigna vel etiam inter ſignū quodpiam ac turrim cognitum eſt, per quadratū conijcere. 123

Altitudinē montis, aut turris ex eius vertice per duas ſtationes in eiuſdem ſummitate factas, è quibus ſignum aliquod in Horizonte appareat, per quadrantē dimetiri. Atq; hinc ipſam quoq; diſtantiam à turris baſe, vel perpendiculo montis ad ſignum illud inueſtigare. 59

Altitudinem monti impoſitam, ſi modo altitudinis baſis poſſit conſpici: vel portionem ſuperiorem alicuius turris, beneficio ſpeculi plani efficere notam. 146

Altitudinem montis metiri per quadrantem. 57. & 59

Altitudinem montis, aut turris ex eius vertice per duas ſtationes in haſta aliqua erecta, vel in duabus feneſtris turris, quarum vna ſupra aliam exiſtat, factas, è quibus ſignū aliquod in Horizonte videri poſſit, per quadrantem metiri. Atq; hinc diſtātiā quoq; à ꝑpēdiculo mōtis vel turris, vſq; ad ſignū viſū cognoſcere. 62

Altitudinē montis, aut turris ex eius vertice per quadrantem metiri, ſi in plano, cui inſiſtit, ſpatiū aliquod è directo mēſoris notum ſit, deprehendere. 64

Altitudinē per vnicā ſtationē metiri ꝑ quadrantē, quando diſtantia nota eſt. 56

Altitudo pyramidum, in quas corpora regularia è centris reſoluuntur. 214

Altitudinem propoſitā ſingulari quodam modo inueſtigare. 108. & 109

Altitudinem propoſitam, eiuſq; diſtantiam ab oculo menſoris, vnà cum hypotenuſa ab oculo ad faſtigium altitudinis extēſa, venari ope quadrati ſtabilis per vnicam ſtationem, etiamſi ſolum faſtigiū rei erectæ cernatur. 112

Altitudinem propoſitam, quando diſtantia ab oculo menſoris neq; data eſt, neq; inuenta, neque è directo altitudinis duæ ſtationes in aliqua haſta erecta factas, per quadratum indagare. 111

Altitudo quādo maior ſit, quā diſtātia, & quando æqualis, & quando minor. 140

Altitudinem Solis, vel ſtellæ cuiuſuis per quadratum obſeruare. 87

Altitudi-

Altitudinem turris, aut alterius rei per baculum indagare. 137
Altitudinem turris vel mõtis ex eius ſummitate per vnicam ſtationem, ope quadrati ſtabilis metiri, vna cum diſtantia ſigni in Horizonte viſi vſq; ad turrem, vel montis perpendiculum. 118
Altitudinem turris ex eius vertice per vnicam ſtationem per quadrantem metiri, ſi diſtantia ſigni in Horizonte viſi vſq; ad baſem turris nota ſit. 64
Altitudinẽ turris, aut montis, ex eius ſummitate per quadratum dimetiri, quando in plano ſummitatis Horizonti æquidiſtante duæ ſtationes fieri poſſunt, & ſignũ aliquod in Horizonte cernitur. 114
Altitudinẽ turris, vel montis ex eius ſummitate per duas ſtationes in haſta aliqua erecta factas, inueſtigare per quadratum, quando ſignum aliquod in Horizonte videri poteſt. 116
Altitudinem turris, aut alterius rei, per Normam inueſtigare. 138
Altitudinis portionem ex minore altitudine, & minoris portionem ex maiore, per quadratum percipere. 131
Altitudinis maioris portionem ex minori altitudine, & minoris portionem ex maiori per quadrantem cognoſcere. 76
Altitudinis minoris portionem ex minore altitudine, & maioris portionem ex minore, per quadratum elicere. 131
Ambitum terræ ex edito aliquo monte metiri. 366
Anguli quantitas, quem latera inſtrumẽti partium continent, quo pacto cognoſcatur. 11
Angulorum, & linearum quarundam mechanicam me[illegible]rationem admittendam eſſe. 169
Angulos duos trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis cõprehenſo, reperire. 48
Angulos duos trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo vni eorum oppoſito, (ſi modo conſtet ſpecies anguli alteri lateri oppoſiti, quando datus angulus acutus eſt) expiſcari. 48
Angulos omnes tres trianguli obliquanguli ex omnibus tribus lateribus peruestigare. 49
Angulum acutum trianguli rectanguli ex baſe, & vno latere inquirere. 46
Angulum acutum trianguli rectanguli ex vtroq; latere reddere cognitum. 46
Angulum rectilineum datum in tres æquales angulos diuidere. 356
Angulus incidentiæ cur angulo reflexionis ſit æqualis. 341
Angulus obſeruationis quis. 52
Angulus, quem filum cum proximo quadrati latere facit, quando offerat altitudinem Solis, vel ſtellæ, & quando complementum altitudinis. 88
Arabum quadratura circuli per numeros falſa eſt. 318
Arcus circuli ad arcum ſimilẽ alterius circuli eſt, vt chorda ad chordã & cõtra. 397
Arcus datorum grad. ac Min. quo pacto ex circulo quouis ope inſtrumenti partium abſcindantur. 9. & 10
Area altera parte longioris. 158
Area campi, intra quem lacus, vel ſylua exiſtat. 172
Area campi, quando in triangula reſolui non poteſt, 171
Area circuli accuratior. 198
Area circuli cui triangulo rectangulo ſit æqualis, ſecundum Archimedem. 182
Area circuli æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & ſemiſſe circumferentiæ circuli. 294
Area circuli tribus viis, ex cognita diametro, & circumferentia. 192
Area Conoidis Hyperbolici. 233
Area Conoidis parabolici. 233
Area corporis planis ſuperficiebus contenti, & circa ſphæram circumſcriptibilis, cui ſolido rectangulo ſit æqualis. 307
Area corporum omnino irregularium, quæ. 234
Area cuiuslibet portionis ſphæræ. 231
Area cuiuſuis figuræ pulchra inuentio. 173

Area cuiuslibet trianguli cui rectangulo ſit æqualis. 292
Area datæ Ellipſis. 203
Area datæ parabolæ. 203
Area doliorum. 233
Area figuræ lenticularis. 200
Area figuræ quadrilateræ omnino irregularis. 170
Area figuræ ex variis circulorum ſegmentis cogmentatæ. 200
Area figuræ regularis, cuius latus eſt vnitas, quo pacto inueniatur. 180
Area figuræ regularis, cui rectãgulo æqualis ſit. 293
Area figuræ regularis, quo pacto ex area alterius figuræ ſimilis cognita eruatur. 179
Area figuræ regularis, cui triangulo rectangulo ſit æqualis. 294
Area figurarũ regulariũ à triãgulo vſq; ad Dodecagonũ, quãdo latus eſt vnitas. 180
Area fruſti pyramidis, & coni. 208
Area fruſti ſphæræ. 231
Aream circuli vera maiorem ex diametro inueſtigare. 197
Aream circuli vera minorem, ex circumferentia concludere. 197
Aream circuli vera maiorem, ex diametro colligere. 197
Aream circuli vera maiorem, ex circumferentia inferre. 197
Areã figuræ Ellipſi ſimilis, quæ circino deſcribitur, inquirere. 375
Area multilateræ figuræ irregularis q. 171
Area parallelogrammorum. 170
Area parallelepipedorum, Priſmatum, & cylindrorum. 204
Area portionum ſphæroidis. 232
Area pyramidis cui ſolido rectangulo ſit æqualis. 307
Area pyramidum, & conorum. 206
Area quadrati. 158
Area quadrilaterorum non rectangulorum. 169
Area quinque corporum regularium quæ. 210. & 214
Area rectangulorum. 158
Area regularium figurarum. 175
Area Rhombi, & Rhomboidis. 169
Area ſectoris circuli. 199
Area ſemicirculi, quadrantis, octauæ partis, &c. 193
Area ſegmentorum circuli. 199
Area ſegmentorum ſphæræ. 229
Area ſphæræ vera minor, ex diametro circuli maximi. 228
Area ſphæræ vera maior, ex circumferentia maximi circuli. 228
Area ſphæræ vera minor, ex circumferentia circuli maximi. 228
Area ſphæræ vera maior, ex diametro circuli maximi. 228
Area ſphæræ æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & tertia parte ſuperficiei conuexæ. 229
Area ſphæræ, & ſuperficies eiuſdem conuexa. 218. & 223
Area, vel ſoliditas ſectoris ſphæræ. 230
Area, vel ſoliditas hemiſphærij. 230
Area ſphæroidis. 232
Area trapezij nulla habentis latera parallela. 170
Area trapezij habentis duo latera parallela. 170
Area triangulorum. 158. & 161
Area trianguli rectanguli. 165
Area trianguli rectanguli, ex vno latere circa angulum rectum, & vno angulo acuto. 168
Area trianguli rectanguli, ex vno latere circa angulum rectum, & latere quod recto angulo opponitur. 168
Area trianguli rectanguli, ex latere, quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto. 167
Area trianguli Iſoſcelis. 165
Area trianguli æquilateri. 166
Area trianguli obliquanguli, ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo. 168
Area trianguli obliquanguli, ex vno latere, ac duobus angulis. 168
Area vaſis excauati. 209
Arundinis, vel baculi beneficio diſtantiã

propoſitam metiri. 99

Aſcenſum acclivem montis à loco menſoris vſq; ad baſem altitudinis monti impoſita, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum, beneficio quadrantis efficere cognitum. 79

B

BAculi beneficio diſtantiam inter pedes menſoris, & ſignum aliquod in plano Horizontis metiri, quando extremus terminus diſtantiæ videri poteſt. 137

Baculi beneficio turrim, aut alterius rei altitudinem metiri. 137

Baculi, aut arundinis beneficio diſtantiam propoſitam metiri. 99

Baſem trianguli rectanguli ex vno latere, & vno angulo acuto inueſtigare. 45

Baſem trianguli rectanguli ex vtroque latere perſcrutari. 45

Baſis quadratricis, ſemidiameter quadrãtis, & quadrans ſunt continue proportionales. 324

C

CAmpano aſſcripta circuli quadratura per lineas falſa eſt. 318

Campi, agriue, aut vrbis, vel regionis ſitum in plano deſcribere. 148

Campi area, quando in triangula reſolui non poteſt. 172

Campi, intra quem lacus, vel ſylua exiſtat, area. 172

Campo propoſito figuram in charta ſimilẽ deſcribere. 172

Centeſima, vel milleſima partes in quauis recta linea quo pacto capiantur, ope inſtrumenti partium. 6

Chorda alicuius arcus data, vna cum perpendiculari ex medio eius puncto ad arcum educta; quot gradus, vel palmos tam arcus, quam ſemidiameter complectitur, inuenire. 253

Circuli pulcherrima proprietas. 358

Circuli quadraturam eſſe poſſibilem. 320

Circuli quadratura per Hyppocratem Chium falſa eſt. 319

Circuli quadratura per lineas Campano aſſcripta falſa eſt. 318

Circuli quadratura per numeros ſecundũ Arabes falſa eſt. 318

Circuli quadratura per numeros ex Alberto Durero falſa eſt. 318

Circuli quadratura per lineas. 317

Circuli area tribus viis, ex cognita diametro, & circumferentia. 192

Circuli area accuratior. 198

Circuli aream vera maiorem, ex diametro inueſtigare. 197

Circuli aream vera minorem, ex diametro colligere. 197

Circuli aream vera minorem, ex circumferentia inferre. 197

Circuli aream vera maiorem, ex circumferentia concludere. 197

Circuli area cui triangulo rectangulo ſit æqualis, ſecundum Archimedis doctrinam. 182

Circuli area æqualis eſt rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & ſemiſſe circumferentiæ circuli. 294

Circuli dimenſio ex Archimede. 181

Circuli diameter quam proportionem habeat ad peripheriam, ſecundum Archimedem. 185

Circuli diameter in numeris ex dato arcu. 201

Circuli diameter ex data peripheria, & peripheria ex data diametro accuratior. 198

Circuli diametrum vera maiorem ex data circumferentia indagare. 194

Circuli diametrum vera minorem ex data peripheria inueſtigare. 194

Circuli diameter ducta in $3\frac{1}{7}$. gignit numerum maiorem circumferentia. 191

Circuli peripheria, ac diameter, ex eius area. 201

Circuli peripheria ex data diametro, & diameter ex data peripheria accuratior. 198

Circuli peripheria quam proportionẽ habeat ad diametrum, ſecundum Archimedem. 185

Circuli peripheria diuiſa per $3\frac{1}{7}$ facit numerum

merum minorem diametro. 191
Circuli peripheriam vera maiorem, ex da tu diametro reperire. 193
Circuli peripheriam vera minorem, ex da tu diametro elicere. 193
Circuli parti octaua, decimaſexta &c. rectangulum conſtituere Iſoperimetrum, & æquale. 214
Circuli ſectoris area. 199
Circulo figuram rectilineam æqualem, & alteri ſimilem conſtituere. 329
Circulo dato quadratum æquale conſtituere. 327
Circulo quadratũ æquale quo pacto facile exhibeatur ex propria figura. 327
Circulorum peripheria inter ſe ſunt, vt diametri. 195. & 336
Circulorũ duorũ, vel figurarum ſimilium proportio, ex datis diametris circũferentiisue, vel duob. laterib. homologis. 201
Circulorum diametri inter ſe ſunt, vt circumferentiæ. 194. & 336
Circulũ quadrato æqualẽ deſcribere. 329
Circulum, vel figuram planam rectilineam, in data proportione augere vel minuere. 272
Circulum cuilibet figuræ rectilineæ æqualem deſcribere. 329
Circulum per tria puncta deſcribere, inuẽtis nimirum aliis punctis, per quæ tranſire debet. 344
Circulum pluribus circulis, quorum diametri, vel circumferentiæ datæ ſint, æqualem: Et figuram ſimilem pluribus figuris ſimilibus, quarum latera homologa data ſint, æqualem deſcribere. 202
Circulus ad quadratum diametri proportionem habet. quam 11. ad 14 proxime, ſecundum Archimedem. 191
Circulus ad quadratum circumferentiæ maiorẽ proportionẽ habet, quam 7. ad 88. minorẽ vero, quam 71. ad 892. 196
Circulus omnibus figuris rectilineis regularibus ſibi Iſoperimetris maior eſt. 306
Circulus omnium figurarum rectilinearũ ſibi Iſoperimetrarũ maxim⁹ eſt. 306
Circulus ad quadratum diametri maiorẽ proportionem habet, quam 223. ad 284 minorẽ vero, quam 11. ad 14 196
Circumferentia circuli ad diametrũ proportio accuratior, quæ. 198
Compendium pulchrum in longitudinibus metiendis p quadratum ſtabile. 98
Conchoideos lineæ deſcriptio, eiuſque duæ proprietates inſignes. 270
Coni, & cylindri ſuperficies conuexa. 235
Conicæ ſuperficiei proportio ad ſuam baſem. 235
Conoidis Hyperbolici ſoliditas. 233
Cono, cylindro priſmati, ac pyramidi cubũ æqualem efficere. 369
Cono, vel pyramidi æqualem cylindrum, aut priſma ſub eadem altitudine: Et contra cylindro, vel priſmati æqualem conum, aut pyramidem ſub eadem altitudine conſtituere. 368
Conoidis parabolici ſoliditas. 232
Conorum, ac pyramidum area. 206
Conſtructio tabulæ Gnomonicæ faciliſſima, eiuſque vſus. 89
Conſtructio & vſus tabellæ pro minutis, & ſecundis. 18
Conſtructio & vſus tabulæ p minutis, & ſec. cognoſcendis ex quadrante. 20
Conſtructio quadrantis ad min. & ſec. cognoſcenda. 15
Conſtructio quadrati Geometrici. 84
Conſtructio pinnacidiorum pro radio viſuali. 17
Conſtructio regulæ loco filij cum perpendiculo. 17
Conſtructio inſtrumenti partium. 4. & 13
Conum, ac pyramidem in cylindrum, & priſma: Item priſma, & cylindrum in conũ, ac pyramidem transmutare. 368
Conum, cylindrũ, priſma, ac pyramidem inæqualẽ ſub data altitudine, & ſupra baſem quotuis angulorũ reuocare. 369
Conum, cylindrum, priſma, ac pyramidem in parallelepipedum æquale datæ altitudinis vel baſis commutare. 368
Conũ datæ ſphæræ cõſtituere æqualem. 371
Conũ pyramidi, & cylindrum priſmati æqualem: Ac viciſſim pyramidem cono æqualem.

æqualem, & priſma cylindro æquale conſtituere. 368
Conum, pyramidem, priſma, & cylindrum in parallelepipedum ſupra baſem quadratum conuertere. 369
Corpori regulari ſphæram æqualem exhibere. 371
Corporum quinque regularium ſuperficies conuexa. 214
Corporum quinque regularium area quæ. 210. & 214
Corporum omnino irregularium area. 234
Corpus regulare quoduis dato cubo æquale conſtituere. 372
Corpus planis ſuperficiebus contentum, & circa ſphæram circumſcriptibile, cui ſolido rectangulo ſit æquale. 307
Cubicam, & quadratam radicem in numeris non quadratis, & non cubis per lineas Geometricè inuenire. 290
Cubicæ radicis extractio. 281
Cubicæ & quadratæ radicis extractio ex data minutia. 287
Cubo dato corpus regulare quodcunque æquale conſtruere. 372
Cubo dato parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel ſupra datam baſem, æquale conſtituere. 270
Cuborum differentiæ quo pacto reperiantur. 388
Cuborum, & quadratorum tabula vſque ad radicem 1000. 378
Cuborum generatio. 388
Cubum cylindro, priſmati, cono, ac pyramidi æqualem conſtruere. 370
Cubum datæ ſphæræ æqualem: Et ſphæram dato cubo æqualem efficere. 370
Cubum datum aut parallelepipedum in datam proportionem ſecare. 373
Cubum duobus, aut pluribus cubis æqualem conſtruere. 372
Cubum minorem ex maiori detrahere reſiduumq́; in cubum conuertere. 373
Cubum parallelepipedo rectangulo æqualem conſtruere. 369
Cubum ſolidis quotlibet æqualem conſtituere. 372
Cubus alterutrius mediarum proportionalium inter duas rectas, æqualis eſt parallelepipedo ſub quadrato extremæ propè mediam aſſumptum & altera extrema comprehenſo. 275
Cubus diametri ſphæræ ad ſphæram, maiorem proportionem habet, quam 21. ad 11. minorem vero, quã 426. ad 223. 222
Cubus circumferentiæ maximi circuli in ſphæra ad ſphæram, maiorem proportionem habet, quam 298374. ad 5041. minorem autem, quam 2904. ad 49. 221
Cylindri, & coni ſuperficies conuexa. 235
Cylindrica ſuperficies, demptis baſibus. 235
Cylindrorum, priſmatum, ac parallelepipedorum area. 205
Cylindro, aut priſmati æqualem conum, vel pyramidem ſub eadem altitudine; Et viciſſim cono, vel pyramidi æqualem cylindrum, aut priſma eiuſdem altitudinis conſtituere. 368
Cylindro priſmati, cono, ac pyramidi cubũ æqualem conſtituere. 369
Cylindrum datæ ſphæræ conſtituere æqualem. 370
Cylindrum, ac priſma in pyramidem, & conum: Item conum, ac pyramidem in cylindrum, vel priſma æquale tranſmutare. 368
Cylindrum, aut priſma datum in proportionem datam diuidere. 373
Cylindrum, conum, priſma, ac pyramidem in parallelepipedũ rectangulum æquale datæ altitudinis, vel baſis cõmutare. 370
Cylindrum, priſma, conum, ac pyramidem cuiuſcunque altitudinis, in æqualem ſub data qualibet alia altitudine, & ſupra baſem quotcunque angulorum conuertere. 368
Cylindrum priſmati, & conum pyramidi æqualem: Et viciſſim priſma cylindro æquale, & pyramidem cono æqualem conſtruere. 368
Cylindrum, priſma, conum, & pyramidem in parallelepipedum ſupra baſem quadratum conuertere. 369

D.

Decima partes milleſimarum, quo pacto ſumantur, etiamſi inſtrumentum partium diuiſum ſit in 100. partes duntaxat. 8
Decima, vel centeſima partes quotcunque, quo pacto ex quauis parte recta in partes æquales diuiſa per circinum auferantur. 44
Declinationem cuiuslibet paralleli in diametro Aſtrolabii, per inſtrumentum partium inuenire. 11
Diameter circuli, ac peripheria, ex eius area. 201
Diameter circuli in numeris, ex dato arcu. 201
Diametri circuli ad circumferentiam proportio accuratior, quæ. 198
Diameter circuli ducta in $3\frac{1}{7}$. facit numerum maiorem circumferentia. 191
Diametrum circuli vera maiorem, ex data circumferentia indagare. 194
Diametrum circuli vera minorem, ex data circumferentia inueſtigare. 194
Diameter circuli quam proportionem habeat ad peripheriam, ſecundum Archimedem. 185
Diameter circuli ex data peripheria, & peripheriã ex data diametro accuratior. 198
Diametri circulorum inter ſe ſunt, vt circumferentia. 194. & 336
Differẽtia cuborũ quo pacto reperiãtur. 388
Differentia quadratorum. 387
Differentia ſtationum quid. 52
Difficultas in extractionibus radicum quæ ſit, & quo pacto ſuperetur. 283
Dimenſiones quo modo ſine numerorum ſupputatione fiant. 55. 58. 61. 64
Dimenſio altitudinis quo pacto fiat, ſine reductione vmbra verſa ad rectam, quando in vna ſtatione vmbra recta, & verſa in altera ſecatur. 110
Dimenſiones diſtantiarum eodẽ modo fiunt in quadrato ſtabili, ac pendulo. 102
Dimenſio diſtãtia quo modo fiat ſine reductione vmbrarum rectarum ad verſas, quando in vtraque ſtatione latus vmbra recta ſecatur. 104
Dimenſio diſtantia quo modo fiat ſine reductione vmbra recta ad verſam, quando in vna ſtatione vmbra recta & in altera verſa ſecatur. 105
Dimenſio circuli ex Archimede. 181
Dioptra portio intra quadratum ſtabile quo pacto reperiatur. 113
Diſtantiam ab oculo vel pede menſoris ad quoduis punctum in Horizonte notatum, per vnicam ſtationem, per quadrantem metiri. 67
Diſtantiam acclinem montis à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſita, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum efficere cognitam, beneficio quadrantis. 78
Diſtantiam acclinem montis à loco menſoris vſque ad baſem altitudinis monti impoſita, etiam non viſam, vna cum ipſa altitudine, quando menſor in aſcenſu montis conſiſtit, prope verum, beneficio quadrati efficere cognitam. 132
Diſtantiam a ſummitate turris, vel muri vſque ad ſignum aliquod in Horizonte poſitum, licet ad illud acceſſus non pateat, per quadratum eruere, vbicunque menſor exiſtat. 128
Diſtantiam horizontalẽ inter turrim aliquam, & aliud quodpiã ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas, vel in duabus feneſtris, quarum vna ad perpendiculum ſit ſub alia, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ignota ſit, per quadrantem dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere. 70
Diſtantiã ab oculo, vel pede menſoris (vbicunq; exiſtat) ad quoduis punctum in aliqua altitudine, vel etiam in Horizonte notatum per quadratum exquirere, per vnicam etiam ſtationem. 123. & 126
Diſtantiam inter duo puncta in quolibet plano eleuato, ſiue illud ad Horizontem ſit rectum, ſiue inclinatum per quadrantem metiri. 67
Diſtantiam in plano, ſiue acceſſibilis ea ſit, ſiue

ſiue inacceſſibilis, per duas ſtationes in eodem plano factas per quadrantem tam pendulum, quam ſtabilem metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo aliqua perpendicularis, etiamſi infimum eius extremum non cernatur. Atque hinc altitudinem quoque ipſam elicere. 52, & 55

Diſtantiam à baſe turris ad ſignum propoſitum in Horizonte, ex ſummitate turris, vel ex aliqua eius feneſtra, per quadratum cognoſcere. 119

Diſtantiam ab oculo, vel pede menſoris ad quoduis punctum in aliqua altitudine notatum, per duas ſtationes in plano factas, per quadrantem metiri. 65

Diſtantiam inter ſignum quodpiam in Horizonte poſitum, & ſummitatem turris, vel muri alicuius licet ad ipſum ſignum acceſſus non pateat, per quadrantem colligere. 72

Diſtantiam inter te, & ſignum quodcunque in plano Horizontis poſitum, per quadratum perueſtigare. 96 & 97

Diſtantiam in Horizonte inter menſorem, & ſignum aliquod viſum, per ſimpliciſſimũ quoddã inſtrumentũ indagare. 142

Diſtantiam in plano per duas ſtationes in eodem plano factas, per quadratum metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo aliqua perpendicularis, etiamſi infimum eius extremum non cernatur. 100

Diſtantiam inter duo montium, aut turrium cacumina, per ſimpliciſſimum quoddam inſtrumentum reperire. 142

Diſtantiam in plano Horizõtis inter menſorem, & ſignum quoduis, beneficio Normæ adinuenire. 138

Diſtantiam inter duo ſigna in plano, cui altitudo inſiſtit, ſi ea diſtantia è directo menſoris iaceat, & vtrumque eius extremum cerni poſſit, ex altitudinis faſtigio, etiamſi altitudo ſit menſoris ſtatura, per quadratum comprehendere. 121

Diſtantiam in plano Horizontis, quæ non ſit valdè magna, facillimo quodam modo dimetiri. 139

Diſtantiam inter pedes menſoris, & ſignum aliquod in plano Horizontis, beneficio baculi metiri, quando extremus terminus diſtantiæ videri poteſt. 140

Diſtantiam inter duo ſigna, vel puncta in quolibet plano ſiue recto ad Horizontẽ, ſiue inclinato, per quadratũ metiri. 126

Diſtantiam per vnicam ſtationem metiri per quadrantem, quando altitudo nota eſt. 59

Diſtantiam, quando menſor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo eſt diſtantia, perpendiculari exiſtens alterum extremum videre poteſt, per quadrantem metiri. 68

Doliorum capacitas. 233

E.

Ellipſis centro dato in linea axis, vna cum duobus punctis Ellipſis, vtrumque axis vtriuſque extremum reperire. 357

Ellipſis data area. 203

Ellipſi ſimilem figuram, quam ouatam dicunt, circino deſcribere. 374

Examen extractionis radicum. 280

Extrahere radicem cuiuſuis generis ex dato numero. 276

F.

Facilis inuentio lineæ rectæ cuiuis circũferentiæ æqualis, ex ꝓpria figura. 327

Facilis inuentio quadrati circulo æqualis. 328

Figura regularis circulo circumſcripta maiorem ambitum habet, quam circulus. 330, & 335

Figura numeri, ex quo radix extrahitur, quo modo per puncta ſignentur. 277

Figura rectilinea cuilibet circulum æqualem deſcribere. 329

Figuræ regularis area, cui triãgulo rectangulo ſit æqualis. 294

Figuræ regularis area, cui rectangulo æqualis ſit. 293

Figuram Ellipſi ſimilem, quam ouatam dicunt, circino deſcribere. 374

Figuram rectilineam circulo æqualem, & alteri ſimilem conſtituere. 329

Figuram rectilineã in quotuis partes æquales per

lis per rectam data recta parallelam diſtribuere. 260
Figuram ſolidam quamcunq; ex iis, de quibus Eucldi. in Stereometria agit augere vel minuere in data proportione. 273
Figuram rectilineam ex dato angulo, vel puncto in latere, in quotuis partes aquales partiri. 252
Figuram planam rectilineam, vel circulum, in data proportione augere, vel minuere. 272
Figuram ſimilem pluribus figuris ſimilibus, quarum latera homologa data ſint, aqualem. Et circulum pluribus circulis, quorum diametri, circumferētiaue data ſint, aqualem deſcribere. 202
Figurarum duarum ſimilium, aut circulorum proportio, ex datis duobus lateribus homologis, vel diametris, circumferentiiſue. 201
Figurarum iſoperimetrarum latera numero aqualia habentium, maxima & aquilatera eſt, & aquiangula. 303
Figurarum regularium Iſoperimetrarum maior eſt illa, qua plures continet angulos pluraue latera. 296
Figuris rectilineis regularibus circulus, cui iſoperimetra ſunt, maior eſt. 306
Filum perpendiculi ſecās vmbram rectam facit angulum complementi altitudinis: ſecans verò vmbram verſam, angulum conſtituit ipſius altitudinis. 89
Fractionem magnam ad minorem ferè aquiualentem reducere. 178
Fractionis inter duas media facilis inuentio. 178
Fruſti marmoris regularis ſoliditas. 209
Fruſti pyramidis, & coni area. 208
Fruſti ſphara ſoliditas. 231

G.

GEnera radicum innumera. 276
Generatio cuborum. 388
Generatio quadratorum. 387
Geodeſia, ac Geometria quid. 236
Geometrici quadrati conſtructio. 85
Gnomonica tabula. 91
Gnomonica tabula facillima conſtructio, eiuſq; vſus. 89
Gnomon, ſeu latus quadrati medio loco proportionale eſt inter vmbram rectam, ac verſam. 87
Gradus ac Min. in dato arcu quot contineantur, per inſtrumentum partium cognoſcere. 10
Gradus, ac Min. quotlibet, quo pacto ex circulo quouis, ope inſtrumēti partium, abſcindantur. 9. & 10

H.

HEmiſpherii conuexa ſuperficies. 229
Hemiſpharii ſoliditas. 230
Heptagoni latus non rectè à Carolo Mariano, Alberto Durero, & Franciſco Fluſſate inueniri. 362
Hyperbolici Conoidis ſoliditas. 233
Hypotenuſa inuentio per quadrantem. 53. 58. 61. 63

I.

IMpares numeros quemlibet cubū componentes inuenire. 390
Imperata pars quo pacto ex data recta abſcindatur, per inſtrumentū partium. 10
Inacceſſibilem altitudinem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullū ſpatium ſecundum rectam lineam accedere poſſit menſor, aut recedere, vt dua ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis cernatur, per quadratum explorare. 128
Inacceſſibilem altitudinem, cuius baſis non videatur, & ad quam per nullū ſpatium ſecundum lineam rectam accedere poſſimus, aut recedere, vt dua ſtationes fieri poſſint, ſed ſolum ad dextram, ſiniſtramue ad locum, è quo eius baſis appareat, per quadrantem explorare, 72
Inacceſſibilem altitudinem, quando diſtantia a loco menſoris ad baſem altitudinis ignota eſt, per duas ſtationes in plano factas, per quadrantē dimetiri. Atq; hinc diſtantiam quoq; ipſam eruere, etiamſi extremus eius terminus nō cernatur. 57
Inacceſſibilem altitudinem, quando neque diſtantia a loco menſoris ad eius baſem nota

nota eſt, neq; è directo ipſius duæ ſtationes in plano fieri poſſunt, neque denique baſis apparet, per quadrantem notum reddere. Atque hinc obiter ipſam quoq; diſtantiam elicere. 73

Inacceſſibilem altitudinem beneficio ſpeculi plani, vnà cum ſpeculi diſtantia tam à baſe, etiam non viſa, quam à cacumine altitudinis cognoſcere. 145

Inacceſſibilem diſtantiã per quadrantem tam pendulum, quam ſtabilem metiri, quando in eius extremo erecta eſt altitudo perpẽdicularis, etiamſi infimũ eius extremum non cernatur. Atq; hinc altitudinem quoq; ipſam elicere. 52. & 55

Incidentiæ angulus cur angulo reflexionis ſit æqualis. 341

Inſtrumenta menſurandi varia. 51

Inſtrumenti, quod Italis Squadra zoppa dicitur, conſtructio, & vſus. 150

Inſtrumentum partium quid, & quo pacto conſtruatur. 3. & 4

Inſtrumentum partium quo pacto aliter conſtruatur. 13

Inſtrumentum pro librationibus aptiſſimum. 153

Interuallum, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant & ipſum interuallum productum ad pedes menſoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 68

Interuallum è directo menſoris poſitum cuius vtrumque extremum, vel alterum non appareat, niſi menſor ad dextram, vel ſiniſtram accedat, per quadrantem comprehendere. 71

Interuallũ in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas, vel in duabus feneſtris, quarũ vna ſit ad perpendiculum ſub alia, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ignota ſit, per quadrantem dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere. 70

Interuallũ in Horizonte, inter menſorem, & ſignũ aliquod viſum, per ſimpliciſſimũ quoddam inſtrumentũ indagare. 142

Interuallũ in plano Horizontis inter menſorem, & ſignum quoduis beneficio Normæ adinuenire. 138

Interuallum inter duo puncta in quolibet plano eleuato, ſiue illud ad Horizontem ſit rectum, ſiue inclinatũ, per quadrantem metiri. 67

Interuallum inter duo ſigna, vel puncta in quolibet plano ſiue recto ad Horizontẽ, ſiue inclinato, per quadratũ metiri. 126

Interuallum, quãdo menſor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo interuallũ eſt, perpendiculari exiſtens alterum extremum videre poteſt, per quadrantem metiri. 68

Interuallum tranſuerſum in Horizonte, cuius vtrumq; extremum videri poteſt, per quadratum metiri. 128

Interuallum inter pedes menſoris, & ſignũ aliquod in plano Horizontis, beneficio baculi metiri, quando extremus terminus interualli videri poteſt. 137

Interuallum tranſuerſum in Horizonte, cuius vtrumq; extremum inſpici poteſt, per quadrantem efficere notum. 69

Ioſephus Scaliger perperam Archimedem de Dimenſione circuli reprehendit. 184

Irregularium omnino corporum area. 334

Iſoperimetra figura quæ, & tractatio de eis inſtituta. 291

Iſoperimetrarum figurarum regularium maior eſt illa, quæ plures continet angulos, pluraque latera. 296

Iſoperimetrarum figurarum latera numero habentium æqualia, maxima & æquilatera eſt, & æquiangula. 303

Iſoperimetrorum triangulorum eandem habentium baſem, maius eſt illud, quod duo latera habet æqualia. 297

Iſoſcelis trianguli area. 165

Iſoſcelia duo triangula ſimilia baſium inæqualium, ſimul maiora ſunt duobus Iſoſcelibus ſimul ſuper eaſdem baſes, quæ quidem inter ſe ſint diſſimilia prioribus verò Iſoperimetra, habeantq; quatuor latera inter ſe æqualia. 300

Iſoſcelibus duobus triangulis datis, quorum baſes inæquales ſint, & duo latera vnius duobus alterius æqualia: ſuper eiſdem baſibus triangula Iſoſcelia ſimilia, & prioribus ſimul ſumptis Iſoperimetra conſtituere. 299

L.

Latera duo trianguli obliquanguli, ex tertio latere, & duobus quibuſuis angulis, inuenire. 46

Latera tria in quadrilatero maiora ſunt quarto latere. 344

Lateris trianguli obliquanguli ſegmenta a perpendiculari facta, ex datis tribus lateribus cognoſcere. 46

Laterum proportiones ex datis angulis cuiuſuis trianguli patefacere. 44

Latus figuræ regularis, quo pacto ex eius area deprehendatur. 181

Latus figuræ regularis quo pacto ex ſemidiametro circuli circumſcripti cognoſcatur. 178

Latus polygoni propoſiti quo pacto in dato circulo per inſtrumentum partium inueniatur. 11

Latus quadratricis æquale eſt quadranti circuli, cuius ſemidiameter eſt baſis quadratricis. 326

Latus trianguli rectanguli, ex baſe, & alterutro angulorum acutorum, notum efficere. 45

Latus trianguli rectanguli, ex baſe, & altero cognoſcere. 45

Latus trianguli rectanguli ex altero latere & alterutro angulo acuto eruere. 45

Latus trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis comprehenſo colligere. 47

Latus trianguli obliquanguli ex duobus reliquis lateribus, & duobus quibuſuis angulis, addiſcere. 47

Latus trianguli obliquanguli ex duobus lateribus, & angulo vni eorum oppoſito, (ſi modo conſtet ſpecies anguli alteri lateri dato oppoſiti, quando datus angulus acutus eſt) exquirere. 48

Lenticularis figuræ area. 200

Librare ſpatium terræ inæquale, pro ducendis aquis: aut etiam, ſi lubet, Horizonti æquidiſtans efficere. 153

Linea recta diuiſa in quotuis partes æquales, quot eiuſmodi partes in quauis alia recta contineantur, ope inſtrumenti partium cognoſcere. 6

Linea recta in quotuis partes æquales diuiſa, quot decimæ, vel centeſimæ, &c. in quauis particula vnius partis contineantur, per circinum deprehendere. 42

Linea ſuperficies, ac ſolida, penes quid menſurentur. 157

Lineæ rectæ ſub dimenſionem cadentes quæ ſint. 51

Lineæ duæ, vna recta, & altera inflexa, nunquam concurrentes, licet in infinitum producantur, & ſemper magis vna ad alteram accedat. 270

Lineam quadratricem deſcribere. 320

Lineam rectam, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipſa linea recta producta ad pedes menſoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 68

Lineam rectam in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas, vel in duabus feneſtris, quarum vna ad perpendiculum ſit ſub alia, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ſit ignota, per quadrantem dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere. 70

Lineam rectam datam per inſtrumentum partium diuidere, vt alia recta diuiſa eſt. 12

Lineam rectam è directo menſoris poſitam cuius vtrumq; extremum, vel alterum, non appareat, niſi ad dextram vel ſiniſtram menſor accedat, per quadrantem comprehendere. 71

Lineam rectam in Horizonte per quadrantum metiri, quando menſor in vno eius extremo exiſtens alterum extremum videre non poteſt, neque altitudo in promptu eſt, ſed ſolum ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularem

dere poteſt ad locum, è quo alterum extremum appareat. 121
Lineam rectam arcui quadrantis æqualem reperire. 325
Lineam rectã in Horizonte è directo menſoris iacentem, per quadratum cognoſcere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neque è loco menſoris eam dimetiri: dummodo ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularem ad locum aliquẽ ire poſſit menſor, ex quo vtrumq; extremum appareat. 121
Lineam rectã, quando menſor in vno eius extremo, vel in aliqua altitudine nota ad planum, in quo eſt linea, perpendiculari exiſtens alterum extremum videre poteſt, per quadrantem metiri. 68
Lineam rectam tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum videri poteſt, per quadrantem metiri. 127
Lineam rectam tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum inſpici poteſt, per quadrantem notam efficere. 69
Linearum quarundã, & angulorũ mechanicã menſuratione admittendã eſſe. 169
Longitudinem tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum inſpici poteſt, per quadrantem notam efficere. 69
Longitudinem trabis ad Horizontem inclinata, cuius portio ſuperior tantum conſpiciatur, vnà cum angulo inclinationis, diſtantia baſis à menſore, & altitudine faſtigii ſupra Horizontem, per quadratum metiri. 151
Longitudinem recta è diametro menſoris poſita, cuius vtrumq; extremum vel alterum non appareat, niſi ad dextram, vel ſiniſtram accedat menſor, per quadrantem comprehendere. 71
Longitudinem vmbra ab altitudine, Sole lucente, quando proiecta altitudo eſt cognita, ope quadrati adipiſci. 141
Longitudinem linea recta, quando menſor in vno eius extremo, vel in altitudine aliqua nota, quæ perpendicularis ſit in eo extremo ad planum, in quo linea iacet, exiſtens alterum extemũ videre poteſt, per quadrantem comprehendere. 68
Longitudinem in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas, vel in duabus feneſtris quarum vna ſit ſub alia ad perpendiculum, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ignota ſit, per quadrantem dimetiri. Atq; hinc obiter altitudinem turris patefacere. 70
Longitudinem in Horizonte extenſam per quadratum metiri, quando menſor in vno eius extremo exiſtens alterũ videre non poteſt, propter tumorem aliquem interiectũ, neq; altitudo in promptu eſt, ſed ſolum ad dextrã, vel ſiniſtram per lineã perpendicularẽ recedere poteſt ad locũ, è quo alterum extremum appareat. 121
Longitudinem in Horizonte è directo menſoris iacentem, per quadratũ cognoſcere, ad cuius extrema neque accedere liceat, neq; è loco menſoris eam dimetiri, neq; vlla adſit altitudo: dũmodo ad dextrã, vel ſiniſtrã per lineam perpendicularem ad locũ aliquem ire poſſit menſor, ex quo vtrumq; extremum appareat. 122
Longitudinem, ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipſa longitudo producta ad pedes menſoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadrantem metiri. 68
Longitudinem aſcenſus alicuius montis, ſi eius cacumen ab oculo in radice conſtituto videatur, per inſtrumentum ſimplicißimum cognoſcere. 143

M.

Magnitudinum quatuor proprietas quædam. 331
Magnitudinibus in partes proportionales ſectis, ſi in ſingulis vna pars itrem ſecetur proportionaliter, erunt ibidem tota etiam ſecta proportionaliter. 237
Marmoris regularis ſoliditas. 209
Mechanica menſuratio in nonnullis lineis, & angulis admittenda eſt. 169

Medias duas proportionales inter duas datas, ex Nicomede, prope verum, adinuenire. 270
Medias duas ꝓportionales inter duas datas, ex Diocle, prope verum, inquirere. 268
Medias duas proportionales inter datas duas, ex Herone, & Apollonio Pergæo, prope verum, inuenire. 266. & 267
Medias duas proportionales inter duas datas, ex Philone Byſantio, & Philopono, prope verum inquirere. 268
Medium numerum proportionalem, vel duos medios inter duos datos numeros comperire. 274
Menſorum ratio communis in area cuiuſuis figuræ, vel agri inueſtiganda. 173
Menſurandi varia inſtrumenta. 51
Menſura linearum ſuperficierum, ac ſolidorum penes quid ſumantur. 157
Milleſimarum decimæ partes quo modo ſumantur, etiamſi inſtrumentũ partium diuiſum ſit in 100. partes duntaxat. 8
Milleſimæ partes quomodo capiantur, etiamſi in inſtrumento partium contineantur tantum 100. partes. 7
Milleſimæ, vel centeſimæ partes in quauis recta linea quo pacto capiantur, ope inſtrumenti partium. 6
Minuta quotlibet quo pacto ex gradu quouis abſcindantur per circinum. 41
Minuta ac ſecũda quo pacto per circinum in quauis particula gradus deprehendantur. 39
Minuta, & ſecũda quo pacto ex quadrante conſtructo reperiantur. 18
Minutia, cuius Numerator ex duarum minutiarũ Numeratoribus, & Denominator ex denominatoribus conflatur, maior eſt minore, & maiore minor. 178
Minutia inter duas media facilis inuentio. 778
Minutiam magnam ad minorem ferè æquiualentem reducere. 178
Montis altitudinem metiri per quadrantem. 57. & 59
Montis vel turris altitudinem ex eius ſummitate per vnicam ſtationem, ope quadrati ſtabilis metiri, vna cum diſtantia ſigni in Horizonte viſi vſq; ad perpendiculum montis, aut turris. 117
Montis, aut turris altitudinem ex eius vertice per quadrantem metiri, ſi in plano, cui inſiſtit, ſpatium aliquod è directo menſoris notum ſit, deprehendere. 64
Montis, aut turris altitudinẽ ex eius ſummitate per quadratum dimetiri, quãdo in plano ſummitatis Horizonti æquidiſtante duæ ſtationes fieri poſſunt, & ſignũ aliquod in Horizonte cernitur. 114
Montis aut turris altitudinem ex eius vertice per duas ſtationes in haſta aliqua erecta, vel in duabus feneſtris turris, quarum vna ſit ſupra aliam factas, è quibus ſignũ aliquod in Horizõte videri poſſit, per quadrantẽ metiri. Atq; hinc diſtantiã quoq; à perpẽdiculo mõtis, vel turris, vſq; ad ſignum viſum cognoſcere. 62
Montis, aut turris altitudinem ex eius vertice per duas ſtationes in eiuſdem ſummitate factas, è quibus ſignum aliquod in Horizonte appareat, per quadrantem dimetiri. Atq; hinc ipſam quoq; diſtantiam à montis perpendiculo, vel turris baſe ad ſignum illud inueſtigare. 59
Montis vel turris altitudinem ex eius faſtigio, quando è directo menſoris interuallum aliquod inter duo ſigna vel etiam inter ſignum quodpiam ac turrim cognitum eſt, per quadratum conijcere. 122
Montis, vel turris altitudinẽ ex eius ſummitate per duas ſtationes in haſta aliqua erecta factas, inueſtigare per quadratum, quando ſignum aliquod in Horizonte videri poteſt. 116
Multilatera figuræ irregularis areã quæ. 171
Muri cuiuſque ſoliditas. 209

N.

Norma beneficio altitudinem turris, aut alterius rei inueſtigare. 139
Norma beneficio diſtantiam in plano Horizontis inter menſorem, & ſignũ quoduis percipere. 139
Numeri particulares pro ſingulis radicum ſpeciebus, quo modo reperiantur. 278

Nume-

Numeros impares datum cubum componentes reperire. 390
Numerum aliquo concipiente, quot ei vnitates remaneant, poſt tres operationes imperatas, conijcere. 341

O

Obliquanguli trianguli area, ex vno latere, ac duobus angulis. 168
Obliquanguli trianguli area, ex duobus lateribus, & angulo ab ipſis cõprehẽſo. 168
Obliquangulorũ quadrilaterorũ area. 169
Obliquangulorum triangulorum rectilineorum problemata. 46
Obſeruationis angulus quis. 52
Ouatam figuram Ellipſi ſimilem circino deſcribere. 374
Octogonum regulare ad datam altitudinẽ latitudinemue conſtituere. 365
Octogonum regulare circulo inſcriptum medio proportionale eſt inter quadratum circulo circumſcriptum, & quadratum eidem inſcriptum. 364

P

Parabolici Conoidis ſoliditas. 232
Parabole data area. 203
Parallelepipedũ ſub quadrato alterutrius extremarum, (ſi ſint quatuor lineæ cõtinue proportionales) & altera extrema comprehenſum, æquale eſt cubo mediæ proportionalis, quæ priori extremæ aſſumpta eſt propinquior. 275
Parallelepipedorum, Priſmatum, & cylindrorum area. 204. & 205
Parallelepipedo rectangulo cubum æqualem exhibere. 369
Parallelepipedum, aut cubum in datam proportionem diuidere. 373
Parallelepipedum rectangulum ſub data altitudine, vel ſupra datam baſem dato cubo æquale conſtituere. 370
Parallelogrammum datum in quotcunq; partes æquales diuidere per rectas duobus lateribus oppoſitis parallelas. 206
Parallelogrammum datum per rectam ex puncto ſiue extra, ſiue intra ipſum, ſiue in aliquo latere dato ductam bifariã ſecare. 266
Parallelogrammum in dato angulo æquale dato quadrilatero conſtituere. 338
Pars imperata quo pacto ex data recta abſcindatur, per inſtrumentum partiũ. ib
Partes aliquotæ ſimiles plurium magnitudinum eandem habent proportionẽ. 218
Partes decimæ milleſimarum quo pacto ſumantur, etiamſi inſtrumentũ partium diuiſum ſit in 100. partes duntaxat. 8
Partes centeſimæ, vel milleſimæ in quauis recta linea, quo pacto ope inſtrumenti partium capiantur. 6
Partes quotcunq; decimæ, vel cẽteſimæ, &c. quo pacto ex quauis parte recta in partes æquales diuiſa p circinũ auferãtur. 45
Partes milleſimæ, quo modo capiantur, etiamſi in inſtrumento partium contineantur tantum 100. partes. 7
Particula qualibet vnius partis centeſimæ inſtrumenti partium, quot partes decimas vnius centeſimæ, vel quot milleſimas totius lateris inſtrumenti cõplectatur, quo pacto cognoſcatur. 9
Partium inſtrumentum quid, & quo pacto conſtruatur. 3. & 4
Partium inſtrumentum, quo pacto aliter conſtruatur. 13
Pendulus quadrans quid. 18
Pentagonum regulare non rectè conſtrui ab Alberto Durero, & aliis. 360
Peripheria circuli ex data diametro; & diameter ex data peripheria, accuratior. 198
Peripheria circuli, ac diameter, ex eius area. 201
Peripheria circuli quã proportionẽ habeat ad diametrũ, ſecundũ Archimedẽ. 185
Peripheria circuli diuiſa per $3\frac{1}{7}$ gignit numerum maiorem diametro. 191
Peripheria circuli ad diametrum proportio accuratior, quæ. 198
Peripheria circulorum inter ſe ſunt, vt diametri. 194. & 336
Peripheriam circuli vera maiorem, ex data diametro reperire. 193
Peripheriã datæ rectæ æqualẽ reperire. 329
Peripheriam circuli vera minorem. ex data diametro elicere. 193

Perpendicularem in latus quodcunq; trianguli ex angulo oppoſito cadentē, ex omnib. tribus lateribus efficere notā. 49
Perpendicularis qua ſegmenta faciat in latere trianguli obliquanguli. 46
Perpendicularis ex quolibet gradu quadrantis demiſſa, in quodnam punctum ſemidiametri cadat, per inſtrumentum partium cognoſcere. 11
Perpendicularis in triangulo quando eſt numerus ſurdus, quid agendum. 165
Perpendicularis in triangulo æquilatero quo pacto cognoſcatur. 175
Perpendicularis è centro figuræ regularis, quo pacto cognoſcatur. 175
Perpendiculi filum ſecans vmbrā rectam facit angulum complementi altitudinis: ſecans vero vmbram verſam, angulum conſtituit ipſius altitudinis. 89
Pinnacidia pro radio viſuali quo pacto cōſtruenda ſint. 17
Pinnacidia quo pacto in quadrante ſint affigenda. 17
Polygoni propoſiti latus quo pacto in dato circulo per inſtrumentum partium inueniatur. 11
Portionem altitudinis maioris ex minori altitudine, & minoris portionē, ex maiori per quadrantem cognoſcere. 76
Portionem altitudinis maioris ex minore altitudine, & minoris portionē ex maiore, per quadratum percipere. 131
Portionis ſphæræ ſuperficies conuexa. 229
Portionis ſphæræ ſoliditas. 231
Portionum ſphæroidis ſoliditas. 232
Primi inter ſe numeri ſi ambo nō ſint quadrati, aut cubi; neque vlli eorum æque multiplices quadrati erunt aut cubi. Et ſi duorum numerorum æque multiplices ſint ambo quadrati, aut cubi, etiam ipſi quadrati erunt, aut cubi. 343
Priſma, ac cylindrum in conum, & pyramidem: Item, conum, ac pyramidem in cylindrum, vel priſma æquale tranſmutare. 369
Priſma, conum, cylindrū, ac pyramidē in æquale ſub data altitudine, & ſupra baſē quotuis angulorum conuertere. 369
Priſma, cylindrum, conum, ac pyramidem in parallelepipedum ſupra baſem quadratam conuertere. 369
Priſmati, cono, cylindro, ac pyramidi cubū æqualem conſtruere. 370
Priſmati cuicunq; cylindrum æqualem, & pyramidi conum æqualem: Ac viciſſim cylindro priſma æquale, & cono æqualem pyramidem conſtruere. 368
Priſmati dato ſphæram æqualem conſtruere. 371
Pryſma pyramidem, cylindrum, & conum in parallelepipedum rectangulū æquale datæ altitudinis, vel baſis cōmutare. 370
Priſma, vel cylindrum datum in datam proportionem diuidere. 373
Priſmati, aut cylindro æqualem pyramidē vel conum ſub eadem altitudine: Et cōtra pyramidi, vel cono æquale priſma, vel cylindrum conſtituere eiuſdem altitudinis. 368
Priſmatum, parallelepipedorum, & cylindrorum area. 204. & 205
Probatio extractionis radicum. 280
Problemata 3.4.5.6. & 7. libri 3. quo pacto per vnicam ſtationem, ope quadrati ſtabilis abſoluantur. 112
Problemeta triangulorum rectilineorum rectangulorum. 44
Profunditatem putei, vel ædificij cuiuſuis ad perpendiculum erecti, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadratum efficere cognitam. 134
Profunditatem putei, vel ædificij cuiuſcūque ad perpendiculum erecti, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadrantem reperire. 80
Profunditatem vallis, eiuſdemque deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, eiuſq; terminus, vel aliquod in valle ſignum conſpici poſſit, per quadrantem ſcrutari. 82
Profunditatem vallis, eiuſdemque deſcenſum obliquum, ſi non ſit valde inæqualis, & eius terminus, vel aliquod in ea
ſignum

ſignum conſpici poſſit, per quadratum cognoſcere. 136
Propinquam radicem verã, in numeris nõ quadratis non cubis, nõ Zenſizenſis, non ſurdeſolidis, &c. inuenire. 284
Proportionalem numerum medium, vel duos medios, inter datos duos numeros reperire. 274
Proportionales duas medias inter duas datas, ex Diocle, ꝓpe verũ inueſtigare. 268
Proportionales duas medias inter duas datas, ex Nicomede, prope verum, adinuenire. 270
Proportionales duas medias inter duas datas, ex Philone Byſantio, & Philopono, prope verum, inquirere. 267
Proportionales duas medias inter datas duas rectas, prope verum, ex Herone, & Apollonio Pergæo inuenire. 267
Proportiones laterum ex datis angulis cuiuſuis trianguli pateſacere. 44
Proportionalis tertia, & quarta quo pacto ꝑ inſtrumentum partium reperiatur. 13
Proprietas pulchra quadrati. 365
Proprietas circuli pulcherrima. 358
Proprietas quædam quatuor magnitudinum. 331
Proprietas pulchra Quadratricis. 323
Punctum, in quo duæ rectæ ad inuicem inclinatæ concurrant, inuenire. 55
Punctum declinationis cuiuslibet paralleli in diametro Aſtrolabij per inſtrumẽtum partium inuenire. 11
Putei, vel ædificij cuiuſcunque ad perpendiculum erecti profunditatem, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadrantem reperire. 80
Putei, vel ædificij cuiuſuis ad perpendiculum erecti profunditatem, ſi modo angulus fundi, vel ſignum aliquod in fundo poſitum conſpiciatur, per quadratum efficere cognitum. 134
Pyramidẽ, conũ, cylindrũ, ac priſma in æqualẽ ſub data altitudine, & ſupra baſem quotuis angulorũ reuocare. 369
Pyramidem priſma, conum, & cylindrũ in parallepipedum rectangulũ æqu[illegible] data altitudinis, vel baſis commutare 370
Pyramidem datæ ſphæræ æqualem extruere. 371
Pyramidem, priſma, cylindrum, & conum in parallelepipedum ſupra baſem quadratam conuertere. 369
Pyramidi, cono, cylindro, ac priſmati cubũ æqualem efficere. 369
Pyramidi conum æqualem, & priſmati cylindrum æqualem: Et contra cono pyramidem æqualem, & cylindro priſma æquale conſtruere. 368
Pyramidi, vel cono æquale priſma, vel cylindrum eiuſdem altitudinis: Et viciſſim cylindro, vel priſmati æqualem conum, vel pyramidem ſub eadem altitudine conſtituere. 367
Pyramidum, & conorum area. 206
Pyramis cui ſolido rectangulo æqualis ſit. 307

Q

QVadrans pendulus quid. 18
Quadrans ſtabilis quid 18
Quadrans, ſemidiameter, & baſis Quadratricis, continue ſunt proportionales. 324.
Quadrantis lib. 1. cap. 2. constructi vſus in minutis, & ſecundis exquirendis. 18
Quadranti circuli rectangulum conſtituere Iſoperimetrum & æquale. 214
Quadrantis conſtructio ad Min. & Sec. cognoſcenda. 15
Quadrati area. 158
Quadratæ radicis extractio. 279
Quadratæ, & cubicæ radicis extractio ex data minutia. 288
Quadratam & cubicam radicem in numeris non quadratis, & non cubis per lineas Geometricè inuenire. 289
Quadrati Geometrici conſtructio 84
Quadrati pulchra proprietas. 365
Quadratorum differentia. 387
Quadratorum, & cuborum tabula vſque ad radicem 1000. 378
Quadratorum generatio. 387
Quadratum, altera parte longius, Rhombum ac Rhomboides, ex exceſſu diametri ſupra latus, &c. deſcribere. 345

Quadra-

Quadratum numerum in quotlibet quadratos diſtribuere. 342
Quadrilateri tria latera maiora ſunt quarto latere. 344
Quadrato circulũ aqualẽ deſcribere. 329
Quadratricis latus aquale eſt quadranti circuli, cuius ſemidiameter eſt baſis quadratricis. 326
Quadratricis baſis, ſemidiameter quadrantis, & quadrans ſunt continue ꝓportionales. 324
Quadratricis pulchra proprietas. 363
Quadratricem lineam deſcribere. 324
Quadratum pendulum, ac ſtabile, quomodo vſurpetur. 86
Quadratum circumferentia circuli maximi in ſphæra ita eſt ad ſuperficiem ſphæra, vt circumferentia circuli maximi ad diametrum. 219
Quadratum circulo aquale, quo pacto facile exhibeatur ex propria figura. 328
Quadratum dato circulo aquale conſtituere. 327
Quadratum diametri circuli maximi in ſphæra ad ſuperficiẽ ſphæra, maiorẽ proportionem habet quam 7. ad 22. minorẽ vero, quam 71. ad 223. 220
Quadratum data figura aquale, quo pacto facile conſtruatur. 173
Quadratum diametri circuli ad circulũ proportionem habet, quam 14. ad 11. ꝓximè, ſecundum Archimedem. 191
Quadratũ diametri circuli ad circulum habet maiorẽ proportionẽ, quã 14. ad 11. minorem vero, quam 284. ad 223. 195
Quadratũ circũferentia circuli ad circulũ habet maiorẽ ꝓportionẽ, q̃ 892. ad 71 minorẽ vero, quam 88. ad 7. 196
Quadratũ circũferentia circuli maximi in ſphæra ad ſuperficiẽ connexã ſphæra, maiorẽ proportionẽ habet, q̃ 223. ad 71. minorem vero, quam 22. ad 7. 221
Quadratũ maximi lateris triãguli minus eſt, q̃ duplũ ſumma quadratorũ ex reliquis duobus lateribus deſcriptorum. 353
Quadratura circuli per numeros ſecundũ Arabes falſa eſt. 318
Quadratura circuli per lineas Campano aſſcripta falſa eſt. 318
Quadratura circuli per numeros ex Alberto Durero falſa eſt. 318
Quadratura circuli per lineas. 317
Quadratura circuli per Hyppocratem Chium falſa eſt. 318. & 319
Quadraturam circuli eſſe poſſibilem. 320
Quadrilateri omnino irregularis area. 171
Quadrilatero aquale parallelogrammum facile conſtruere in dato angulo. 338
Quadrilaterorũ nõ rectangulorũ area. 169
Quantitas anguli, quẽ latera inſtrumenti partiũ cõtinẽt, quo pacto cognoſcatur. 12
Quarta & tertia proportionalis, quo pacto ꝑ inſtrumentum partium reperiatur. 13

R

Radicis cubica extrahenda regula propria. 283
Radicis cubica extractio. 281
Radicis quadrata, & cubica extractio ex data minutia. 288
Radicis quadrata extractio. 279
Radicis ſurdeſolida extractio. 281
Radicem cuiuslibet generis extrahere ex dato numero. 276
Radicem cuiuſque generis ex data minutia extrahere. 287
Radicem quadratam, & cubicam in numeris non quadratis, & non cubis per lineas Geometricè inuenire. 290
Radicem vera propinquam in numeris nõ quadratis, non cubis, non Zenſizenſis, non ſurdeſolidis, &c. inuenire. 244
Radicum infinita ſpecies. 276
Radix quadrata numeri fracti quo pacto eruatur. 166
Radix qualibet extrahenda quot figuras habere poſſit. 279
Recta linea in quotuis partes aquales diuiſa quot decima, vel centeſima, &c. in quauis particula vnius partis contineantur per circinum deprehendere. 42
Recta ducta ex angulo acuto trianguli rectãguli in oppoſitũ lat⁹, maior eſt ꝓportio huius lateris ad eius ſegmentũ prope rectum angulum, quam illius anguli acuti ad

enti ad eius partem dicto ſegmento lateris oppoſitam. 295

Recta linea diuiſa in quotuis partes æquales, quot eiuſmodi partes in quauis alia recta contineantur, ope inſtrumēti partium, cognoſcere. 6

Recta data, quamuis minima, partem, vel partes imperatas ex ea auferre. 355

Recta connectens duos angulos oppoſitos in duobus triangulis æqualibus latus commune habentibus, & in diuerſas partes vergentibus, à communi latere bifariam diuiditur. 260

Recta cuiuis circūferentiæ æqualis, quo pacto facile reperiatur ex ꝑpria figura. 327

Recta duæ tangentes circulum, & in vno puncto coeuntes, maiores ſunt omnibus chordis interceptum arcum diuidentibus in quotcunque partes æquales. 332

Rectæ lineæ adiungere rectam, ita vt quadratum totius compoſitæ æquale ſit quadrato rectæ adiunctæ, vna cum quadrato rectæ, quæ ex adiuncta, & proximo ſegmento prioris lineæ conflatur. 351

Rectæ tres circulum tangentes, & in duobus punctis coeuntes, maiores ſunt omnibus chordis arcus duos interceptos in partes æquales ſecantibus. 332

Recta lineæ circumferentiam æqualem reperire. 329

Rectæ quamuis minimæ exhibere multiplicem quamcunque, etiamſi circino ipſa non accipiatur. 355

Rectæ lineæ ſub dimenſionem cadentes quæ ſint. 51

Rectam lineā tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumq; extremū inſpici poteſt, per quadrantem notam efficere. 69

Rectam linem tranſuerſam in Horizonte, cuius vtrumq; extremum videri poteſt, per quadratum metiri. 127

Rectam lineam ad cuius extrema accedere non liceat, dummodo ea appareant, & ipſa recta linea producta ad pedes mēſoris pertingat, ex altitudine aliqua nota, per quadratem metiri. 69

Rectam lineam in Horizonte per quadratum metiri, quando menſor in vno eius extremo exiſtens alterum extremū videre non poteſt neque altitudo in promptu eſt, ſed ſolum ad dextram, vel ſiniſtram per lineam perpendicularem recedere poteſt ad locum, è quo alterum extremum appareat. 121

Rectam lineam, quando menſor in vno eius extremo, vel in aliquo altitudine notæ ad planum, in quo eſt recta, perpendiculari exiſtens alterum extremū videre poteſt, per quadrantem metiri. 68

Rectam lineam è directo menſoris poſitam, cuius vtrumq; extremum, vel alterum non appareat, niſi ad dextram, vel ſiniſtram menſor accedat, per quadrantem comprehendere. 71

Rectam lineam in Horizonte è directo mēſoris iacentem, per quadratum cognoſcere, ad cuius extrema neq; accedere liceat, neque è loco menſoris eam dimetiri: dummodo ad dextram, vel ſiniſtrā per lineam perpendicularem ad locum aliquem ire poſſit menſor, ex quo vtrūque extremum appareat. 122

Rectam lineam in Horizonte inter turrim aliquam, & aliud quodpiam ſignum, ex turri per duas ſtationes in faſtigio factas, vel in duabus feneſtris, quarum vna ſit ad perpendiculū ſub alia, quando ſpatium inter illas feneſtras notum eſt, etiamſi totius turris altitudo ſit ignota, per quadrantem dimetiri. Atque hinc obiter altitudinem turris patefacere. 70

Rectā arcui quadrātis æqualē reperire. 325

Rectam lineam datā per inſtrumentū partium diuidere, vt alia recta diuiſa eſt. 11

Rectanguli trianguli area, ex latere, quod recto angulo opponitur, & vno angulo acuto. 167

Rectanguli trianguli area, ex vno latere circa angulum rectum, & vno angulo acuto. 168

Rectangulorum duorum triangulorum ſimilium proprietas quædam. 398

Rectanguli trianguli area, ex vno latere

circa angulum rectum & latere, quod recto angulo opponitur. 168
Rectanguli trianguli area. 165
Rectangulo dato ſupra datã rectã æquale rectangulum facile conſtruere. 162
Rectangulum, cuius duo exceſſus dantur, quibus diameter vtrumque latus ſuperat, conſtituere. 350
Rectangulum dato rectilineo æquale facilè conſtruere. 339
Rectangulum, in quo exceſſus diametri ſupra maius latus, & maioris lateris ſupra minus datur, conſtituere. 351
Rectangulum ſub differentia exceſſuum, quibus diameter alicuius rectanguli vtrumque latus ſuperat, & minore exceſſu bis ſumptum, vnà cum quadrato minoris exceſſus bis ſumpto æquale eſt quadrato rectæ, qua minus latus minorem exceſſum ſuperat. 349
Rectangulum ſub ſegmentis diametri alicuius rectanguli (ductis per idem punctum diametri parallelis) comprehenſum, æquale eſt duobus rectangulis ſub ſegmentis duorum laterum inæqualium comprehenſis. 357
Rectangulum ſub diametro, & circumferentia maximi circuli in ſphæra, quadruplum eſt circuli maximi, & ſuperficiei conuexa eiuſdẽ ſphæra æquale. 219
Rectangulorum area. 157
Rectangulorum triangulorum rectilineorum problemata. 44
Rectarum duarum proportionem habentiũ, quã latus quadratricis ad baſẽ, maior æqualis eſt quadranti circuli, cuius ſemidiameter eſt minor recta. 326
Rectilineã figurã planã, vel circulũ in data proportione augere, vel minuere. 272
Rectilineum angulum in tres æquales angulos diuidere. 356
Rectis tribus datis in vno plano non parallelis, rectam ducere, etiam per datum interdum punctum in media, itaut eius ſegmenta inter mediã, & extremas ſint æquales, vel datã habeãt ꝓportionẽ. 354
Rectilineis duobus inæqualibus datis, ex maiore ꝑ lineam vni lateri parallelam detrahere rectilineũ minori æquale. 243
Rectilineo cuilibet æquale rectangulum facilè conſtruere. 339
Rectilineo dato æquale quadrilaterũ inter duas rectas ſuper datam rectam per lineam parallelam conſtituere. 239
Rectilineo in triangulo reſoluto ex vno aliquo puncto, rectas ipſis triangulis ordine proportionales inuenire. 246
Rectilineo dato parallelogrãmũ rectangulũ æquale, & Iſoperimetrũ cõſtituere. 216
Rectilineum datum per rectam à quouis angulo, vel puncto lateris, in datam ꝓportionem ſecare. 248
Rectilineum datum ex angulo, vel puncto dato in latere, in quotuis partes æquales diſtribuere. 252
Rectilineũ datum in quotuis partes æquales diſtribuere. 260
Rectilineũ datũ ꝑ rectã data rectæ parallelã in datam proportionem diuidere. 253
Rectilineorum triangulorum obliquangulorum problemata. 47
Rectilineorum triangulorum rectangulorum problemata. 44
Regionis, aut vrbis, vel campi ſitum in plano deſcribere. 147
Rectis duabus datis, quarum maior diametrum quadrati minoris non ſuperet: maiorem ita ſecare, vt partium quadrata ſimul ſumpta quadrato minoris lineæ ſint æqualia. 352
Reflexionis angulus cur angulo incidentiæ ſit æqualis. 341
Regula communis menſorum in area cuiuſuis figuræ, vel agri inueſtiganda. 173
Regula propria extractionis radicis cubicæ. 283
Regula vnica ad omnes rectas dimetiẽdas, quando rerum extrema videntur. 152
Regulæ conſtructio loco fili cum perpendiculo. 17
Regulare corpus quodlibet dato cubo æquale conſtituere. 372
Regulari corpori ſphæram æqualem exhibere. 372

Regu-

Regularis figura area, cui rectangulo æqualis ſit. 293
Regularis figura area, cui triangulo rectãgulo ſit æqualis. 294
Regularis figura circulo circumſcripta maiorem ambitum habet, quam circulus. 330. & 331
Regularibus figuris rectilineis circulus, cui Iſoperimetra ſunt, maior eſt. 306
Regularium figurarum Iſoperimetrarum maior eſt illa, quæ plures continet angulos, pluraue latera. 296
Regularium figurarum area à triangulo vſque ad Dodecagonum, quando latus eſt vnitas. 180
Regularium figurarum area. 175
Regularium quinque corporum area quæ. 210. & 214.
Regularium quinque corporum ſuperficies conuexa 214
Rhomboidis, ac Rhombi area. 170
Rhombi, ac Rhomboidis area. 170
Rhombum, ac Rhomboides, ex exceſſu diametri ſupra latus, &c. deſcribere. 346

S

Saccus tritici, quo pacto menſuretur. 209
Saxi regularis ſoliditas. 209
Scala altimetra quid. 85
Secantes ac ſinus quo pacto in inſtrumento partium capiantur. 8
Sectoris circuli area. 199
Sectoris ſphæræ ſoliditas. 230
Segmenta lateris trianguli obliquanguli à perpendiculari facta, ex datis tribus lateribus cognoſcere. 46
Semicirculo, quadranti, octauæ parti circuli, &c. rectangulum conſtituere Iſoperimetrum, & æquale. 214
Semidiametri circuli inuentio ex latere figuræ regularis inſcriptæ. 178
Similem figuram pluribus figuris ſimilib⁹, quarum latera homologa data ſint, æqualem: Et circulum pluribus circulis, quorum diametri, circumferentiæue datæ ſint, æqualem deſcribere. 202
Similium duorum triangulorum rectangulorum proprietas quædam. 298
Similium duarũ figurarũ, aut circulorũ ꝓportio, ex datis duob. laterib. homologis, vel diametris, circũferentiiſue. 201
Similes partes aliquotæ plurium magnitudinum eandem habent proportionem. 218
Sinus totus quandoque am paruus eſt, vt in inſtrumentum partium transferri nequeat, quid agendum. 12
Sinu toto poſito 10000. quo pacto in inſtrumento partium Tangentes ſumantur. 8
Sinu toto poſito 100. quo pacto Tangentes ꝑ inſtrumentum partium capiantur. 6
Sinus ac ſecantes quo pacto in inſtrumento partium capiantur. 7
Solidã figurã quamcunq; ex iis, de quibus Eucl. in Stereometria agit ſecundũ proportionẽ datã augere, vel minuere. 273
Solida, vel corpora præcipua, quorum area inueſtigantur, quæ. 204
Solida, ſuperficies, ac lineæ penes quid menſurentur. 157
Soliditas cuiuſuis portionis ſphæræ. 231
Soliditas ſphæræ. 223
Soliditas ſphæræ vera minor, ex circumferentia maximi circuli. 228
Soliditas ſphæræ vera maior, ex diametro circuli maximi. 228
Soliditas ſphæræ vera minor, ex diametro maximi circuli. 228
Soliditas ſphæræ vera maior, ex circumferentia circuli maximi. 228
Soliditas ſphæroidis. 232
Soliditas, vel area hemiſphærij. 230
Soliditas portionum ſphæroidis. 232
Soliditas ſectoris ſphæræ. 230
Soliditas muri cuiuſque. 209
Soliditas fruſti regularis marmoris. 209
Soliditas fruſti ſphæræ. 231
Soliditas Conoidis Hyperbolici. 233
Soliditas Conoidis parabolici. 232
Soliditas vaſis excauati. 209
Solidum planis ſuperficiebus contentum, & circa ſphæram circumſcriptibile, cui ſolido rectangulo ſit æquale. 307
Solidorum quinque regularium area quæ. 210. & 214.
Solidorum quinque regularium ſuperficies

ficiei conuexa. 214

Solidorum omnino irregulariũ area. 334

Solidum minus ex maiori detrahere, reſiduumq; in cubum transformare. 373

Solidum rectangulum ſupra baſem quotcunque angulorum, data ſphæra æqualem conſtruere. 371

Solis, vel ſtellæ cuiuſuis altitudinem per quadratum obſeruare. 88

Spatium terræ inæquale pro ducẽdis aquis librare: aut etiam, ſi lubet, Horizonti æquidiſtans efficere. 153

Spatiũ inter duo pũcta in quolibet plano eleuato, ſiue illud ad Horizõ. ſit rectũ, ſiue inclinatũ, per quadrantẽ metiri. 67

Species radicum infinita. 276

Speculi plani beneficio altitudinem monti impoſitam, ſi modo altitudinis baſis poſſit conſpici: Vel portionem ſuperiorem alicuius turris, metiri. 147

Speculi plani beneficio altitudinem, ad cuius baſem pateat acceſſus, vna cum diſtantia ſpeculi à cacumine altitudinis, deprehendere. 144

Speculi plani beneficio altitudinem inacceſſibilem, vna cum ſpeculi diſtantia tã à baſe, etiam non viſa, quam à cacumi- altitudinis, cognoſcere. 145

Sphæra ad cubum circumferentiæ maximi circuli, maiorem proportionem habet, quam 49. ad 2904. minorem vero, quam 5041. ad 298374. 221

Sphæra quolibet cono, & cylindro ſibi Iſoperimetro maior eſt. 313

Sphæra æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro, & tertia parte ſuperficiei conuexæ. 309

Sphæra maior eſt quouis corpore regulari ſibi Iſoperimetro. 311

Sphæra omnibus corporibus ſibi Iſoperimetris, quæ planis ſuperficiebus continentur, circaq; alias ſphæras circumſcriptibilia ſint, maior eſt. 311

Sphæra omnibus corporibus ſibi Iſoperimetris, & circa alias ſphæras circumſcriptibilibus, quæ ſuperficiebus conicis cõtineantur, maior eſt. 311

Sphæræ area, vel ſoliditas, ex diametro maximi circuli. 228

Sphæra data conum efficere æqualem. 371

Sphæra data cylindrũ æqualẽ exhibere. 371

Sphæra data cubum æqualem: Et dato cubo æqualem ſphæram efficere. 370

Sphæra data piramidem conſtituere æqualem. 371

Sphæra data ſolidum rectangulum æquale ſupra baſem quotcunque angulorum conſtituere. 371

Sphæræ ſuperficies vera minor, ex circumferentia maximi circuli. 227

Sphæræ ſuperficies vera minor, ex diametro circuli maximi. 227

Sphæræ ſuperficies vera maior, ex diametro circuli maximi. 227

Sphæræ area, ſeu ſoliditas vera minor, ex circumferentia circuli maximi. 228

Sphæræ area. ſeu ſoliditas maior, quã vera, ex circumferentia maximi circuli. 228

Sphæræ area, ſiue ſoliditas, ex diametro maximi circuli. 228

Sphæræ ſoliditas. 223

Sphæra ad cubum diametri ſphæræ maiorem proportionem habet, quam 223. ad 426. minorẽ verò, quàm 11. ad 21. 222

Sphæræ ſuperficies conuexa cui rectangulo ſit æqualis. 219

Sphæræ ſuperficies conuexa ad quadratum circumferentiæ circuli maximi, maiorem proportionem habet, quam 7. ad 22 minorem verò, quàm 71. ad 223. 221

Sphæræ ſegmentorum area. 229

Sphæræ ſuperficies ad quadratũ circũferẽtiæ circuli maximi eſt, vt diameter ad circumferentiam circuli maximi. 219

Sphære ſuperficies vera maior, ex circumferentia circuli maximi. 226

Sphæræ portionis ſuperficies conuexa. 229

Sphæræ portionis ſoliditas. 231

Sphæræ area, eiuſdemque ſuperficies conuexa. 218. & 223

Sphæræ ſuperficies ad quadratum diametri ſphæræ, vel circuli maximi, maiorẽ proportionem habet quam 223. ad 71. minorem vero quam 22. ad 7. 221

Sphæ-

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06697 7508
B 444712 DUPL